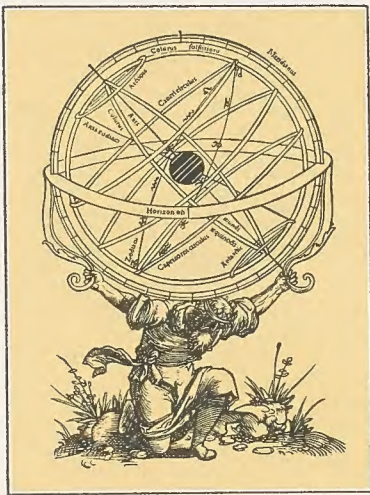


*The Dibner Library
of the History of
Science and Technology*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinventionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaferint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc autem librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticae thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarètur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

HIERONYMVS

CARDANVS MEDICVS ANDREÆ

Osiandro uiro eruditiss. S. P. D.



NIHIL tam animo unq̃ uersaui, Andrea doctiss. quàm ut eorum, qui de bonis literis bene merentur, nomina posteritati commendarem. Tum uero præcipuam quandam diligentiam adieci, si tales cum eruditione humanitatem coniunxissent. Quamobrem cum te non solum Hebræarum, Græcarum, ac Latinarum literarum scientiam haud mediocrem, sed etiam Mathematicarum habere intelligam, humanissimum quoq̃ semper expertus sim, uisum est, hoc meum opus, nulli melius posse dedicari, quàm tibi, à quo possit & emendari, (si manus mea imperium mentis transgressa fefellisset) & legi cum uoluptate, & intelligi, tum uero etiam cum authoritate commendari. Hoc exemplum, nisi fallor, & alij sequentur, ac opera sua, non nisi in ea quam tractant arte eruditis dedicabūt. Accipe ergo amoris erga te mei, & officij in me tui, tum præclaræ simul eruditionis tuæ perpetuum testimonium. Et quanq̃ tu talis sis, quem tua uirtus omnibus notum faciat, tamen cum Alexander, & Cæsar, factis suis notissimi, aliorum monumentis inscribi desiderauerint, cunq̃ Plato, qui mira illa per sese conderet, aliorum tamen scriptis laudari concupiuerit, spero meum hoc quaecunq̃ officium tibi quoq̃ non ingratum esse futurum, quòd & in his fortuna quædam dominetur, pereantq̃ meliora sæpe, seruat deterioribus. Et sit modo de hoc quæcunq̃ iudicium tuum, certum mihi tamen est, officio meo me satisfacere debere. Atq̃ utinam contingat illustriore exemplo, animum meum erga omnes ostendere, qui eo animi candore sunt, quo te in studiosos nostri temporis fuisse semper agnouī.

Sed dabitur forsan occasio melior, etsi non detur, hanc tamen, quæcunq̃ sit, perijisse mihi nolim. Vale. v. Idus Ianuarias. M. D. XLV. Papiæ.

9 QA
35
C26
RB
NMPH

INDEX EORVM

QVÆ IN HOC LIBRO CON-

TINENTVR.

Cap. I.	De duabus æquationibus in singulis capitulis.	fol. 3
II.	De numero omnium capitulorum.	fol. 6
III.	De æquationibus capitulorum simplicium.	fol. 8
IIII.	De subiectis æquationibus generalibus & singu- laribus.	fol. 9
V.	De inuenienda æstimatione capitulorum compo- sitorum minorum.	fol. 9
VI.	De modis inueniendi capitula noua.	fol. 14
VII.	De capitulorum transmutatione.	fol. 17
VIII.	De æstimatione generali & equatione, cum media denominatio æquatur extrems & numero.	fol. 21
IX.	De secūda q̄ntitate incognita nō multiplicata.	fol. 21
X.	De secūda quantitate incognita multiplicata.	fol. 23
XI.	De cubo & rebus q̄libus numero generaliter.	fol. 29
XII.	De cubo & equali rebus & numero generaliter.	fol. 31
XIII.	De cubo & numero q̄libus rebus generaliter.	fol. 31
XIIII.	De cubo æqli q̄dratis & numero generaliter.	fol. 33
XV.	De cubo & quadratis æqualibus numero genera- liter.	fol. 33
XVI.	De cubo & numero æqualibus quadratis genera- liter.	fol. 35
XVII.	De cubo quadratis & positionibus æqualibus nu- mero generaliter.	fol. 35
XVIII.	De cubo & rebus æqualibus quadratis & nume- ro generaliter.	fol. 37
XIX.	De cubo & quadratis æqualibus rebus & numero generaliter.	fol. 41
XX.	De cubo æquali quadratis rebus & numero ge- neraliter.	fol. 41
XXI.	De cubo & numero æqualibus quadratis & rebus generaliter.	fol. 42
XXII.	De cubo rebus & numero æqualibus quadratis generaliter.	fol. 43

XXIII.	De cubo quadratis & numero æqualibus re-	fol. 44
	bus generaliter.	
XXIIII.	De 44 capitulis deriuatiuis.	fol. 44
XXV.	De capitulis imperfectis & particularibus.	fol. 46
XXVI.	De regulis maioribus singularibus.	fol. 49
XXVII.	De transitu capituli particularis in capitulum particulare.	fol. 50
XXVIII.	De operationibus radicum pronicarum seu mix- tarum & allellarum.	fol. 51
XXIX.	De regula modi.	fol. 52
XXX.	De regula aurea.	fol. 53
XXXI.	De regula magna.	fol. 54
XXXII.	De regula æqualis positionis.	fol. 56
XXXIII.	De regula inæqualiter ponendi seu propor- tionis.	fol. 57
XXXIIII.	De regula mediæ.	fol. 59
XXXV.	De regula duplici aggregati.	fol. 60
XXXVI.	De regula liberæ positionis.	fol. 64
XXXVII.	De regula triplici falsum ponendi.	fol. 65
XXXVIII.	De regula duplici, qua excidunt partes multi- plicando.	fol. 66
XXXIX.	De regula duplici, qua per iteratam positionem in- uenimus ignotam quantitatem, ubi habentur 20 capitula alia generalia quod quod. & quod. & rerum & numeri.	fol. 72
XL.	De modis suppositionum generalium ad artem ma- gnam pertinentibus, & regulis quæ extra ordi- nem sunt, tamen æstimationibus alijs diuersi ge- neris ab his quæ dictæ sunt.	fol. 79

Errata quædam sic corrigito.

Fol. 5. facie 2. uersu 28. lege 6 quadratis p: 3.

Fol. 8. facie 2. uersu ultimo. reliquas.

Fol. 9. facie 2. uersu 34. superficiem.

ARS MAGNA, QVAM³ VVLGO COSSAM VOCANT, SIVE RE-

GVLAS ALGEBRAICAS, PER D. HIERONYMVM

Cardanum in Quadraginta Capitula redacta, & est
Liber Decimus sui Arithmeticae.

De duabus æquationibus in singulis capitulis. Cap. I.



Æ C ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initi-
um sumpsit. Etenim huius rei locuples testis Leonar-
tus Pisauriensis est. Reliquit autē capitula quatuor,
cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis as-
scribemus. Post multa uero temporum interualla,
tria capitula deriuatiua addita illis sunt, incerto au-
thore, quæ tamen cum principalibus, à Luca Pacciolo posita sunt.
Demum etiam ex primis, alia tria deriuatiua, à quodam ignoto uiro
inuenta legi, hæc tamen minime in lucem prodierant, cum essent alijs
longe utiliora, nam cubi & numeri & cubi quadrati æstimationē do-
cebant. Verum temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, ca-
pitulum cubi & rerum numero æqualium inuenit, rem sanè pulchram
& admirabilem, cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenij
mortalis claritatem ars hæc superet, donum profectò celeste, experi-
mentum autem uirtutis animorum, atq; adeò illustre, ut qui hæc atti-
gerit, nihil nō intelligere posse se credat. Huius emulatiōe Nicolaus
Tartalea Brixellensis, amicus noster, cū in certamē cū illius discipulo
Antonio Maria Florido uenisset, capitulum idem, ne uinceretur, in-
uenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus
enim ego uerbis Lucae Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullū
aliud esse posse negat, quanq̃ tot iam antea rebus à me inuentis, sub
manibus esset, desperabam tamen inuenire, quod quærere non aude-
bam. Inde autem, illo habito, demonstrationē uenatus, intellexi com-
plura alia posse haberi. Ac eo studio, aucta q̃ iam confidentia, per me
partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alumnū
nostrum, inueni. Porro quæ ab his inuenta sunt, illorum nominibus
decorabuntur, cætera, quæ nomine carent, nostra sunt. At etiam de-
monstrationes, præter tres Mahometis, & duas Lodouici, omnes no-
stræ sunt, Singulæq; capitibus suis præponentur, inde regula addita,
subijcietur experimētum. Et quanq̃ longus sermo de his haberi pos-

set, ac innumera capitulorum series subiungi, finem tñ exquisitæ considerationi in cubo faciemus, cætera, etiã si generaliter, q̃si tamen per transfennam tractantes. nanq̃ cū positio lineam, q̃dratum superficiẽ, cubus corpus solidũ referat, nã utiq̃ stultũ fuerit, nos ultra progredi, quo naturæ nō licet. Itaq̃ satis p̃fecte docuisse uidebitur, qui oĩa, quæ usq̃ ad cubum sunt, tradiderit, reliq̃ quæ adijcimus, quasi coacti aut incitati, nō ultrã tradimus. In omnibus autẽ præcedentium, ac maxime librorũ tertij ac quarti, meminisse operæ precium fuerit, ne uel iterum tradendo nugax efficiar, aut obscurior prætermittendo.

2 Iam em̃ docuisse nos meminimus, quæ sint impares, aut pares denominationes. Nanq̃ q̃dratum, & q̃dratum q̃drati, cubumq̃ quadrati, ac deinceps una semper intermissa. Pares, rem aut̃ seu positionem, cubum, primum ac secundum nomen, impares uocamus denominationes. At uero quòd tam ex 3, quàm ex m: 3, sit 9, quoniam minus in minus ductũ p̃ducit plus. At in imparibus denominationib⁹ eadẽ seruatur natura: nec plus nisi ex uero numero fiet: nec cubus, cuius æstimatio sua sit m: seu quòd dicimus debitũ, ex positione ulla numeri ueri p̃duci potest, iam meminisse oportet dilucidius explicatũ.

3 Si igitur par denominatio, numero æqualis sit, rei æstimatio duplex est, m: & p: alteraq̃ alteri æq̃lis, uelut, si q̃dratum æquetur 9, res est 3, uel 3 m: & si æquetur 16, res est 4, uel m: 4, & si q̃dratum q̃drati æquetur 81, rei g̃stimatio est 3, uel m: 3. Cõponere autem pares denominationes nō est admodum necessarium, quia q̃d. quadratum ad derivatiua capitula pertinet, uerũ si diligenter hæc, quæ scribam, animaduenteris, cū hac regula etiam uoto tuo satisfacies, nam cum q̃dratum & q̃d" q̃dratũ numero æquantur, eadem erit ratio, quæ in simplici, duplex equatio scilicet, altera p: altera m: inuicemq̃ æq̃les, uelut 1, q̃d" q̃dratum p: 3 q̃dratis æquantur 28, positio ualet 2 uel 2 m: At uero, si q̃d" q̃dratũ & numerus, equalia sint q̃dratis, demonstrabimus sanẽ in capitulo octauo, duas esse rei g̃stimationes ueri numeri, totidem aut̃ habebit per m: singulas singulis correspondentibus æq̃les, uelut si dicam 1 q̃d" q̃d" p: 12, æquatur 7 q̃dratis, positionis æstimatio est, uel 2, uel m: 2, uel r̃ 3, uel m: r̃ 3, & sic sunt q̃tuor æq̃tiones. Quòd si caruerit g̃stimatione uera, carebit etiam ea, quæ est per m: uelut 1 q̃d" q̃d" p: 12, æq̃tur 6 q̃d" , quia non potest æquationẽ ueram habere, carebit etiam ficta, sic em̃ uocamus eam, quæ debiti est seu minoris. At uero si q̃d. q̃d" numero & q̃dratis æquale sit, una semper est rei uera æstimatio, altera ei æqualis, ficta, uel per m: uelut 1 q̃d" q̃d" æquetur 2 q̃dratis p: 8, rei g̃stimatio est 2, uel m: 2. Eadem igitur ratio in cæte

ris

DSI

ris paribus omnibus denominationibus inter se, cū numero iungunt, at hoc per deprefionem quomodo fiat, in 4^o libro plene docuimus.

At imparium denominationum, una tantum æquatio uera est, 4
nulla ficta, cū solæ numero cōparantur, uelut duæ res æquantur 16, æstimatio rei est 8, duo cubi æquantur 16, æstimatio rei est 2, semper autem numerus cui comparantur denominationes, in hoc capitulo uerus, non fictus supponitur, quid enim tam stultum, quàm fundamentum ipsum infirmare, quanquā tamen ratio opposita, in oppositis esset persequenda, eadem igitur est ratio, ubi plures denominationes numero comparantur, etiamsi mille forent, una erit æstimatio rei uera, & nulla ficta, uelut 1 cubus p: 6 positionibus, æquatur 20, rei æstimatio nulla est præter 2, nequæ uera nequæ ficta.

Cum uero duæ denominationes cum numero comparantur, aut 5
ambæ impares, & comparatio fiet ad extremam, uel ad mediam, nam de ea quæ fit ad numerum, iam in præcedenti regula dictum est, uel altera impar, altera par, nam de utraq; pari, in tertia regula generaliter diximus. Si igitur extrema denominatio, cubus scilicet, cū numero mediæ, id est positionibus comparetur, uide an ex duabus tertijs numeri Rerum in radicem tertiæ partis eiusdem numeri fiat ducendo, numerus propositus aut maior, aut minor, si igitur fiat numerus propositus præcise, æstimatio rei est duplex, & una uera, scilicet & ipsa, quæ ducta est. Exemplum, cubus p: 16, æquatur 12 positionibus, ducto igitur 8, qui est $\frac{2}{3}$ de 12, numero rerum, in 2 radicem 4, qui est $\frac{1}{3}$ numeri rerum, fit 16, numerus æquationis propositus, æstimatio igitur est 2, radix 4, & alia est æstimatio ficta, & est correspondens ueræ, cubi æqualis eisdem rebus, & eidem numero, ut in exemplo, si cubus æquatur 12 rebus, p: 16 numero, uera æstimatio est 4, igitur si cubus p: 16 æquatur 12 positionibus, æstimatio rei est m: 4, nam 12 res sunt m: 48, & cubus m: 4 est m: 64, cui addito 16, fit m: 48. Quod si productum ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in & tertiæ partis eiusdem numeri, superet numerum æquationis propositum, tunc capitulum habebit tres æquationes, duas ueras, & tertiam fictam. Exemplum, 1 cubus p: 9, æquetur 12 rebus, una æquationum uera est 3, alia & $5\frac{1}{4}m: 1\frac{1}{2}$, tertiam ficta ex his semper aggregatur, & respondet æstimationi cubi æqualis eisdem rebus & eidem numero ueræ, & est & $5\frac{1}{4}p: 1\frac{1}{2}$ & ita reliqua ficta, de qua diximus, in alio exemplo, aggregatur ex duabus ueris, sed quia ueræ sunt inuicem æquales, ideo ficta semper dupla est ueræ. Manifestum est igitur, quod falsæ æquationes seu fictæ, capituli cubi & numeri æqualium rebus, respondent æquationibus ueris capituli cubi æqua-

bi æqualis rebus & numero, ubi res & numerus sint idē. At uero ubi ex tali multiplicatione & tertiæ partis numeri rerum, in duas tertias eiusdem numeri fiat minus numero proposito, tūc nulla erit æquatio uera sed una ficta, æqualis ueræ capituli cubi æqualis totidem rebus & eidē numero, uelut 1 cubus p:21 æquatur 2 rebus, quanq̃ careat uera equatione, ficta tamen est m:3, & hæc est æstimatio uera cubi æqualis duabus rebus ac numero uiginti uno.

6 Ex his non difficile est uenari, quot æquationes habeat capitulū cubi æqualis rebus & numero. Si igitur ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in radicem tertiæ partis eiusdem, fit numerus propositus, capitulum habet duas æquationes, ueram æqualem fictæ præcedentis regulæ, & fictā æqualem ueræ, ideo uera est dupla fictæ, quia ibidem ficta est dupla ueræ, ut 1 cubus æquatur 12 rebus & 16 numero, æquatio uera est 4, & ficta est m:2, quia si 1 cubus p:16, æquatur 12 positionibus, æstimatio uera est 2, & ficta m:4. Quod si ex dicta multiplicatione, proueniat plus numero æquationis, æstimatio uera erit una, respondens falsæ præcedentis regulæ, & falsa duplex, utraq̃ respondens ueræ, præcedentis regulæ, ut si cubus æquetur 12 positionibus p:9, æstimatio falsa utraq̃ est, & $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ m: & 3 m: & uera est & $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, & ita uides, qualiter falsæ ueris, & ueræ falsis sibi inuicem respondent, ex ambabus autem falsis cōflatur uera, nam ex & $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ & 3, fit & $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$. Quod si ex tali producto fiat minus numero æq̃tionis, æstimatio est una tantū, & uera, sicut in præcedenti regula est una tantū, & ficta, uelut si cubus æqlis sit duabus rebus & 21 numero, æquatio est 3, sicut in cubo p:21 æquali duabus rebus æstimatio ficta est m:3.

7 In capitulis aut in quibus æquantur inuicem numerus & denominatio par & impar, aut par est extrema, ut quando q̃d^m & positio, & numerus æquantur inuicem aut denominatio extrema est impar, ut quando cubus & q̃d^m æquantur numero, si igitur q̃d^m æquatur positionibus & numero, habebit duas æquationes, unam ueram æq̃lem fictæ, capituli q̃drati & rerū earundem æq̃lium eidē numero, & aliam fictam æq̃lem ueræ alterius capituli. Exemplū, Si q̃d^m & 4 positiones, æquantur 21, æstimatio uera est 3, & ficta m:7, & si q̃d^m æquatur 4 positionibus, & 21, æstimatio uera est 7, & ficta m:3, ideo habitis ueris, mutuo habentur fictæ, quemadmodum in præcedenti regula, sed diuerso modo, nam hic extrema extremis, ibi media extremis comparantur. Nam ibi capitulum cubi & numeri æqlis rebus, cōparatur capitulo cubi æqualis rebus & numero, hic capitulum q̃drati & rerum æqualium numero, cōparatur capitulo q̃d^m æqlis rebus & numero.

At

At quando quadratū & numerus æquantur rebus, & casus est possibilis, tunc sunt duæ solutiones ueræ, ut dicendo quad^m p: 12, æquatur 7 pos^b, positio potest esse 4, uel etiam 3, nam in utroq; uerificatur, nisi quando numerus est æqualis quadrato dimidiij numeri radicū, nam tunc solum est una æquatio, scilicet dimidium numeri ipsarum radicū. In hoc autem capitulo nunq; potest esse solutio ficta, nec æquatio per minus, sed ubi est solutio per uerum numerum, est duplex, ubi caret solutione uera, nō tamen magis potest solui per æquationem fictam.

Si uero æquatio quærat in capitulis cubi, quadratorum, & numeri, tunc si cubus æquatur quadratis & numero, tunc est una tantum solutio uera, uelut si dicam, cubus æquatur tribus quadratis p: 16, res ualeat 4, & non potest alia inueniri.

NOTANDUM. In omnibus autem capitulis in quibus est una tantum solutio, æquatio est facilior inuentu, & nitidior, uelut in capitulo cubi & rerum æqualium numero, & cubi æqualis quadrato & numero, & in capitulo cubi æqualis rebus & numero, ubi productio illa ex $\frac{2}{3}$ numeri in $\frac{1}{3}$ tertiæ partis est minor numero. Idem dico, ubi cubus cum numero æquatur rebus, & non potest haberi nisi ficta æquatio, reliquæ autem in quibus multiplex est æstimatio rei, sunt difficiliore & confusæ.

Si igitur cubus & quadratum, æquantur numero, tunc æstimatio rei est una tantū per plus, ubi ex $\frac{1}{3}$ numeri quad^m in quadratum duarum tertiarum eiusdem numeri fiat minus numero æquationis, & hæc æstimatio eadem est fictæ, correspondenti capitulo cubi & numeri æqualium quadratis sub eadem quantitate. Exemplū. Cubus & tria quadrata æquantur 20, tunc quia ex 1 tertia parte numeri quadratorum, in 4 quadratū duarum tertiarum fit minus quàm 20, dico quod non est nisi una æquatio, & res ualeat 2, & hæc est æstimatio per m: cubi p: 20, æqualis tribus quadratis. Vbi uero ex ea multiplicatiōe talis numerus possit produci, erit una æstimatio uera, & duæ fictæ, & uera correspondebit fictæ alterius capituli, & rursus fictæ ueris. Exemplū, si dico, cubus & 11 quadrata æquantur 72, res est $\frac{1}{2}$ 40 m: 4, pro uera æstimatione, sed pro ficta est 3 m: uel $\frac{1}{2}$ 40 p: 4 m: Et si cubus cum 72 æqualis sit 11 quadratis, æstimationes ueræ sunt 3, uel $\frac{1}{2}$ 40 p: 4, & ficta est $\frac{1}{2}$ 40 m: 4 m: Ideo quærendo fictam semper quærimus ueram, & correspondentem alterius capituli.

Notum est autem ex hoc, quod capitula quædam habent duas, Not^m quædam unam æstimationem, & quando habet tres, in una parte ca-

B.

pituli,

pituli, habent postmodum unam tantum in reliqua, uelut capitulum cubi æqualis rebus & numero in parte inferiore, & capitulum cubi & quadratorum æqualium numero, & capitulum cubi & numeri æqualium quadratis aut rebus, nam in una parte habent tres æquationes, in alia unam tantum, & similiter capitulum quad' quadrati & numeri æqualium quadrato: in una parte habet quatuor æquationes, in alia postmodum nullam, quædam uero habent duas per totum, ut capitulum quadrati & rerum æqualium numero, aut capitulum quadrati æqualis rebus & numero, quæ uero habent unam, sunt, ut capitulum cubi & rerum æqualium numero, & capitulum quadrati & numeri æqualium rebus, quod habet duas æquationes in una parte, in alia postmodum nullam.

Not^m. Et scias, quod æquationes capitulorum, cubi & quadratorum æqualium numero, item cubi & numeri æqualium quadratis, sic se habent, quod differentia æquationum uerarum & fictarum semper est numerus quadratorum, uelut, si cubus & 72 æquantur 11 quadratis, æquatio ficta est $Rx\ 40\ m:4$, ueræ sunt $Rx\ 40\ p:4$. & 3. differentia, $Rx\ 40\ m:4$ & 7 $p:Rx\ 40$. est 11 numerus quadratorum, & ita, si cubus & 11 quadrata æquantur 72 numero.

9 In his autem capitulis, quæ duplici denominatione, impari & una pari ac numero constant, si cubus & res, æquales sint, quadratis & numero, æquationes possunt esse tres, & omnes ueræ, & nulla ficta, quia ut dictum est, minus cum ad solidum deducitur, fit minus, & ita minus æquale esset plus, quod esse non potest.

Vbi uero cubus, quadratum, & res, æquales sint numero, tunc tres etiam erunt æquationes, altera p : duæ m : & hoc, si sub eisdem denominationibus quadrata æquari possunt rebus numero & cubo, & æquationes ueræ hic, sunt fictæ in illo exemplo, 1 $cu^b\ p:6\ quad^{tis}$, 3 rebus, æquatur 18, tunc rei uera æstimatio habetur ex capitulo suo, de inde habet æstimationes fictas capituli, 1 $cub.\ p:3$ rebus $p:18$ æqualium 6 quadratis, & una earum est 3, alia $Rx\ 8\ \frac{1}{4}\ p:1\ \frac{1}{2}$, igitur $m:3$. uel $m:Rx\ 8\ \frac{1}{4}\ p:1\ \frac{1}{2}$. est æstimatio ficta, 1 $cub.\ p:6\ quad^{tis}\ p:3$ pos^b æqualium 18. & cum hoc est etiam tertia æquatio uera.

Ex hoc habentur tres æquationes capituli, cubi, rerum, & numeri, æqualium quadratis, ubi æquatio possibilis, cognoscitur autem hoc ex suis capitulis, earum igitur duæ ueræ sunt & æquales, ut dictum est, æquationibus capituli totidem quadratorum & rerum & cubi æqualium numero eidem, ut in exemplo dicto, tertia autem ueræ respondet alterius capituli, & est ficta, ideo æquatio capituli 1 $cu^b\ p:6\ quad^{tis}\ p:3$ pos^b.

pos^{bi} uera est æquatio per m: capituli, 1 cu^{bi} p: 3 rebus p: 18 æqualiū
6 quadratis. At ubi quadratorum numerus minor sit quàm ut possit
æquari cubo rebus & numero, in capitulo cubi quadratorū rerum æ
qualium numero, tunc una est æquatio uera nulla ficta, at in capitulo
quadratorum æqualium cubo rebus & numero, una ficta, & nulla ue
ra, uelut dicendo, 1 cub. p: 1 quad^{to} p: 2 rebus æquantur 16, rei uera
æstimatio est 2, & hæc est ficta æquatio cubi & duarum rerum & 16
æqualium 1 quad^{to}. Manifestū igitur est, capitula cubi, quadratorū,
rerum, æqualium numero: etiam cubi rerum & numeri, æqualiū qua
dratis inuicem sibi respondere.

Pariter capitulum cubi, æqualis quadratis, rebus, & numero, re
spondet capitulo, cubi, quadratorum, & numeri, æqualium rebus, 10
ideoq; ubi res admodū pauce sunt, est æquatio una ficta, æqualis ue
ræ correspondenti alterius capituli cubi æqualis totidem quadratis,
rebus & numero. Exemplū. Si cubus æqualis sit 2 quad^{tis} 1 pos^{oni} 6,
numero, res ualet 3, nec plus aut minus, quia si cubus & 2 quad^{ta} & 6
numerus, æquentur uni positioni, nulla potest æquatio uera esse, sed
ficta erit m: 3. quæ erat uera in alio capitulo. Quod si res tot sint, ut
capitulum cubi, quadratorum, numeri, æqualium rebus, possit habere
re æquationem ueram, tunc æquatio uera duplex erit, & una ficta,
correspondentes duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exem
plū. Si cubus & 3 quad^{ta} & 6 numerus, æquales sint 20 rebus, duæ
erunt æquationes ueræ, scilicet 3, & R: 11 m: 3, & una ficta, scili
cet R: 11 p: 3 m: Igitur æstimatio cubi, æqualis 3 qd^{tis}, 20 reb. 6 nu
mero, uera est, R: 11 p: 3, & duæ fictæ erunt, 3 m: & R: 11 m: 3 m:.

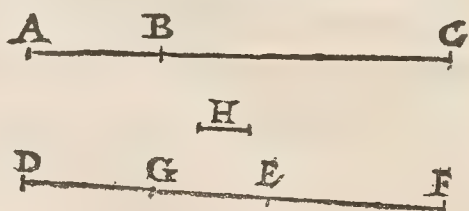
Eadem ratione capitula cubi & quadratorū æqualium rebus &
numero, & cubi ac numeri æqualiū qd^{tis} & rebus, sibi inuicē respon
dent. Vbi igitur capitulum cubi & numeri æqualium rebus & qdra
tis nō habet æquationem ueram, habebit unam tantum fictam, æqua
lem ueræ alterius capituli. Exemplum. 1 cubus p: 72, æquatur 6 qua
dratis p: 3 rebus, rei ficta æstimatio est, m: 3, & hæc est uera, unius
cubi & 6 quadratorum æqualium 3 rebus & 72, Et sicut capitulum
1 cu^{bi} p: 72 æqualium 6 qd^{tis} p: 3 rebus, caret uera æstimatione, sic ca
pitulū 1 cubi p: 6 quadratis æqualiū 3 rebus p: 72, caret ficta, at ubi
capitulum cubi & numeri æqualium quadratis & rebus habet ueram
æstimationem, habebit duplicem, & unam fictam, correspondentes
duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exemplū, cubus p: 4 æq
lis sit 3 qd^{tis} p: 5 rebus, tunc ueræ æstimationes sunt 4, uel R: 1 $\frac{1}{4}$ m:
 $\frac{1}{2}$, ficta uero est, R: 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ m: & hæc est uera æstimatio capituli cu
B 2 bi

bi & 3, quadratorum æqualiū 5 rebus & 4 numero, & reliquæ duæ, scilicet 4 & $1\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ sunt m: in eodem casu & fictæ.

12 Est etiam manifestum, quod si qd' qd' & res & numerus comparantur, regula septima in eis præcise locum habebit, sicut in quadrato rebus & numero, conferendo capitula capitulis, eadem ratio in reliquis deriuatiuis.

DEMONSTRATIO.

13 Et iam oportunum est, ut ostendamus hæc demonstratione, quod etiā in toto hoc libro facturi sumus, ut rebus tā admirabilibus, ultra experientiam, fidei ratio accedat. Sit igitur gratia exempli, A B cubus, cū B C numero æqualis D E quad^{ti} cum E F rebus, & sit H æstimatio uera, quia igitur ex supposito, A C æquatur D F, fiat D G æqlis A B, quia igitur D E superat A B, in G E, & B C est æqualis G F, ex cōmuni animi sententia, erit B C, maior F E in G E, & qlis excessus D E super A B, talis B C, super E F. Ponañ igitur H minus, & ficta æquatio, erit igitur A B & E F, m: sed D E, & B C, remanent p: qā igitur differentia A B & D E, est G E, & differentia B C & E F, est etiam G E, & tantū est detrachere A B ex D E, & E F ex B C, quantū addere eas tanq̃ m: sequit̃ quod posita æstimatione positionis, m: H, quod A B, cū D E æquatur B C cum E F, utrumq̃ enim aggregatum est residuū G E, igitur cubus cū quadratis, æquatur rebus & numero eodē modo, & rei æstimatio est m: H, quantum scilicet in alia æquatione fuit idem in alijs.



Sequitur etiam, quod aggregatum partium in uno, est æquale differentiae mutuae in reliquo, uelut si dicam, cubus & 10 æquantur 6 quadratis & 8 rebus, & æstimatio in hoc capitulo sit uera, erit in capitulo cubi & 6 quadratorū æqualium 8 rebus & 10 numero in ficta æstimatione, aggregatum ex cubo & 6 censibus, æquale differentiae cubi & 6 censuum in uera æstimatione, uel 10 & 8 rerum in eadem uera æstimatione, & tantum erit aggregatum 8 rerum & numeri in ficta æquatione.

De numero omnium capitulorum. Cap. II.



1 T capitula, quæ generaliter scire conuenit, usq̃ ad solidum extenduntur cubum, simplicia uero, quoniam unius sunt generis, in unum contraximus, quanquam ipsum usq̃ in infinitum extendatur. Quæ uero cum numero quadratum & positionem habent, tria sunt, & quamuis duas sortiantur

tur

tur æstimationes unum eorum, quia tamen simul illæ cōiunctæ sunt, tria tantum dicemus esse capitula, At uero cubi & rerum & numeri tria, uerum cum unum illorum duas habeat æquationes, in quatuor euadūt, totidem fiunt ex cubo quadratis & numero, iam igitur duodecim. At cubi quadratorum positionum ac numeri, septem, in eorū autem quatuor geminæ æquationes, quare undecim fient capitula omnia, igitur prima & generalia uiginti tria, horum primo prætermisso, quodlibet deriuatiua duo sibi iungit, alterum quadrati, alterū cubi ratione, erūt igitur generalia deriuatiua quadraginta quatuor. Post hæc duo alia sunt ignotæ quantitatis, alterum cum multiplicatur, alterum cum per se sumitur. est præterea unum generale mediorum. omnium igitur primorum notabilium numerus uiginti sex, deriuatiuorum quadragintaquatuor, omnium collectio septuaginta. Post hæc autem cum plura alia etiam singularia adiecimus, sed eorum maior uoluptas quæ necessitas, ea igitur non inter hæc numerabimus.

Horum autem necessitas sic colligitur, cum lineæ superficiebus, aut superficies lineis cognoscuntur, quadratorū, positionum, ac numeri capitula opportuna sunt, at si ex latere Tetragonico aut Solido, capitulum simplex, cum uero trium ignota duo supponuntur, ea quæ ad superficies ac lineas pertinent, quantitatis ignotæ, & rei, capitula exploranda erunt, atque ea simpliciter, si lineæ lineis comparantur, producta uero, cum superficiebus, at si lineis corpora comparanda, cubi rerum & numeri, si corporibus, superficies cubi quadratorum & numeri, sin autem superficiebus & corporū & linearum ratio sit quærenda, capitula cubi quadratorum positionum & numeri sunt utiliora. Porro in his omnibus ad numerū semper comparatio fiet. Hæc ratio præcipua est, quam per sepe omnibus in unoquoque horum uti necessariū sit, operæ precium tamen fuerit, singula hæc describere, deriuatiua quæ suis adiungere primitiuis. sunt autem hæc.

Capitula primitiua carentia deriuatiuis.

Numerus æqualis rebus, uel numerus æqualis quadratis, uel numerus æqualis cubis, uel numerus æqualis quadrato quadrato, uel numerus æqualis nomini seu relato primo, ac ita deinceps comparando numerum cuiuscunque denominationi.

Numerus & quadratus æqualia rebus, uel numerus & cubus æqualia rebus, uel numerus & cubus æqualia quadrato, uel numerus & quadratus æqualia rebus, uel numerus & quadrati quadratus æqualia quadrato, uel numerus & quadrato quadratus æqualia cubis, uel numerus & nomen primum æqualia rebus aut quadratis aut cubis & sic absque fine.

B

;

Numerus

- 3 Numerus & positio, & ignota quantitas.
 4 Numerus & qdratū positionis, & ignota quantitas, seu numerus
 & qd^{um} quantitatē ignotæ & positio, seu numerus cū qd^o positionis
 quantitatē ignotæ, seu numerus & productum ex positione in quan-
 titatem ignotam, cum altera earum, uel cum qdrato unius earum.

Capitula primitiua.

Capitula deriuatiua.

- | | |
|---|--|
| 1 Numerus æqualis qd ^o
& rebus. | 1 Numerus æqlis qd' qd' & qd'. |
| 2 Numerus & res æqualia
quadrato. | 2 Numerus æqualis cu' qd' & cub'. |
| 3 Numerus & qd' equalia
rebus. | 3 Numerus & qd' æquales qd' qd'. |
| 4 Numerus æqualis cubo
& rebus. | 4 Numerus & cub' æqlis cub' qd'. |
| 5 Numerus & res æqua-
lia cubis. | 5 Numerus & qd' qd' æqualia qd'. |
| 6 Numerus & cubus æql'
rebus æqtio prima. | 6 Numerus & cub' qd' æqlia cub'. |
| 7 Numerus & cub' eqlia
rebus eq ^o secunda. | 7 Numerus æqlis qd' & cub' qd'. |
| 8 Numerus eqlis qdrato
& cubo. | 8 Numerus æqlis cub' & cubo cubi. |
| 9 Numerus & qdratum
æqualia cubo. | 9 Numerus & qd' æqlia cub' qd'. |
| 10 Numerus & cub' eqlia
qdrato eq ^o prima. | 10 Numerus & cub' æqlia cub' cub'. |
| 11 Numerus & cub' eqlia
qdrato eq ^o secunda. | 11 Numerus & cub' qd' eql' qd' eq ^o pri ² . |
| 12 Numerus eqlis rebus
qdrato & cubo. | 12 Nu ^r & cub' cub' æqlia cub' eq ^o pri ² . |
| 13 Numerus & res eqlia
quadrato & cubo. | 13 Nu ^r & cub' qd' eqlia qd' eq ^o secunda. |
| 14 Numerus & res & qd'
equalia cubo. | 14 Nu ^r & cub' cub' eqlia cub' eq ^o secūda. |
| 15 Numerus & qd' eqlia
rebus & cub' eq ^o prima. | 15 Numerus eqlis qd' qd' & cub' qdrati. |
| 16 Numerus & qd' eqlia
rebus & cubo eq ^o secunda. | 16 Numerus eqlis cub' qd' & cub' cubi. |
| | 17 Numerus & qd' qd' eqlia cub' qdrati. |
| | 18 Numerus & cub' qd' eqlia cub' cubi. |
| | 19 Nu ^r & cub' qd' eqlia qd' qd' æq ^o pri ² . |
| | 20 Nu ^r & cub' cub' eqlia cub' qd' eq ^o pri ² . |
| | 21 Nu ^r & cub' qd' eql' qd' qd' eq ^o secūda. |
| | 22 Nu ^r & cub' cub' eql' cu' qd' eq ^o secūda. |
| | 23 Nu ^r eqlis qd' & qd' qd' & cub' qd'. |
| | 24 Nu ^r eqlis cub' & cub' qd' & cub' cu'. |
| | 25 Nu ^r & qd' eqlia qd' qd' & cub' qd'. |
| | 26 Nu ^r & cub' eqlia cub' qd' & cub' cu'. |
| | 27 Nu ^r & qd' & qd' qd' eqlia cub' qd'. |
| | 28 Nu ^r & cub' & cub' qd' eqlia cu' cub'. |
| | 29 Nu ^r & qd' qd' eql' qd' & cu' qd' eq ^o p ² . |
| | 30 Nu ^r & cu' qd' eql' cu' & cu' cu' eq ^o pri ² . |
| | 31 Nu ^r & qd' qd' eql' qd' & cu' qd' eq ^o sec. |
| | 32 Nu ^r & cu' qd' eql' cu' & cu' cu' eq ^o sec. |

- 17 Numerus & cu' eq̃lia 33 Nu' & cu' q̃d' eq̃l' q̃d' & q̃d' q̃d' xq̃° pri³
 rebus & q̃d' eq̃° prima. 34 Nu' & cu' cu' eq̃l' cu' & cu' q̃d' eq̃° pri².
 18 Numerus & cu' xq̃lia 35 Nu' & cu' q̃d' eq̃l' q̃d' & q̃d' q̃d' eq̃° sec.
 rebus & q̃d' xq̃° secūda. 36 Nu' & cu' cu' xq̃l' cu' & cu' q̃d' xq̃° sec.
 19 Numerus & res & cu' 37 Nu' & q̃d' & cu' q̃d' eq̃l' q̃d' q̃d' eq̃° pri²
 xq̃lia q̃d' xq̃° prima. 38 Nu' & cu' & cu' cu' eq̃l' cu' q̃d' xq̃° pri².
 20 Numer' & res & cu' 39 Nu' & q̃d' & cu' q̃d' eq̃l' q̃d' q̃d' eq̃° sec.
 eq̃les q̃d' xq̃° secūda. 40 Nu' & cu' & cu' cu' xq̃lia cu' q̃d' eq̃° sec.
 21 Numerus q̃d' & cu' 41 Nu' & q̃d' q̃d' & cu' q̃d' eq̃l' q̃d' eq̃° pri³
 xq̃lia rebus xq̃° prima. 42 Nu' & cu' q̃d' & cu' cu' eq̃l' cu' eq̃° pri².
 22 Numer' & q̃d' & cu' 43 Nu' & q̃d' q̃d' & cu' q̃d' eq̃l' q̃d' eq̃° sec.
 xq̃lia rebus xq̃° secūda. 44 Nu' & cu' q̃d' & cu' cu' xq̃l' cu' xq̃° sec.

De æquationibus capitulorum simplicium. Cap. III.



Stimatio rei, est quantitas, in qua ueritatē experimur pro-
 positorum in capitulo & quæstione. Exemplum est, cum
 quis dixit, feci ex 10 duas partes, & duxi earum singulas
 in se, & fuit productorum differentia 60. quia igitur ne-
 scimus quæ quantitas sit maior aut minor. Ponemus minorem esse rem
 ignotam, quam uocamus positionem, erit igitur pars maior residuū
 ad 10, scilicet 10 m: 1

positio	1 q̃dratum.
10 m: 1 pos ^{ne}	1 q̃d ^m p: 100 m: 20 pos ^{b2} .
1 q̃d ^m p: 20 pos ^{b2}	1 q̃dratum p: 100.
60 p: 20 positionibus æqualia 100.	
20 positiones æquales 40.	

positione, tunc seque-
 mur quod est propo-
 sitū, & ducemus par-
 tes in se, & fiet q̃dra-
 tū minoris 1 q̃dratū,
 & maioris 1 q̃dratū p: 100 m: 20 pos^{b2}, adde quod est m: alteri parti,
 fiet 1 q̃d^m p: 100 ex una parte, & 1 q̃d^m p: 20 pos^{b2}, horum differen-
 tia fuit 60 ex supposito, addemus igitur 60 minori parti, & tunc fient
 eq̃les 1 q̃d^m p: 100, & 1 q̃d^m p: 20 pos^{b2}, p: 60, abijciemus 1 q̃d^m & 60
 ex utraq; parte, remanebūt igitur 20 pos^{es} æq̃les 40, q̃a si ab æq̃libus
 eq̃lia auferant, quæ relinquunt sunt eq̃lia, diuidendo igitur 40, per 20
 numerum positionum, exhibit 2, æstimatio positionis, in hoc itaq; 2, ue-
 ritatem propositæ quæstionis experimur, nam si eius quadratū quod
 est 4, ex 64 q̃drato 8 residui 2 & 10 abijciatur, relinquetur 60 propo-
 situs Numerus. Est etiam uerum de 2, quod proponitur in capitulo,
 scilicet quod q̃dratum eius quod est 4. cum 100, æq̃tur quadrato po-
 sitionis, quod est iterū 4 & 20 pos^{b2}, quæ sunt 40 & 60 simul iunctis,
 nam

nam utroque modo colliguntur 104, dicemus igitur merito, propter duo, quod 2 est rei æstimatio, & cum recte operatus fueris, in æstimatione seu æquatione, utraque experientia succedit.

DEMONSTRATIO.

- 2 Vt uero rei ueritas apertius deprehendatur, atque cum ea ratio, scire enim est per demonstrationem, ut dicunt, intelligere, sint gratia Exempli, cubi tres æquales 24, & ponatur A C latus unius cubi, & C D alterius, & D B tertij, quia igitur cubi sunt æquales, inuicem, erunt & lineæ A C,  C D, D B æquales, cum igitur secundum numerum, secundum quem A C est in A B, qui est 3, diuiditur 24, & cuborum quantitas fiet ex 19^a quinti uel 17^a septimi elementorum, & 31^a. 11ⁱ eiusdem, cubus A C æqualis 8, igitur A C latus, erit 2, æstimatio rei, ex quo colligitur generalis regula.

REGULA.

- 3 Deprime propositas duas denominationes ad numerum, si numerus non adsit, æqualiter deducendo, cunctaque altera fuerit denominatio, altera numerus, diuide numerum per numerum denominationis, exiens est æstimatio denominationis, quæ denominatio si positio est, positionis habes æstimationem. si alia denominatio, sume latus seu radicem illius numeri pro denominationis qualitate, si quadratum, quadratum, si cubus, latus cubicum, si quadratum, radicem radicis, atque ita deinceps, & latus illud seu radix, est positionis uera æstimatio. Exemplum, cubi 20 æquantur 180 relatis primis, quia igitur non est hic numerus. Infimam denominationem cuborum, pones pro simplici numero, scilicet 20. & maiorem seu altiore relatorum, per cubos deprimes, & fient 180 quadrati, diuide igitur 20 numerum, per 180 numerum quadratorum, exit $\frac{1}{9}$ æstimatio quadrati. Verum nos querimus positionis æstimationem, non quadrati, sume igitur radicem quadratam $\frac{1}{9}$. & est $\frac{1}{3}$, pro uera æstimatione. Aliud Exemplum, 7 quadrati æquantur 21 cubi quadrati, deprime ad numerum æqualiter, fient 7 æqualia 21 quadrati, diuide 7 per 21. exit $\frac{1}{3}$, & restat $\frac{1}{3}$, quæ est latus quadrati, est rei æstimatio. Aliud. 2 cubi æquantur 20 quadrati, deductis cubis ad numerum, quadrati perueniunt ad positionem, igitur 20 positiones æquantur 2, diuide 2 per 20, exit $\frac{1}{10}$, & quia diuifisti cum numero positionum, erit positionis æstimatio $\frac{1}{10}$. Aliud. 20 æquantur 5 quadratis, diuide 20 per 5, exit 4, æstimatio quadrati, igitur rei æstimatio est 2.

- 4 Et ut omnibus etiam capitulis futuris satisfaciam, maioris denominationis numero reliquos omnes ac numerum diuides, maiorem intelligo

intelligo altiore, & cum minore denominatione deprimes, postmodū regulam capituli sequeris. Sint gratia exempli 4 cubi æquales 12 qdratis & 8 pos^b. minor denominatio est positio, maioris numerus est 4, diuides igitur omnia per 4, & habebis

$$\begin{array}{r|l} 4 \text{ cub.} & 12 \text{ qd}^{\text{ta}} \text{ p: } 8 \text{ pos}^{\text{b}} \\ \hline 4 & 3 \text{ pos}^{\text{es}} \text{ p: } 2. \end{array}$$

1 qdratum æquale 3 pos^b p: 2.

Ex his etiam patet, quod simplex positio, longe magis patet falsis positionibus, Nam & ad qdrata, & ad cubos, & reliquas extenditur denominationes, Ideoq; æstimationes habet in radicibus, quarum in falsa positione nullus omnino est usus. Quod uero pertinet ad numerum positionibus æqualem, adhuc utraq; falsa positione generalius est, ut in primo Exemplo patuit, nulla enim falsa positione licet uenari, quæ nam partes decem qdrata uariant, quorum differentia sit 60, ut ibi propositum est. Cor^m.

De subiectis æquationibus generalibus & singularibus. Cap. IIII.



Ingulares dicuntur æquationes, in quibus nullum capitulum perfecte potest absolui, & tales sunt numerus integer, uel fractus, latus etiam omne numeri, seu quadratum seu cubicum uel alterius generis, atq; ut ita dicam, omnis simplex quantitas, item constantes ex duabus radicibus omnes, quarum altera sit qdrata, uel R^xR^x. & generaliter radix par, unde quæ ex duobus constant nominibus, & apotome seu ut dicunt recisa tertij ac sexti generis, non apta sunt æquationi generali.

Omne etiam capitulum, quod ex numero qdrato, cubo, & positionibus constat, eas habet generales æquationes, quæ ex capitulo, ad quod deducuntur, deriuatæ sunt, addita uel detracta tertia quadratorum numeri parte, ut suo loco ostendetur. 2

Generales autem æstimationes, sunt, in capitulis qdrati æqualis rebus & numero, secundi generis, constans ex nominibus duobus, ut R^x 19 p: 3, capituli autem qdrati & rerum æqualium numero, secunda apotome, ut R^x 19 m: 3, capituli autem quadratorum & numeri æqualium rebus, apotome, & constans ex duobus nominibus primi generis, ut 3 p: R^x 2, & 3 m: R^x 2. Vbi aut primū genus dico, quartū etiam intelligo, sic & ubi secundum, etiam quintum, tam in apotome quàm ex duobus nominibus constante. 3

At unius radicis uniuersalis æquatio, deriuatiuis conuenit capitulis 4

tulis, seu cubica seu q̄drata, hisq̄ quorum principalibus quadratum aut cubus radice pro æquatione fuerat, uelut si q̄drato æquali rebus & numero æstimatione hæc conueniebat, R² 19 p: 3, capitulo cubi q̄drati æqualis cubis & numero sub eadem quantitate existentibus, æquatio erit, R² v: cubica R² 19 p: 3.

5 Et sicut radix quadrata, nulli præterq̄ numero iungi potest, ut æquationem efficiat generalem, sic è diuerso, cubica cubicæ iuncta, efficere potest, numero non potest. Cum igitur iungitur cubi æqualis rebus & numero, æquationem producit, non integram tamen, at detractæ inuicem, efficiunt æquationem capituli cubi & rerum æqualium numero, uelut R² cubica 4 p: R² cubica 2, est æquatio capituli, cubi æqualis rebus & numero, & R² cubica 4 m: R² cubica 2, est æquatio capituli cubi & rerum æqualium numero.

6 At capitulum cubi æqualis quadratis & numero, habet æquationem constantem ex tribus quantitatibus proportionalibus, quarum duæ extremæ sunt radices cubicæ, media est numerus, ut R² cubica 16 p: 2 p: R² cubica 4. sed capitulum cubi & quadratorum æqualium numero, habet similem in omnibus præcedenti æquationem, excepto quod numerus est m: uelut R² cubica 16 m: 2 p: R² cubica 4.

7 Illud etiam intelligendum est, radices simplices pro generalibus æquationibus haberi, ut tamen etiam simplicia sint capitula, uelut R² cubica inferuit capitulo numeri æqualis cubo, & q̄drata, numeri æqualis q̄drato, & relata, capitulo relati æqualis numero, & sicut hæ simplices compositis capitulis conuenire nequeunt, sic nec ullum compositum ex pluribus radicibus incommensurabilibus capitulo simplici potest conuenire.

Ostendit æstimationem capitulorum compositorum minorum, quæ sunt q̄dratorum, numeri, & rerum. Cap. V.

DEMONSTRATIO.

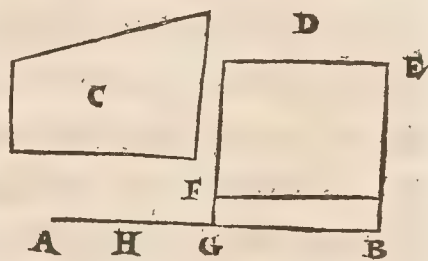


It quadratum FD & 6 res (gratia exempli) æquale 91, tunc faciam DB & DG cum fuerint productæ esse 3, dimidium scilicet 6, numeri rerum, & complebo quadratum DGB C, indeq̄ productis CG & CB quadratum AFEC, prout in quarta secundi elementorū fit, quia igitur DB ducta in AB ex diffinitione secundi elementorum producit AD super finem, & ex numero quolibet in rei æstimationem producit æstimatione illarum rerum, uelut si res est 4, & sint quinque res, erunt quinque res 20, & tantum producit

citur ex 4 æstimatione rei in 5 numerum rerū,
ut ostendimus in capitulo tertio, igitur cum
B D sit 3, & A B æstimatio rei, erit superficies
A D tribus rebus æqualis, seu æstimatio trium
rerum, at superficies D E æqualis est A D, ex
4³ primi elementorum, igitur & ipsa est æsti-
matio trium aliarum rerum, duæ igitur super-
ficies, A D & D E, sunt æquales 6 rebus, quæ
re ipse cum quadrato F D sunt 91, at quadra-
tum, C D est 9, quia B D est 3, igitur A C quadratum est 100, quare la-
tus eius A C est 10, cum igitur B C sit 3, detracta B C ex A C, relinquit
A B latus D F 7.

ALIA DEMONSTRATIO.

Sit modo A B numerus rerum quarundam, æqualium c numero
& quadrato D, & faciam quadratum B G dimidij A B, quod sit G E,
à quo auferam c numerum, ut E F superficies æqualis sit numero c, &
ponam latus quadratū, F B superficiem, quod
sit G H, dico lineas B H & H A esse utraq; late-
ra quadrati D, unde sequitur duas fore ue-
ras æstimationes huius capituli, quarum ag-
gregatum est æquale numero rerum, uideli-
cet A B, constat enim quod rectangulum ex
A H in H B, una cum qdrato H G est æquale
quadrato B G, ex 5² 2ⁱ elementorum. quadratum autem H G æquale
fuit F B superficiem, rectangulum igitur ex A H in H B, æquale est E F,
quare & c numero, quod autem fit ex A B in H B, ex 3² 2ⁱ elementorū,
æquale est quadrato H B & rectangulo A H in H B, igitur quod fit ex
numero rerum A B in æstimationem rei quæ est H B, æquale est nume-
ro c, & quadrato H B, quod est probandum. Et similiter eadem ratio-
ne rectangulum ex A B in A H, æquale est quadrato A H, & ductui A H
in H B, sed ex A H in H B, ut probatum est, fit c numerus, igitur rectan-
gulum ex A B in A H, scilicet ex numero rerum in rerum æstimationē,
æquatur quadrato rei & numero proposito.



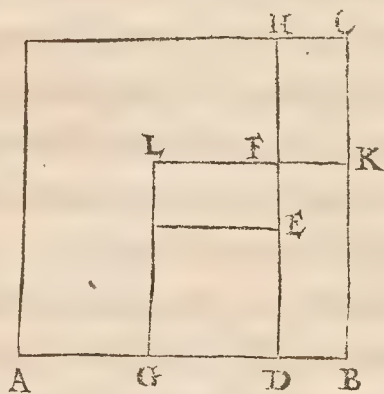
Ex hoc patet, quod illi falluntur qui dicunt (quod si B H, gratia
exempli) sit æstimatio rei, & G F 3, quod rectangulum ex B H in G F
erit 3 G H seu triplum G H, hoc enim esse non potest, scilicet quod super-
ficies contineat lineam aliquam, neq; numero, nec alia proportionē,
cum infinite lineæ possint esse in superficie, quantitas enim continua
nullum sue diuisionis recipit terminum, sed ueritas est, quod si G F cō-
tineat tres unitates (gratia exempli) id est partes tres lineæ B H, diuise

in tot partes, quot unitates sunt in numero quem dicitur continere, ueluti quod BH ponatur 12 , erit GF 3 , ubi GF sit quarta pars BH , & tunc uerum est, quod ex BH in GF fit superficies continens 36 superficies quadratas, quarum uniuscuiusque tetragonum latus est unitas, id est una ex partibus illis, secundum quas BH est diuisa in 12 , & GF in 3 , hoc autem tam in rationalibus, quam in irrationalibus pulchre ostendit Plato in Memnone.

Nec admireris, hanc secundam demonstrationem, aliter quam à Mahumete, explicatam, nam ille immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius, nec nisi unam partem, eamque pluribus, unde nos facilitati & breuitati consulentes, tum ut utriusque æstimationi una demonstratione satisfaceremus, hac utimur.

ALIA DEMONSTRATIO.

- 3 Sit modo quadratum AC in tertia figura, æquale 6 rebus & 16 numero, & ponatur AD numerus rerum, scilicet 6 , igitur superficies AH est 6 positiones, quare DC residuum erit præcise 16 , diuidatur AD per æqualia in G , & fiant quadrata GB & GD , quæ sint GK & GE . Quia igitur BC æqualis est BA , & BK æqualis BG , erit KC æqualis GA , quare etiam GD & FL , & quia DE & DG sunt æquales, item DF & BG , erit FE æqualis DB , quare etiam æqualis FK , duæ igitur lineæ FK & FH , æquales sunt FL & FE , & anguli ADF recti, igitur FC superficies æqualis est LE , sed FC cum FB fuit 16 , igitur LE cum FB fuit 16 , addito quadrato GE quod est 9 , nam GD fuit 3 , erit GK quadratum 25 , igitur latus GB 5 , addita igitur GA , quæ est 3 , fiet AB tota 8 , rei æstimatio.



- 4 Secundum hæc formabimus regulas tres, pro quarum memoria subiungemus Carmen hoc,

Querna, da bis. Nuquer, admi. Requana, Minue dami.

REGULA I.

Est autem unicuique horum capitulorum commune, ut dimidium numeri rerum in se ducatur. Quando igitur quadratum æquatur rebus & numero, quod significatur per Querna siue primam tantum intelligas literam seu adnumeres sequentes à prima uocali consonantes, ut Querna, quadratum æquale rebus & numero significet, & Nuquer, Numerum quadrato ac rebus æqualem, & Requana, res quadrato & numero æquales. In hoc Querna igitur, seu capitulo quadrati æqualis

lis rebus & numero, addes quadrato dimidij rerum numerum æquationis, & totius accipe radicem quadratam, cui adde dimidium numeri rerum, & aggregatum est rei æstimatio. Exemplum. sit 1 qd^m æquale 10 rebus p: 144, duc 5 in se, fit 25 quadratum dimidij rerum, adde 144 fit 169, cuius R^z est 13, huic adde 5 dimidium numeri rerum, fit 18, æstimatio rei. Rursus sit 1 qd^m æquale $\frac{2}{3}$ rei p: 11, duc $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum in se, fit $\frac{1}{9}$, adde ei 11, fit $11\frac{1}{9}$, accipe R^z quæ est $3\frac{1}{3}$, cui adde $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum, fit $3\frac{2}{3}$, rei æstimatio. Rursus, sit 1 qd^m æquale 10 rebus p: 6, duc 5 in se dimidium numeri rerum, fit 25, adde ei 6 fit 31, huius R^z adde 5, dimidium numeri rerum erit rei æstimatio, R^z 31 p: 5. Rursus sit 1 qd^m æquale rebus R^z 12 p: 22, duc R^z 3 in se fit 3, quadratum dimidij numeri rerum, adde ei 22 fit 25, huius R^z est 5, cui adde R^z 3, quod est dimidium numeri rerum, fiet rei æstimatio 5 p: R^z 3, & si in hoc casu numerus fuisset 20, esset rei æstimatio R^z 23 p: R^z 3, & si fuisset numerus 9, esset æstimatio rei R^z 12 p: R^z 3, quod est dicere, R^z 27, & si fuisset 1 qdratum æqle rebus R^z 12 p: R^z cub. 10 numeri, duc ut prius R^z 3, dimidium numeri rerum in se, fit 3. adde ei R^z cub. 10, fit 3 p: R^z cub. 10, huius accipe radicem, quæ est R^z v: 3 p: R^z cub. 10, cui adde dimidium numeri rerum & fiet æstimatio rei R^z 3 p: R^z v: 3 p: R^z cub. 10. & hac uarietate exemplorum hic usi sumus, ut in reliquis idem fieri posse intelligas, tum etiam eadem in duabus sequentibus regulis experire, quandoquidem nos duplici exemplo contenti erimus. Manifestum est igitur, quod hic bis addimus, scilicet numerum qdrato dimidij rerum, & dimidiū rerum radici aggregati, & hoc est, quod in carmine diximus, da, bis, quasi, bis iunge.

REGULA II.

Si autem numerus quadrato & rebus æqualis sit, qdrato dimidij numeri rerum adijcies numerum æquationis, & totius aggregati accipe radicem, à qua minue dimidium numeri rerum, & residuum est rei æstimatio. Exemplum, 144, æquatur 10 rebus & 1 qd^o, duc 5, dimidium 10 numeri rerum, in se, fit 25, huic adde 144 fit 169, huius R^z est 13, à qua abijce 5, dimidium numeri rerum, relinquetur rei æstimatio 8. Rursus, sit 6 æqualis 10 rebus p: 1 qdrato, ducto 5 dimidio rerum in se fit 25, adde 6 fit 31, ex huius radice abijce 5, dimidium numeri rerum, fit R^z 31 m: 5, æquatio.

Ex hoc patet, quod hæc regula à præcedenti solum differt, quòd Cor^m. minuat dimidium numeri rerum. Ab aggregati radice, ubi illa iungebat, & hoc est, quod in carmine diximus, Ad, mi, quasi, adde primo,

C 3 deinde

deinde minue, scilicet, adde numerum quadrato, & minue dimidium numeri rerum postmodum ab aggregati radice.

Cor^m. Ex quo patet, quod differentia æstimationis quadrati, æqualis rebus & numero, & numeri, æqualis rebus & quadrato, est numerus rerum ad unguem, ubi in eisdem rebus & numeris statuantur, uelut æstimationis quadrati æqualis 10 rebus p: 144 est 18, & æstimationis 144 æqualis quadrato & 10 rebus est 8, & differentia 18 & 8 est 10.

REGULA III.

6 Si uero res æquales sint quadratis & numero, ducto, ut prius, dimidio numeri rerum in se, & ab eo detracto numero æquationis, radicem residui minue ex dimidio numeri rerum, aut adde, & tam aggregatum, quàm residuum est rei æstimationis. Exemplum. 1 quadratum p: 16, æquatur 10 rebus, ducto 5 in se fit 25, ut prius, deinde minue 16 ex 25 relinquitur 9, cuius $\sqrt{x}$ quæ est 3, addita uel detracta à 5 dimidio numeri rerum, ostendit rei æstimationes, 8 addita, & 2 detracta, si igitur 10 res sumantur quæ sint 2, erunt 20 & tantum erit quadratum 2 cum 16, item si sumantur 10 res quæ sint 8, erunt 80, & tantum est quadratum 8, addito ei 16. Rursus si dicam, 10 res, æquantur 1 quadrato p: 6, ducto 5 dimidio numeri rerum in se, fit 25, detracto autem 6 relinquitur 19, cuius $\sqrt{x}$ addita uel detracta ex 5, ostendit rei æstimationes, maiorem quidem 5 p: $\sqrt{x}$ 19, minorem uero 5 m: $\sqrt{x}$ 19.

Not^m. Quod si detractio ipsa numeri, à quadrato dimidij numeri rerum fieri nequit, questio ipsa est falsa, nec esse potest quod proponitur, semper autem pro regula uniuersali in hoc tractatu toto est obseruandum, quod cum ea quæ præcipiuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit, nec esse potuit. Nunc autem subiungemus aliquas questiones, duas ex Mahumete, reliquas nostras, ex omnibus his, quæ nec multiplici positione, nec particulari utuntur regula, difficillimas.

QUESTIO I.

Quest. Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atq; insuper 4, residuum autem in se duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12. Pones itaq; quadratum numeri incogniti quem quæris, esse 1 rem, abijce $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ eius & insuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m: 4, duc in se fit $\frac{25}{144}$ qd^{ti} p: 16 m: $3\frac{1}{3}$ rebus, & hoc est æquale uni rei, & 12, abijce similia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}$ qd^{ti} p: 4 m: $3\frac{1}{3}$ rebus, redde quod est minus, alteri parti, pro uniuersali regula, erunt res $4\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}$ qdrati p: 4, quare per quartam regulam tertij capituli, deuidi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum qdrati, & fiet res $24\frac{24}{25}$ æquales $23\frac{1}{25}$ p: qdrato, quare per tertiam regulam, duces

ces $12\frac{12}{25}$ in se, fiet $155\frac{469}{625}$. minue $23\frac{1}{25}$ fiet $132\frac{544}{625}$, huius $\sqrt{}$ est $11\frac{13}{25}$, quam adde ad $12\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet æstimatio rei quæstata 24, scilicet quadrati huius radix, est numerus ille qui quæritur. Ex hoc docemur per principalia capitula uitare deriuatiua, nam in positione rei pro primo numero, fuisset quadratum eius operationis fundamentum, & peruenisses ad $1 \text{ qd} \text{ qd}^m p: 23\frac{1}{25}$ æqualia $24\frac{24}{25} \text{ qd}^o$, quare hæc sit tibi pro exemplo, nunc sequamur secundam illius.

QVÆSTIO II.

Duo duces diuiserunt militibus suis aureos 48 singuli, Porro Quest.
 unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites ha- secūda
 buit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus singulis militibus
 daret, quæritur quot unicuique milites fuerint? Pone numerum militum
 minorem 1 rem, maior erit 1 pos^o p: 2, quia igitur summa distribuenda
 æqualis fuit, manifestum est, quod quantitates erunt proportionem
 similes, est aut 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1 pos^{em}
 p: 2, fit $\frac{1}{12}$ pos^{is} p: $\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorum hominum,
 fit $\frac{1}{12} \text{ qd}^ti$ p: $\frac{1}{6}$ pos^{is}, duc uero omnia ad 1 qd^m, fiet 1 qd^m p: 2
 pos^b, æqualia 24, accipe dimidium numeri rerum & est 1, duc in se,
 fit 1, adde ad 24, fit 25, ab huius $\sqrt{}$ minue 1 dimidium numeri rerum,
 fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei
 12 pro singulo, alijs 8 pro singulo. multiplicatio autem illa, quando
 reducitur quadrati pars ad integrum fit per excessum hominum, scilicet
 12 per 2. Et causa in hoc est, quod proportio differentie secundæ ad
 primam, est ut aggregati quod diuidi debet ad productum ex numero
 hominum inuicem, uelut proportio 48 ad 24, productum ex 4 in 6, est
 uelut 4 differentie aureorum ad 2 differentiam hominum. & per hanc
 docuit modum operandi in quæstionibus proportionum, sed magis præcipue
 quando uolumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus
 perabsurdum esset intelligere medium hominem, nedum quantitatem
 aliquam irrationalem uel radicem.

QVÆSTIO III.

Nunc autem proponamus quæstiones nostras, quarum prima est Quest.
 similis præcedenti. Duæ societates hominum, quarum una continebat
 3 homines plusque altera, diuiserunt æquales aureorum numeros, qui
 tamen erant 93 plus aggregato hominum, in ambabus societatibus
 existentium, & pro singulis hominibus societatis minoris, contigerunt
 aurei 6 plus, quam hominibus singulis maioris societatis. Pones
 numerum primæ societatis rem unam, habebit igitur secunda societas
 rem & 3 p: quare summa aureorum, quæ est 93 p: utraq; societate, est
 96 p:

96 p: duabus rebus, proportio aut excessus aureorū 6 qui contingunt societati minori, ad excessum hominum, scilicet ad 3, est ut summe aureorū, ad productum ex numero hominum primæ societatis, in numerum hominū secundæ societatis, proportio autem 6 ad 3, dupla est, igitur proportio 2 pos^{um} p: 96 ad 1 qd^m p: 3 pos^b productum ex 1 pos^{ne} in 1 pos^{em} p: 3, est dupla, igitur dimidium 2 pos^{um} p: 96, quod est v: pos^o p: 48, æquale est, 1 qd^{io} p: 3 pos^b, abiecta itaq; 1 pos^{ne} ex utraq; parte, fiet 1 qd^m p: 2 pos^b æqle 48, ducito dimidium 2 in se fit 1, nam dimidiū 2 est 1, huic adde 48, fit 49, huius radix est 7, à qua minue 1 dimidium numeri pos^{um}, habebis æstimationem pos^{is}, & numerum primæ societatis 6, ideo numerus hominum secundæ societatis, est 3, p: scilicet, horum si fiat collectio, addanturq; insuper 93, fiet numerus aureorum 108, primis igitur aurei 18, secundis 12, per capita cōtigere. Aliter & facilius expetis in operationibus positio fiat ut prius, eritq; summa aureorum 2 pos^o p: 96, diuide per positionē & positionem p: 3, habebis $\frac{2 \text{ pos. p: } 96}{1 \text{ pos.}}$ æqualem 6 p: $\frac{2 \text{ pos. p: } 96}{1 \text{ pos. p: } 3}$, igitur detracto $\frac{2 \text{ pos. p: } 96}{1 \text{ pos. p: } 3}$ ex $\frac{2 \text{ pos. p: } 96}{1 \text{ pos.}}$, relinquitur 6, at ex tali detractōne fit $\frac{6 \text{ pos. p: } 288}{1 \text{ quad. p: } 3 \text{ pos.}}$ igitur hoc est æqle 6, diuisis igitur 6 pos^b p: 288. per 6, exibit 1 qd^m p: 3 pos^b, nam si diuiso 10 per 2 exit 5, diuiso 10 per 5 exibit 2, igitur diuisis 6 pos. p: 288 per 6, exit 1 positio p: 48, & hæc æqualia sunt 1 quadrato p: 3 positionibus, quare ut prius, res ualet 6.

QVÆSTIO IIII.

Quest. quarta. Est numerus, cui si addantur duæ radices, aggregato uero iterum addantur duæ radices ipsius aggregati, fiet totum 10, tunc dices, 10 equalis est secundo numero & duabus eius radicibus, ponemus igitur numerum aggregatū secundum, 1 qd^m, & hic, cū duabus radicibus, equalis est 10, igit rei estimatio per secundam regulā, est R 11 m: 1. igitur abijce duplum huius ex 10, relinquetur aggregatū 12 m: R 44, hoc autem ex supposito constat ex qdrato & duabus radicibus, igitur 1 qd^m p: 2 pos^b æquatur 12 m: R 44, ducito 1, dimidium numeri rerum in se, fit 1, adde ei numerum fit 13 m: R 44, accipe radicem, & ex ea minue 1 dimidium numeri rerum, habebis R v: 13 m: R 44 m: 1, hanc igitur duplicatam, si detraxeris ex aggregato, relinquetur numerus primus propositus, 14 m: R 44 m: R v: 52 m: R 704, & ita posses

posses regrediendo quantumlibet procedere, ab ultimo semper inchoando termino. Prolixior autem ero hic in exemplis, quoniam hæc capitula mercaturæ ma-

14 m: R 44 m: R V: 52 m: R 704	
duc radices eius R V: 52 m: R 704 m: 2	
aggregatum 12 m: R 44	
duc radices huius R 44 m: 2	
aggregatum 10	

xime conueniunt, tum quia tyrones in his introducuntur, uelut & paruos pueros solent magistri diligentius minuta quæq; docere, tum uero quòd eadem in reliquis postmodum fabricare possumus.

QVÆSTIO. V.

Inuenias numerum, à quo detracta R cubica, & residuo addita sua Quest.
 quadrata radice, perficiatur primus numerus. Pones itaq; residuum il quinta.
 lud à quo detraxisti radicem cubicam esse 1 qdratum, addemus itaq;
 ei radicem quadratam & fiet 1 qdratum p: 1 pos^{ne}, & hoc æquale est
 1 cubo, nam ex eo quod addito ad 1 qdratum tantum fit quantum
 erat prius, igitur quod additur æquale est ei quod minuitur, minui-
 tur autem R cubica totius quantitatis, igitur pos^o est radix cubica ag-
 gregati, quare aggregatum est cubus, & hic equalis est 1 qd^{to} p: 1 co:
 deprime per 1 co: habebis 1 qd^m æquale 1 pos. cubus R 5 p: 2
 p: 1, positio igitur est R: 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, at numerus qd^m 1 $\frac{1}{2}$ p: R 1 $\frac{1}{4}$
 primus fuit cubus positionis, igitur primus nu pos. R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$
 merus est R 5 p: 2.

QVÆSTIO VI.

Quidam ter iuit ad nundinas, in primo itinere retulit duplum ei Quest.
 us quod attulerat, in secundo cum detulisset tale duplum secum, re- sexta.
 diit cum eisdem pecunijs, & radice earum & duobus aureis plus, hoc
 totum autem seruauit, rediitq; cum eo ad nundinas tertio, & superlu-
 cratus est tantum, quantum esset illud quod produceretur ex pecunijs
 quas secū attulerat in se ductis, ac etiā quatuor aureos plus, reuersus
 est autem cum 310 aureis, quæro igitur, quantum attulit secum pecu-
 niarum, in primo itinere? Dices retulit aureos 310 & hoc fuit æquale
 pecunijs secundi itineris & quadrato earum & 4 p: igitur pecuniæ
 quas attulit secum in 3^o itinere, qdratum earum æquantur 306 au-
 reis, abiecto cōmuniter numero 4, ponemus igitur pecunias quas se-
 cum attulit 1 pos^{em}, & habebimus 1 qd^m p: 1 pos^{ne} æquale 306, igitur
 ex secunda regula, res ualet R 306 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, quod est dicere 17 & tot
 aureos detulit secum tertio itinere, & tot habuerat in secundo itinere
 quos seruauerat, dictum est autem, quòd in secundo itinere lucratus
 est radicem eorum quos attulerat & 2 p: & retulit 17, igitur si lucra-
 tus fuisset radicem tantum, retulisset 15, igitur positis pecunijs quas

D

secum

HIERONYMI CARDANI

secum attulit 1 qdratum, habebimus 1 qd^m p: 1 pos: æqualia 15, igitur ex secunda regula, res ualet R₂ 15 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & hoc est quod lucratus est in secundo itinere, & cum hoc etiam lucratus est aureos 2, lucrum igitur totum fuit eius itineris R₂ 15 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, ipse autem retulit domum aureos 17, igitur iuit cum aureis 15 $\frac{1}{2}$ m: R₂ 15 $\frac{1}{4}$, hæ pecunie sunt quas in primo itinere seruauerat, & fuerant duplū eius quod attulerat, primo igitur itinere attulit ad nundinas dimidium 15 $\frac{1}{2}$ m: R₂ 15 $\frac{1}{4}$ aureorum, quod est 7 $\frac{3}{4}$ m: R₂ 3 $\frac{13}{16}$ aureorum.

QVÆSTIO VII.

Quæst. Quidam rex proconsuli ducenti exercitum aureos misit 128000, septim² ut 7000 equitum & 7000 peditum cōduceret, ea erat stipendiū ratio, ut pro singulis 100 aureis, semper 18 pedites plusq̃ equites conduce-
ret, uenit tribunus quidam militum ad proconsulem cum 1700 peditibus & 200 equitibus, quæritur stipendiū ratio. Hæc tertiæ quæstioni affinis est, considera quod 128000, sunt 1280 centena, quia dictū est quod pro singulis cētum aureis differentia numeri peditum à numero equitum sit 18, diuide igitur 1280 in duas partes, quarum una ducta per unam quantitātē producat 7000, & similiter reliqua ducta p̃ eandem quantitātē p: 18, producat etiam 7000, igitur posita quantitate equitum pro re, erit quantitas peditū res & 18 p: diuisis igitur 7000 per harum singulas, prouenient aggregata 1280, nam si ex partibus 1280 ductis in rē, & rem p: 18, fiunt 7000 & 7000, igitur diuisis 7000 per rem, & 7000 per rem p: 18, exeuntia iuncta facient 1280, ex talium igitur diuisione aggregantur $\frac{\text{pos. } 14000 \text{ p: } 126000}{1 \text{ quad. p: } 18 \text{ pos.}}$ & hoc cum sit æquale 1280, igitur diuiso, numeratore per 1280, exit 1 qd^m p: 18 pos. facta igitur tali diuisione, prodit 10 $\frac{15}{16}$ pos^b p: 98 $\frac{7}{16}$, hocq̃ est æquale 1 qdrato p: 18 pos^b, igitur 1 qd. p: 7 $\frac{1}{16}$ pos^b æquatur 98 $\frac{7}{16}$, igitur res ualet R₂ 110 $\frac{929}{1024}$ m: 3 $\frac{17}{32}$, sed R₂ 110 $\frac{929}{1024}$ est 10 $\frac{17}{32}$, igitur deductis 3 $\frac{17}{32}$, relinquetur rei æstimatio 7, & tot equites 100 aureis cōducet, & pedites 25, igitur pro 1700 peditibus stipendium debuit esse 6800 aurei, & pro 200 equitibus aurei 2857 $\frac{1}{7}$.

$\frac{7000}{1 \text{ pos.}}$	$\frac{7000}{1 \text{ pos. p: } 18}$
pos. 14000	p: 126000
1 quad. p: 18 pos.	
pos. 14000	p: 126000
1280	
pos. 10 $\frac{15}{16}$	p: 98 $\frac{7}{16}$
1 quad. p: 18 pos.	
1 qd. p: 7 $\frac{1}{16}$	position:
æqualia 98 $\frac{7}{16}$	

QVÆSTIO VIII.

Quæst. Fac de 20, tres quantitates proportionales, quarum secunda equalis sit radicibus primæ & tertiæ simul iunctis, pone secundam esse positionem, reliquum erit 20 m: 1 pos^{ne}, quia igitur ex hoc facere oportet partes

partes duas, inter quas positio cadat proportionalis, erit ex 16^a 6ⁱ elementorū, ut ex una in aliam fiat q̄dratū pos^{is}, quare per 5^{am} 2ⁱ elementorum, seu ex regulis sexti libri, ducemus dimidium 20 m: 1 pos^{ne} in se, & fiet 100 m: 10 pos^b p: $\frac{1}{4}$ q̄d^{ti}, à quo auferemus quadratum positionis, & fiet 100 m: 10 pos^b m: $\frac{3}{4}$ q̄d^{ti}, huius radicem adde, & minue à medietate 20 p: 1 pos^{ne}, & habebis partes quas uides, ut igitur iungas radices

uniuersales harū, fac ut in 3^o libro te docui, iunge primo quantitates & habebis 20 m: 1 pos^{ne}, deinde multiplica quantitates ipsas inuicē, & iunge cum aggregato quantita-

$$\begin{array}{l} 10\text{ m: } \frac{1}{2} \text{ pos. p: } \Re \vee: 100\text{ m: } 10\text{ pos. m: } \frac{3}{4} \text{ q̄d.} \\ 10\text{ m: } \frac{1}{2} \text{ pos. m: } \Re \vee: 100\text{ m: } 10\text{ pos. m: } \frac{3}{4} \text{ q̄d.} \end{array}$$

20 m: 1 pos. aggregatum quan.

$$100\text{ m: } 10\text{ pos. p: } \frac{1}{4} \text{ quad. m: } 100\text{ p: } 10\text{ pos. p: } \frac{3}{4} \text{ quad. productum quan.}$$

æquiualens 1 quad.

producti radix 1 pos.

duplum radices 2 pos.

aggregatum ex quantitatibus & producto 20 p: 1 pos. cuius radix est æqualis positioni.

tum earum duplum, & fit totum 20 p: 1 pos^{ne}, huius radix æquatur 1 posⁿⁱ, igitur 1 q̄d^m æquatur 20 p: 1 pos^{ne}, quare per primam regulam ducemus $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum in se, & fit $\frac{1}{4}$, adde ad 20, fit $20\frac{1}{4}$, accipe radicem quæ est $4\frac{1}{2}$, & ei adde $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum fit 5, rei æstimatio, quantitas scilicet media, quare faciemus ex residuo ad 20, duas partes inter quas cadat 5, & erunt alia positione instaurata, uel per regulas sexti libri, $7\frac{1}{2}\text{ p: } \Re \vee: 3\frac{1}{4}$ & $7\frac{1}{2}\text{ m: } \Re \vee: 3\frac{1}{4}$, harum radices simul iunctæ sunt 5.

QUESTIO. IX.

Fac de 10 duas partes, quarum maior, detractis duabus suis radicibus, æqualis sit minori, additis duabus suis radicibus, constat igitur quòd differentia maioris & minoris est, duæ radices maioris, & duæ minoris, ponatur igitur differentia hæc radix 4 pos^{um}, & ponatur pars una 5 p: $\Re \vee: 1\text{ pos}^{\text{is}}$, & alia 5 m: $\Re \vee: 1\text{ pos}^{\text{is}}$, & sumatur aggregatum, radicum harum partium, & est ex libro quarto, & uniuersalissima 10 p: $\Re \vee: 100\text{ m: } 4\text{ pos}^{\text{b}}$, & hoc æquatur duplicatum & 4 pos^{um}, quare dimidium dimidio scilicet, & 1 pos^{is}, huic & ultimi, quare quadratū quadrato, scilicet 1 pos^o æquabitur 10 p: $\Re \vee: 100\text{ m: } 4\text{ pos}^{\text{b}}$ igitur 1 pos. m: 10 æquatur & $\Re \vee: 100\text{ m: } 4\text{ pos}^{\text{b}}$, quare q̄drata quadratis, quæ sunt, 1 q̄dratum p: 100 m: 20 pos^b, & 100 m: 4 pos. igitur 1 q̄dratum est æquale 16 pos^b, igitur pos^o æqualis 16, & nos uoluimus differentiā partium esse & 4 pos^{um}, igitur differentia partium

D 2 fuit

fuit R^2 : 64, quæ est 8, & sic effugisti $\tilde{q}d' \tilde{q}d^{ti}$, ponendo R^2 positionum.

QVÆSTIO X.

Quæst. Fuerunt homines in tribus societatibus, & numeri illorum pro-
decima portionales, ductoq; numero secundæ societatis, in numerum tertiæ,
confurgit aggregatum omnium, cum cubo numeri primæ. Debes in
hoc considerare, quod perabsurdum est, ut tales numeri sint irratio-
nales, aut fracti, nam non conuenit ponere hominis partem, uide igitur
in qua proportionem quadratū dimidij producti ex secunda in ter-
tiam superat aggregatum omnium in numero aliquo $\tilde{q}drato$, & inue-
nies quod in dupla, capiendo, 1, 2, 4. productum ex dimidio 8, qui
fit ex 2 in 4, & est 4 in se, excedit 7 aggregatum in 9 numero $\tilde{q}drato$,
& hoc uenaberis ex alia positione simplici. Pones igitur totidem res
pro his numeris, scilicet 1 pos^o, 2 pos^{es}, 4 pos^{es}, harum aggregatū
est 7 pos^{es}, adde his cubum 1 pos^{is}, & fiet 1 cubus p: 7 pos^b, & hoc
æquatur 8 $\tilde{q}dratis$, producto secundæ in tertiam, deprime partes per
pos^{es}, fit 1 $\tilde{q}d^m$ p: 7 æqle 8 pos^b, quæ
re per tertiam regulam, duc 4 dimidiū
numeri pos^{um} in se, fit 16, abijce 7 nu-
merum, relinquitur 9, huius R^2 addita uel detracta à 4 dimidio nu-
meri rerum, ostendit 7, & 1 æstimationes rei. sed quia 1 non est nume-
rus societatis, ideo dicemus quod res fuit 7, & hic est numerus homi-
num primæ societatis, secūda igitur habebit homines quatuordecim,
tertia 28, constat autem quod cubus, 7 cum aggregato numerorum
est 392, & tantum producit ex 14 secundo numero in 28 tertium.

De modis inueniendi capitula noua. Cap. VI.



1 Vm uero diligenter considerassem in his, uisum est mihi,
ut etiam ultra transgredi liceret, itaq; exemplo deriuatis-
uorum, quæ iam inuenta fuerant, $\tilde{q}d' \tilde{q}drati$ & $\tilde{q}d^{ti}$ æqua-
lium numero, tum etiam cub' $\tilde{q}drati$ & cubi æqualium nu-
mero, ac reliquorum quatuor, capitulum constituerem $\tilde{q}d' \tilde{q}d' \tilde{q}d^{ti}$, &
 $\tilde{q}d' \tilde{q}d^{ti}$ & numeri, inuicem æqualium, indeq; æstimatio rei $R^2 R^2$ est,
æstimationis principalium eis correspondentium, uelut si 1 $\tilde{q}dratum$
p: 1 pos^{ne} est æqualis 12, & æstimatio rei est 3, si 1 $\tilde{q}d' \tilde{q}d' \tilde{q}d^{um}$ p: 1
 $\tilde{q}d' \tilde{q}d^o$ æquantur 12, æstimatio rei erit $R^2 R^2$ 3, indeq; ad excogitanda
reliqua deriuatiua animum appulimus.

2 Mox uero ad alia me transtuli, uisumq; oportunum, ut æquatio-
num naturam spectarē, cumq; & primi coniuncti (sic enim binomiū)
& apo-

& apotomæ primæ (sic enim recisum uocamus) originem intuerer, uisum est, ut in his duæ essent diuersorum generum quantitates, numerus, & irrationalis pars, seu radix, porro cum ad q̄dratum deducitur, numerus quidem fit ex quadratis partium in se, radix ex ductu unius partis in alteram bis, cubus uero constituitur in parte irrationali, ex triplo quadrati numeri, cum quadrato radicis in radicem. Igitur proportio partis irrationalis in cubo, ad partem irrationalem in q̄drato, est uelut tripli quadrati partis, quæ est numerus, cum quadrato partis quæ est radix, ad duplum numeri. at proportio tripli q̄drati numeri, ad duplum numeri, est ipse numerus cum dimidio. proportio etiam q̄drati radicis, ad duplum numeri, est quæ prouenit diuiso tali q̄drato per idem duplum, igitur ipsa proportio, est numerus ipse cum dimidio sui, & tali prouentu, quare assumptis totidem q̄dratis, erunt partes irrationales æquales, quare tot q̄drata æquabuntur cubo & numero, uelut in hoc casu, diuido 3 quadratū radicis, per 4, exit $\frac{3}{4}$, cui addo 3, q̄ est equalis numero & dimidio, fit $3\frac{3}{4}$, dico igitur quod in hac estimatiōe $3\frac{3}{4}$ q̄drati æquabuntur cubo & alicui numero, & est numerus ipse $\frac{1}{4}$.

Demum uolens diligentius rem perscrutari, posui 10 q̄drata æqualia cubo, & alicui numero, & posui partem primam binomij (sic enim usus gratia appellabo coniunctum) esse, gratia exempli, 3, & cōstitui partem secundam 1 pos^{em}, & hæc est radix. quadratum igitur, est 9 p: 1 q̄drato, & hoc totum est numerus & 6 pos^{es}, & hoc est radix, at in cubo ut dictum est fit pars irrationalis ex triplo q̄drati 3, & est 27, & q̄drato 1 pos^{is} q̄d est 1 q̄dratum, in partem quæ est irrationalis, id est in 1 pos^{em}, igitur 27 pos^{es} p: 1 cubo, equatur 10 q̄dratis, in parte irrationali, id est decuplo 6 pos^{um}, quod est 60 pos^{es}, igitur dicemus, quod cubus æquatur 33 pos^{es}, igitur deprimendo per pos^{es}, q̄dratū æquatur 33, igitur res est R 33.

REGULA.

Ex his tandem hæc formatur regula breuissima. Adde primo numero dimidium sui, & totum abijce ex numero q̄dratorum, residuū duces in duplum prioris numeri, & producti R est secunda pars coniuncti. Exemplum, est cubus qui cum numero equalis est 12 q̄dratis, & prima binomij pars est 5, adde dimidium 5 ad 5, fit $7\frac{1}{2}$, abijce ex 12, fit $4\frac{1}{2}$, duc $4\frac{1}{2}$ in 10 duplum 5 prioris numeri, fit 45, cuius R est secunda pars coniuncti, igitur 12 q̄drata & 5 p: R 45, equalia sunt cu

D 3 bo

bo & 40. Eadem ratione inueni, quod numerus æquationis, scilicet 40, producti ex differentia primi numeri, & numeri quadratorum, in quadratum primi numeri, & producti tripli primi numeri, & numeri quadratorum in quadratum radicis, est differentia.

Post hæc deuolui consilium ad explorandum qualitatem capitulum cubi quadrati, rerum & numeri, uideq; quod si dixero, cubus & 3 quadrata, æqualia sunt 14 rebus, & 20 numero, & ponatur quantitas quædã intellecta, æstimatio rei, cuius prima pars sit numerus, secunda uero quantitas, alia pars irrationalis. Et sit gratia exempli, hic 1 p: R: 5, constat autem quod coniungendo partes irrationales cubi & quadrati, quod illæ fiunt ex duplo numeri quadratorum, in primam numeri partem, seu ex numero quadratorum, in duplum numeri, itemq; ex triplo quadrati numeri, & quadrato irrationalis partis, hoc est autem æquale, in capitulo cubi quadrati, & numeri, etiam numerum rerum conuenit, igitur ut in utroq; pars rationalis talis sit, ut si iungantur, duplum numeri quadratorum, & etiam triplum sui quadrati, cum quadrato alterius partis, constituat numerum rerum. Et si pars rationalis uel numerus esset minus, oporteret ut esset differentia dupli numeri quadrati, & tripli quadrati partis, quæ est R: cum quadrato partis quæ est numerus, ipse numerus rerum. Exemplum, si 1 cubus p: 6 quadratis p: numero, æquentur 30 rebus, & pars una apotomæ, sit m: 2, tunc ducemus 6 numerum quadratorum, in 4 duplum 2, & fiet 24, huic addemus 30 numerum rerum, & fiet 54, & hoc debet æquari triplo quadrati, quod est 12, & quadrato alterius partis, igitur abiecto 12 ex 54 relinquitur 42, & R: 42 est pars prima apotomæ, quare res ualet R: 42 m: 2.

$$\begin{array}{r}
 5 \text{ p: R: } 45 \\
 5 \text{ — } 12 \text{ — } 15 \\
 7 \quad 3 \\
 25 \quad 45 \\
 \hline
 175 \text{ — } 135 \\
 \hline
 40
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{res } 1 \text{ p: R: } 5 \\
 \text{qd. } 6 \text{ p: R: } 20 \\
 \text{cub. } 16 \text{ p: R: } 320
 \end{array}$$

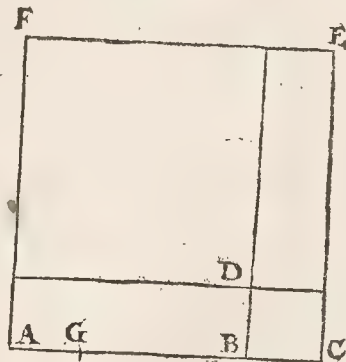
- 3 Est & modus alius, qui similitudinis dicitur, atq; hic quadruplex: A natura æquationis, uelut cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, extrahitur ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Ab augmentis æquationum, sicq; capitulo non uniuersalia inuenimus qd' quadrati, rerum, ac numeri. A conuersione æquationum in naturam ei æquiualentẽ, ut exponemus infra. A modo procedendi ad æquationes per cuborum uel quadratorum generationem, aut per proportionem ut dupli uel dimidij, aut per additionem uel diminutionem, tres enim sunt modi uariandi in uniuersum.

- 4 Est etiam transmutationis uia, qua ante demonstrationem uniuersalia

alia capitula multa inueni, atq; inter reliqua, cubi æqualis qdratis & numero, & cubi cum qdratis, æqualis numero, uelut cū conamur hanc soluere quæstionem, duos inuenias numeros, quorum aggregatum æquale sit alterius qdrato, & ex uno in alterum ducto, producat 8, una enim uia peruenies ad 1 cubum æqualem 1 qdrato p: 8, alia, ad 1 cubum p: 8 rebus, æqualem 64, hac igitur inuenta æstimatione, si diuiseris 8 per eam, prodibit reliqua equatio, ex qua in capituli illius cogitationem perueni. Quæstiones igitur alio ingenio cognitæ ad ignotas transfer positiones, nec capitulorū inuentio finem est habitura, nō tamen extra hæc, ex una quæstione, generalia poteris assequi.

Cum autem intellexissem capitulum, quod Nicolaus Tartalea mihi tradiderat, ab eo fuisse demonstratione inuentum Geometrica, cogitavi eam uiam esse regiā, ad omnia capitula uenanda. Itaq; ad eam tria supposita maxime utilia premittere institui, quorum dilucida declaratione, reliqua, quæ & ipsa demonstrabuntur, facile erit intelligere, est autem horum hoc primum.

Si quantitas in duas partes diuidatur, cubus totius æqualis est, cubis ambarum partium, triploq; productorum, uniuscuiusq; earū, uicissim in alterius qdratū. Quamuis hoc & reliqua duo quæ sequuntur in 7^o nostro super Euclidem libro ostensa sint, ne tamen huic operi quicq; deesset, placuit hic denuo demonstrare. Sit igitur A C, diuisa in puncto B, & sit cubus totius A E, sint etiā in basi eius superficies distinctæ, D A, D C, D F, D E. manifestum est autem ex 4^a 2ⁱ elementorum, C D esse quadratum B C, & D F quadratum A B, & duo rectangula A D & D E, fieri ex A B in B C, singula, cubus autem totus constat ex A C linea, in qdratum A E, quare ex A C, in superficies D A, D C, D E, D F, componentes A E, quare cum A C constet ex A B & B C, constabit cubus A E, ex octo corporibus, quorum quatuor constant ex A B linea in superficies D A, D C, D E, D F, reliqua quatuor, ex B C linea, in easdem quatuor superficies. At ex A B in F D, fit cubus A B, & ex B C in C D, cubus B C, constat igitur cubus A E, ex cubis A B & B C, & ex eo quod fit ex A B in D A, D C, D E, & eo quod fit ex C B in D A, D F & D E, at quod fit ex A B in C D, æquale est ei qd fit ex B C in D A, & quod fit ex B C in D F, æquale ei, quod fit ex A B in A D, eo quod altitudines & bases eadem sunt, parallelepipeda etiam ex A B in A D, uel D E æqualia sunt inuicem, similiter ex B C in A D, uel D E, inuicem æqua



æqualia, eo quòd DA & DE sunt æquales superficies, ex 43^a primi elementorum, igitur cubus AC constat ex cubis AB & BC , & triplo AB in quadratū BC , & triplo BC in quadratū AB , quod erat probandū.

7 Ex hoc patet secundum, scilicet, quòd cubus AB , cum triplo AB in quadratum BC , superat cubum BC cum triplo BC in quadratū AB , in cubo differentiae AB & BC , sit igitur AG æqualis BC , & erit differentia AB & BC , linea GB , constat autem ex præcedente cubum AB , æqualem esse cubis AG & GB & triplo AG in quadratum GB , & triplo GB in quadratum AG , quare cubus AB cum triplo AB in quadratum BC , æqualis est cubis AG & GB , & triplo AB in quadratum GB , & triplo GB in quadratum AG , & triplo AB in quadratum BC , uerū cubus AG æqualis est cubo BC , & triplum BG in quadratum AG , æquale est triplo BG in quadratum BC , & triplum AG in quadratum GB , æquale est triplo BC in quadratum BG , eo quòd BC æqualis est AG , cubus igitur AB , & triplum AB in quadratum BC , æqualia sunt cubo BC , & BG , & triplo BG in quadratum BC , & triplo BC in quadratum BG , & triplo AB in quadratum BC , at ex BG in quadratū BC , fit quantum ex BC in rectangulum ex BG in BC ter, igitur ex BG in quadratum BC , æquale ei quod fit ex BC in rectangulū ex BC in BG ter, eadem ratioe, quod ex AB in BC quadratum ter, æquale ei quod ex BC in rectangulum ex AB in BC ter, cubus igitur AB , & triplum AB in quadratum BC æqualis est cubis BG & BC , & triplo BC in rectangulum BC in AB , & triplo BC in rectangulum ex BC in BG , & triplo BC in quadratum BG , at ex 4^a 2^a elementorum, rectangulum ex BC in BA , & ex BC in BG , cum quadrato BG æquantur quadrato AB , igitur cubus BG cum cubo BC , & triplo BC in quadratum AB æqualia sunt cubo AB , & triplo AB in quadratum BC , quare cubus AB , cum triplo AB in quadratum BC , excedunt cubum BC , cum triplo BC in quadratum AB , in cubo differentiae BG .

Cor^m. Ex hoc patet, quòd si BC ponatur m : quòd cubus AB constabit primū. ex cubo AC & triplo AC in quadratum BC , addito per m : cubo BC , & triplo BC in quadratum AC , nam si BC fuisset p : differentia cubi AC cum triplo AC in quadratum BC , à cubo BC & triplo BC in quadratum AC , fuisset cubus AB , ex demonstratis. Sed posita BC m : tantum est quod aggregatur; quanta est differentia posita BC p : igitur cubus AB , est aggregatum cubi AC & tripli AC , in quadratū BC , & tripli BC in quadratum AC m : & cubi BC m : Et eodem modo, si AB poneretur m : cubus BC constaret ex cubo AC , & triplo AC in quadratū AB , & triplo AB , in quadratum AC per m : & cubo AB per m :

Eodem

Eodem modo, si AB ponatur m : cubus AB componetur ex cubo Cor^m .
 BC , & triplo BC in quadratum AC , & cubo AC per m : & triplo AC secūd.
 in quadratum BC per m : nam ut dictum est, cubus AB , est differen-
 tia talium partium per p : ex primo corrolario, igitur detracto maio-
 re ex minore, fiet tantundem m : sed cubus ABm : est æqualis cubo AB
 p : in numero, ut em̄ 27 p : est cubus 3 p : ita 27 m : est cubus 3 m : igitur
 cubus ABm : est æqualis cubo BC & triplo BC in quadratum AC ,
 & cubo ACm : & triplo AC in quadratum BCm :

Ex primo autem supposito, ostenditur etiam hoc tertium, quod 8
 est, proportionem aggregati ex cubis AB & BC ad triplum produ-
 ctorum AB in quadratum BC , & BC in quadratum AB esse, ut trium
 linearum in proportionē continua, AB & BC existentium aggregati
 primæ & tertiæ, detracta secunda, ad triplum secundæ. constat em̄ ex
 32^a 11ⁱ elementorum, quod proportio cubi AB ad corpus ex AC in
 quadratum AB , est ut quadrati AB ad AD superficiem, quare ex p^a. 6ⁱ.
 elementorum, ut AB ad BC , eadem ratione parallelepipedī ex BC in
 quadratum AB ad parallelepipedum ex AB in quadratum BC , pro-
 portio, ut AB ad BC , atq; rursus parallelepipedī, ex AB in quadratum
 BC ad cubum BC , ut AB ad BC . Quatuor igitur corpora, scilicet cu-
 bus AB , parallelepipedum, ex BC in quadratum AB , parallelepipedū
 ex AB in quadratum BC , & cubus BC sunt in continua proportionē li-
 nearum AB & BC . Statuamur itaq; hæc corpora breuitatis causa in
 quatuor literis H, K, L, M , ita ut H sit cubus AB ,
 & K parallelepipedum ex BC in quadratum AB & L parallelepipedū
 ex AB in quadratum BC , & M sit cubus BC , igitur cum ratio M ad L sit ea quæ L ad K , ut probatum est,
 item K ad L , ut H ad K , erit ex 24^a 5ⁱ elementorum, K M ad L , ut H L ad
 K , quare ex 12^a eiusdem, H K L M , ad K L , ut H L , ad K , quare ex 19^a
 eiusdem, H M ad K L , ut H L detracto K , ad K , quare ex 22^a eiusdem,
 H M ad triplum K L , ut H L dempto K ad triplum K , at cum H K L , sint
 in proportionē AB ad BC , ut probatū est, erit ex 11^a eiusdē 5ⁱ elemen-
 torum, cuborum AB & BC , simul iunctorū, ad triplum AB in quadra-
 tum BC , & BC in quadratum AB , uelut primæ & tertię trium linearū
 proportionalium, in proportionē AB & BC , detracta media ipsarum,
 ad triplum ipsius mediæ.

Ex hoc patet, quod proportio tripli BC in quadratum AB , ad tri- Cor^m .
 plum AB in quadratum BC , est ut AB ad BC , ex 12^a 5ⁱ el. tertiu.

Atq; etiam, quod proportio cuborum AB & BC , cum duplo BC Cor^m .
 in quadratum AB , & AB in quadratum BC , ad residuum totius cubi quartū

E

AC,

A C, est ut trium superficierum D C, D A, D F, ad D E superficiem, seu ut trium quantitatum proportionalium in proportiōe A B ad B C, ad mediam ipsarum, ac multa alia quæ breuitatis causa omitto.

De capitulorum transmutatione. Cap. VII.



1 Vm fuerit numerus & denominatio media, extremæ æqualis, conuertetur capitulum in duas denominationes easdem, & sub eadem magnitudine numero æquales, uelut si dicam, quadratum æquatur 6 radicibus & 16, dicemus igitur etiam, quadratum & 6 radices, æquantur 16, manetq; conuersa ratio, inde habita prima æquatione, detrahemus numerum radicum, & est 6, & habebimus secundam, uel secunda habita, addemus 6 numerum radicum, & fiet æquatio prima, uerum in cæteris denominationibus regula generalis dari non potest.

2 Verum generalis est regula, cum media denominatio, numero & extremæ denominationi æquatur, tunc conuertetur in aliam mediam denominationem, tantundem à numero distantem, quantum prior media ab extrema denominatione distabat. Sic pro exemplo, si cubus & numerus æquales sint rebus, cubus cum eodem numero, quadratis etiam equabitur, sed non sub rerum numero existentibus. Ratio uero habendi mediam denominationem est, deprime maiorem denominationem ex medijs, per minorem, & radicem numeri æquationis, sumptam secundum naturam denominationis extremæ, reduces ad denominationem quæ exiit, & cum eo numero, multiplicabis numerum denominationis mediæ proximioris maximæ denominationi extremæ, aut diuides numerum proximioris numero, & qui exit, numerus est denominationis mediæ, uelut si cubus & 16 æquantur 6 quadratis, erit ex dictis cubus & 16, æqualia rebus. harum numerum sic uenabimur, deprime qdratum per res, exeunt res, accipe R cub: 16, nam cubus est extrema denominatio, & eam reduc ad naturam rei, cum res sit id, quod prouenit, diuiso quadrato per rem, fiet igitur R cub. 16, quoniam res non auget nec minuit, igitur ducemus R cub. 16 in 6 numerum quadratorum, qui sunt proximiores cubo, quàm numero, & fient res R cub. 3456 æquales 1 cub. p: 16. Exemplum aliud, cubus & 8 æquantur 18 rebus, dices igitur, cubus & 8, æquantur quadratis, diuide igitur quadratum per rem exit res, accipe R cubicam 8. quia cubus est maxima denominatio, & est 2, ea non est deducenda aliter, cum res sit denominatio exiens, fiet igitur 2 diuisor 18 numeri rerum,

rum, quia res sunt proximiores numero, quàm cubo, & exhibet 9, numerus quadratorum æqualium cubo p: 8, eodem modo, si dicamus 1 qd' qd^m p: 64 eq̃tur 10 cubis, cadet transmutatio rebus in 1 qd' qd^m p: 64 equale rebus, diuide igitur cubū per rem exit quadratum, duc R' R' 64 quæ est ex natura qd' qd^m, & est R' 8, ad naturam quadrati, scilicet denominationis exeuntis, fit 8, quē duc in 10, numerum cuborum, quia sunt proximiores maximæ denominationis, & fiunt res 80, cōtra diuide res 80 per 8 ad habendum numerum cuborum.

1 qd' qd. p: 64	10 cub.
1 qd' qd. p: 64	rebus
R' 8	qd. 8
	10
	res 80

Eadem ratio tenet, ubi denominatio media cum numero, æquatur extremæ, seu duæ denominationes extremæ, numero æquales fuerint, nam eadem regula unam æquationem in aliam transmutabimus. Ut pro exemplo, cubus eq̃tetur 9 rebus p: 10, dicemus igitur, cubus p: qdrato R' cubicæ 72 $\frac{9}{10}$ æquantur 10, & si cubus æquatur 6 qdratis p: 16, erit cubus & res R' cub. 3456, æqualis 16. Et si cubus p: 18 rebus, æquatur 8, erit cubus æqualis 9 qdratis & 8 numero. Et cum relatum primum p: 6 cubis æquatur 80, erit relatum primū æquale quadratis p: 80. diuide igitur cubum per quadratum, exit res, sume R' relati 80, & eam reducito ad naturam rei remanet R' relati 80, quam ducito in 6 numerum cuborum, fit R' relati 622080, numerus quadratorum, igitur R^m p^m æquatur qdratis R' relati 622080 p: 80 numero, eadē ratione, si R^m p^m p: 30 rebus, æquale fit 32 numero, tunc erit R^m p^m æquale qd' qdrato & 32 numero, diuide qd' qd^m per rem, exit cubus, reducito 2 R' relati 32 ad cubum, fit 8, diuide 24 numerum rerum per 8, exit 3 numerus qd' qdratorum, qui cum 32 æquantur relato primo.

R ^m p ^m p: 6 cub.	80
R ^m p ^m qd. p:	80
R rel: 80	res R' rel: 80
	6
	qd. R' rel: 622080

Sed pro habenda æstimatione in singulis, diuides qdratum radice numeri eq̃tionis, sumpta ipsa radice, secundum naturam maximę denominationis, per æstimationem quam habes, quod exit est æstimatione conuersi capituli. Exemplum, dictum est, quod si cubus & 8 æquatur 18 rebus, cubus & 8 æquabitur 9 qdratis. In prima autem æquatione res ualet 4, uel R' 6 m: 2, dico, quod si acceperis R' cubicā 8, quæ est 2, & duxeris eam in se fit 4, & diuiseris per priores æstimationes, scilicet 4, uel R' 6 m: 2, exhibunt 1, uel R' 24 m: 4, æstimationes cubi p: 8 æqualium 9 qdratis. Et eodem modo dictum est, quod si R^m p^m p: 6

E 2 cubis,

HIERONYMI CARDANI

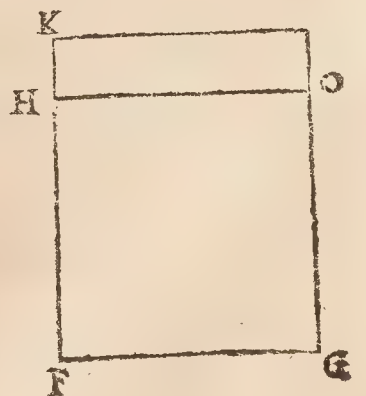
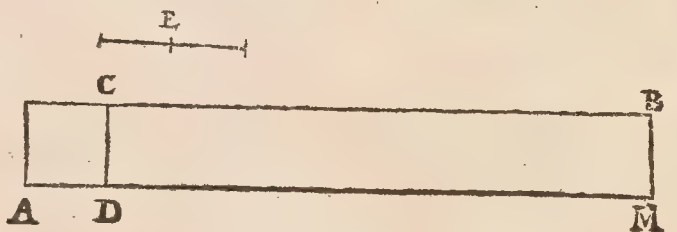
cubis, æquatur 80, quod $R^m p^m$ æquabitur $R^2 R^2$, 622080 quadratorum $p:80$, & in prima æquatione æstimatio rei manifeste est 2, ducit igitur $R^2 R^2 80$ in se, fit $R^2 R^2 6400$, diuide per 2, æstimationem relati & 6 cuborum æquilibrium 80, exhibet $R^2 R^2 200$, æstimatio rei, quando $R^m p^m$ æquatur $R^2 R^2 622080$ quadratorum $p:80$, ut uero facilius intelletus omnium horum sit, uigintiquatuor

cub. & $\bar{q}d'$ æql' n° in cub. æql' re & n° .
 cub. æql' $\bar{q}d'$ & n° in cub. & res æql' n° .
 cub. & n° æql' $\bar{q}d'$ in cub. & n° æql' rebus
 $\bar{q}d' \bar{q}d.$ & cub. æql' n° in $\bar{q}d' \bar{q}d.$ æql' reb' & n° .
 $\bar{q}d' \bar{q}d.$ & n° æql' cu. in $\bar{q}d' \bar{q}d.$ & n° æql' rebus.
 $\bar{q}d' \bar{q}d.$ æql' cu. & n° in $\bar{q}d' \bar{q}d.$ & res æql' n° .
 $R^m p^m$ & $\bar{q}d' \bar{q}d.$ æql' n° in $R^m p^m$ æql' reb. & n° .
 $R^m p^m$ æql' $\bar{q}d' \bar{q}d.$ & n° in $R^m p^m$ & res æql' n° .
 $R^m p^m$ & n° æql' $\bar{q}d' \bar{q}d.$ in $R^m p^m$ & n° æql' reb'.
 $R^m p^m$ & cu. æql' n° in $R^m p^m$ æql' $\bar{q}d.$ & n° .
 $R^m p^m$ æql' cu. & n° in $R^m p^m$ & $\bar{q}d.$ æql' n° .
 $R^m p^m$ & n° æql' cu. in $R^m p^m$ & n° æql' $\bar{q}d.$

transmutationes subiungam, ex quibus alias discere licebit. hic namque duodecim sunt conuersiones, totidemque e contra, uelut si cubus & quadratum æquantur numero, conuertetur capitulum, in cubum æquale rebus & numero, at e contra, si cubus æqualis sit rebus & numero, cubus & quadrata numero etiam æqualia erunt.

DEMONSTRATIO.

5 Vt uero eiusmodi sit aliqua, exempli causa, demonstratio, ponatur parallelepipedum AB constans ex AC cubo, & DB numero, æquale autem totum hoc $\bar{q}dra$ tis AD lineæ. Igitur cum ipsum cõstet ex DC in AB , constabit etiam ex AM in quadratum DC , igitur AM est numerus quadratorum, inter MD & DA , sint continue proportionales, E proximior AD , & F G proximior DM , $\bar{q}dra$ tum autem FG sit GH , & sit GK superficies, æqualis ei quæ ex E in AM , compleatur autem corpus GK , secundum altitudinem FG , erit igitur ex 15^a 6ⁱ elementorum AM ad FK , ut FG ad E , igitur ex 11^a 5ⁱ eiusdem, AM ad FK , ut MD ad FG , seu FH . at ex 19^a 5ⁱ elementorum erit AM ad FK , ut AD ad KH , ex 11^a igitur eiusdem, MD ad FH , ut AD ad KH , quare cum sit MD , ad FH , ut FH ad E , &



E , & FH ad E , ut E ad AD , & E ad AD , ut AD ad KH , erunt quinque lineæ MD , FH , E , AD , HK , continue proportionales, igitur ex 34^a 11^i elementorum & 17^a 6^i erit GH ad AC , ut MD ad HK , utraq; enim duplicata ei, quæ est FH , ad AD , quare quod ex DM quinta in AC quadratum secundæ, æquale est ei, quod ex KH prima in GH quadratū quartæ. Igitur corpus KO est numerus propositus, & cum cubo BG æquatur rebus totidem, quot sunt in superficie GK , at GK æqualis est superfici ei ex C in AM , est autem E radix cubica numeri DB , propositi, ex 34^a 11^i elementorum, & AM numerus quadratorum, ut propositum est, igitur numerus rerum GK fit ex radice cubica numeri æquationis in numerum quadratorum, & numerus æquationis manet idem scilicet corpus KO & BD , quorum unum alteri æquale esse demonstrauimus. Superest itaq; ut ostendamus estimationem rei, quæ est AD in uno, & FG , in altero esse, quales proponuntur, cadit enim inter eas proportionalis media E radix cubica numeri propositi, igitur ex 16^a 6^i elementorum diuiso quadrato E per unam earum exhibet reliqua. Eodem modo probaremus reliquam partem regulæ, & generaliter, sed breuitati consulendum est, in his quæ ordinem habent eum, ut unum ex altero cognoscatur.

REGULA.

Est & alius transmutandi modus, manente quidem denominatio-
 num numero, uariato autem æquationis numero, uerū in reliquis ean-
 dem habet rationem, regula igitur est. Accipe radicem numeri æqua-
 tionis, secundum naturam denominationis mediæ, quā habes, & eam
 reduces multiplicando ad naturam denominationis mediæ, quam uis
 æquari extremis in conuersione, & hic est numerus in secunda æqua-
 tione. Exemplum, si dico, cubus & 8 æquatur 18 rebus, tu scis ex ta-
 bula supraposita, quæ huic seruit regulæ, quod transmutatur in cubū
 & numerum æqualia quadratis, at ex hac regula liquet, quod nume-
 rus quadratorum æquatur numero rerum, erunt igitur cubus & nu-
 merus æquales 18 quadratis, pro numero igitur æquationis accipe 8,
 quia res non habent radicem, & duc in se, fiet 64, numerus æquatio-
 nis, duxisti autem in se, quia denominatio media in quam fienda est
 transmutatio, est quadratum. Eadem ratione, si dicatur, 1 qd' qdratū
 p: 8, æquatur 12 rebus, traducetur in qd' qdratum & numerum æqua-
 lia cubis, quare reducemus 8 ad cubum & fiet 1 qd' qdratum p: 512,
 æquale 12 cubis. Et ita, si dicatur, 1 p^m r^m p: 8, æquatur 5 cubis, transf-
 mutatio fiet in r^m p^m p: numero, æquale 5 quadratis, ex tabula uel re-
 gula, igitur pro numero (quia denominatio media in proposito est cu-
 bus) sumemus r^m cub. 8, quæ est 2, & eam deducemus ad naturā qua-

drati, quia quadratum est denominatio media in transmutatione, fiet igitur 4, quare erit $R^m p^m p:4$, æquale 5 quadratis.

- 7 Eadem ratio tenet, cum numerus & media denominatio extreme æquantur, ut transmutetur in capitulum denominationum æqualium numero. Exemplum, si dicamus, $1 p^m R^m p:4$ cub. æquatur 64, accipiemus propter cubum R cubicam 64, & est 4, & eam reducemus ad quadratum denominationem mediam, in quam fienda est transmutatio, & habebimus $1 p^m R^m$ æquale 4 qdratis & 16 numero, & si $1 p^m R^m p:4$ rebus æquatur 5, quia res non habet radicē, reducito 5 ad naturam quadrati quadrati, & fit 625, ideo dicemus, quod $1 R^m p^m$ æquatur 4 quadratis quadrati $p:625$.

- 8 Aestimationis ratio sic habetur in media denominatione æquali extremæ & numero. Reducito æquationem quam habes in naturam denominationis mediæ, in quam fienda est transmutatio, & hoc abijce ex numero denominationis mediæ, & R residui, sumpta secundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit transmutatio, est rei æstimationis. Exemplum, si $p^m R^m p:64$ æquatur 12 cub. 12 , cubis dicemus $p^m R^m p:16$ æquatur 12 qdratis, æstimationis primæ æquationis est 2, & quia media denominatio in quam fit transmutatio est qdratum, ducemus 2 in se fit 4, abijce ipsum ex 12 numero cuborum, fit 8, residuum cuius sumemus R secundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit transmutatio, & est cubus. igitur R cub. 8, quæ est 2, erit etiam æstimationis rei in secunda æquatione. Aliud Exemplum, si $p^m R^m p:64$ æquatur 24 qdratis, tu scis, quod transmutatur in $p^m R^m p:512$ æquale 24 cubis, æquatio autem primi propositi fuit 2, cubus fit 8, nam media denominatio secunda est cubus, abijce 8 ex 24, numero qdratorum, relinquitur 16 cuius R quædrata, id est sumpta secundum naturam denominationis mediæ, primæ æquationis, quæ est 4, est æstimationis $p^i R^i p:512$ æqlis 24 cubis.

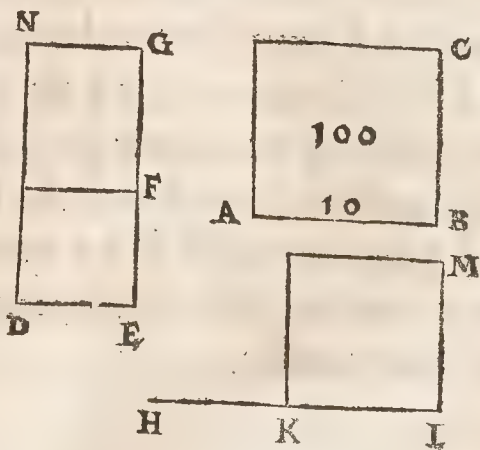
- 9 Sed ubi intermedia denominatio iungitur numero uel extremæ denominationi, facto transitu in comparem, ex 7^a regula, reduces ut prius æstimationem quam habes in naturam denominationis mediæ, cuius quæris æstimationem, & ei adde numerum denominationis mediæ, si media denominatio cuius æstimatio quæritur, iuncta fuerit numero, uel minuemus, si iuncta fuerit extremæ denominationi, & eius aggregati uel residui R sumpta, ex natura denominationis mediæ, cuius æstimatio cognita est, erit æquatio secundæ quæstionis quæsitæ. Exemplum, sit $R^m p^m$ æquale 3 cubis $p:8$, & æstimatio rei cognita 2, & trans-

& transmutatur ex regula septima in $R^m p^m p:3$ quadratis æqualia 4, reduco igitur 2 ad naturam quadrati mediæ $R^m p^m 3$ cub. $p:8$ denominatiōis, cuius queritur æstimatio. Sit $R^m p^m p:3$ q̄d. 4, ex hoc abiñcio 3 numerum quadratorum, quia quadrata sunt iuncta $R^o p^o$, & non numero, relinquitur 1, huius R^2 cub. quæ est 1, est rei æstimatio, est autem cubus denominatio media æquationis iam cognitæ. Rursus sit $R^m p^m$ æquale 7 q̄dratis $p:4$, & sit transmutatio in $R^m p^m p:7$ cubis æquale 8, ex 7^a regula, & sit huius co. $R^m p^m p:7$ cub. 8 gnita æquatio, quæ sit 1, & uelim reliquam, res $R^m p^m 7$ q̄d. $p:4$ duco 1 ad q̄dratum, mediam denominationem ignotam, & sit 1, huic addemus 7 numerus q̄dratorum, quia media denominatio ignota, quæ est q̄dratum, iungitur numero, scilicet 4, & habebimus 8, huius R^2 cubica sumpta ex natura mediæ denominationis cognitæ, & est 2, talis R^2 cubica, est rei æstimatio, quando $p^m R^m$ æquatur 7 q̄d. $p:4$.

Ex hoc patet, quòd semper, habito uno capitulo, per secundam, Cor^m tertiam & quartam regulam, uel per sextam, septimā, octauam, & nonam, habebimus aliud generaliter, si generaliter, uel particulatim, si particulatim. Exemplū igitur tale sit, cognito capitulo cubi & rerum æqualium numero, proponatur cubus æqualis 3 quadratis & 10 numero, habebimus igitur ex septima regula cubum & 3 res æquales R^2 10, æquatio huius est $R^2 v: cub. R^2 3 \frac{1}{2} p: R^2 2 \frac{1}{2} m: R^2 v: cub. R^2 3 \frac{1}{2} m: R^2 2 \frac{1}{2}$ huius igitur quadratum, addito 3 numero quadratorum, quia quadrata iunguntur numero, erit æstimatio cubi æqualis 3 q̄dratis & 10 numero, & hoc est, quia denominatio media cognita, quæ est res, non habet ex se radicem, & sic primo generaliter capitulum cubi æqualis q̄dratis & numero, aliāq; multa capitula inueni, duplici uia.

DEMONSTRATIO.

Et ne hoc uoluntarium uideatur, demonstratio huius adijcienda est, in uno pro omnibus, sit cubus D F, cum A B numero, æqualis D G numero rerum, id est corpori D G, sit autem H L, numerus rerum, æqualis D G superfici ei, in numero, & sit quod ex H K in K M, æquale A C numero, & quadrato A B, erit igitur quod ex H L in K M, æquale A C & cubo K L, & similiter, quod ex D E in D G, æquale cubo D E, & numero A B, D E autē est latus D F, & K L latus K M, sed H L æqualis est D G, cum igitur ex H K in K M fiat A C, & ex D E in D G, A B, posita



posita FN radice KM , & DE radice HK , nescio si ex DE in FN , fit AB , ex HK in KM fit AC , nāq; hoc à Theone in Euclidis cōmentario est demonstratum, igitur cum æstimatio rei in uno sit KL , in altero DE , sequitur ut sublata FD , æquali HK (utraq; enim æquatur quadrato DE) ex HL , relinquatur KL , rei æstimatio, quod est propositum.

11 Est & genus transmutationis in dissimile, ut cum $\bar{q}d'\bar{q}d^m$ æquatur rebus & numero, & res est $R \times 5 p:2$, gratia exempli, erit $\bar{q}d'\bar{q}d^m p:$ eisdem rebus æquale eidem numero, & res erit eius apotome, uidelicet $R \times 5 m:2$, & e contra.

12 Transmutantur & ea, quæ constant ex quatuor nominibus, cum fuerint tres partes continue proportionales, & æquales rebus uel cubis, dico autem, numerus & $\bar{q}dratum$ & $\bar{q}d'\bar{q}d^m$, nam diuiso numero rerum per $R \times$ numeri, exit numerus cuborum, multiplicato uero numero cuborum, per $R \times$ numeri, producitur numerus rerum æqualium $\bar{q}d'\bar{q}drato$ & $\bar{q}drato$ & numero eisdē, uelut, si $\bar{q}d'\bar{q}d^m p:8$ $\bar{q}dratis p:64$, æquantur 10 cubis, igitur ducto 8 $R \times 64$, in 10 numerum cuborū, erit 1 $\bar{q}d'\bar{q}d^m p:8$ $\bar{q}dratis p:64$, æquale 80 rebus. Habita autem una æquatione, diuide cum ea $R \times$ numeri, quod exit, est reliqua æquatio, uelut 1 $\bar{q}d'\bar{q}d^m p:8$ $\bar{q}dratis p:64$, æquatur 56 rebus, & res est 4, erit 1 $\bar{q}d'\bar{q}d^m p:8$ $\bar{q}dratis p:64$ æquale 7 cubis, inde diuiso 8 radice 64, per 2 priorem æquationem, exit 4, secunda æquatio, $\bar{q}d'\bar{q}drati p:8$ $\bar{q}dratis p:64$, æqualium 7 cubis.

13 Est etiam transmutatio capitulorum ex tribus constantium, in capita ex quatuor, & pro exemplo, regulam unam exponam, si sit capitulum cubi & numeri æqualium $\bar{q}dratis$, conuertetur in capitulum cubi & rerum, æqualium $\bar{q}dratis$ & numero, hoc modo, manente numero $\bar{q}dratorum$, duc dimidium numeri $\bar{q}dratorum$ in se, & productū est numerus rerū, quæ sunt cū cubo, & octaua pars prioris numeri est semper numerus, qui est cum $\bar{q}dratis$, & æquatio semper manet eadem. Exemplum, cubus $p:16$ æquatur 14 $\bar{q}dratis$, duc 7 dimidium 14 in se, fit 49, accipe $\frac{1}{8}$ de 16, quod est 2, habebis 1 cub. $p:49$ rebus æqualē 14 quadratis $p:2$. Aliud, cubus & 40, æquatur 8 quadratis, duc 4 dimidium 8 in se, fit 16, numerus rerum, accipe $\frac{1}{8}$ de 40 quod est 5, igitur cubus & 16 res æquantur 8 quadratis $p:5$, & æquatione una inuenta, habes reliquam cū sint eadem, demonstratio huius non est hic necessaria.

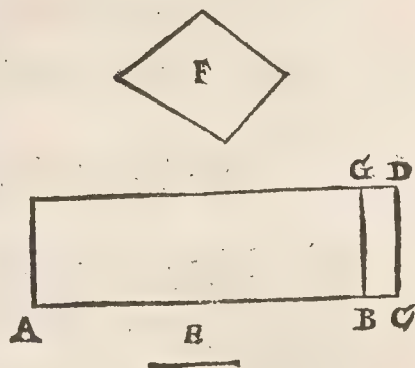
Docetur

Docetur æquatio generaliter mediæ denominationis æqualis extremæ & numero. Cap. VIII.

DEMONSTRATIO.



It inquam, cubus quadrati & numerus F æqualis aliquibus rebus, & sit numerus rerum $A D$, & sit $B D$ portio, ex qua sumpto latere, quale relati primi E , & ducto in $A G$ reliquū numeri rerum, fiat F numerus æquationis, dico E esse rei æstimationem, nam quia ex supposito, ex E in $A G$, fit F , & ex E in $B D$, fit cub. E , eo quod E fuit latus relatum, $B D$, & productum ex E in $A G$, & in $B D$, æquale est producto ex E in $A D$, sequitur cum $A D$, sit numerus rerum, quod res æquantur cubo quadrato, & numero F , existente æstimatione ipsius E .



REGULA.

Secundum hoc formabitur regula, cum fuerint denominatio mediæ & numerus, æquales mediæ, & ex numero mediæ denominationis, feceris duas partes, ex quarum una in radicem alterius, sumptam secundum naturam denominationis, provenientis ex diuisione extremæ per mediam, & deductam ad naturam ipsius mediæ denominationis, fiat numerus æquationis, tunc radix ipsa anteq̃ deductur ad naturam denominationis mediæ, est rei æstimatione. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato & 21, tunc quia res sunt immediate quadrato & numero, sufficit facere de 10 duas partes, ex quarum una in aliam fiat 21, & erunt 7 & 3, & utraq̃ est rei æstimatione. Aliud, 10 res, æquantur cubo & 3, hic res est coniuncta numero, sed non cubo, cum intermediat quadratum. Ideo diuidemus cubum per rem, exit quadratum, dicemus igitur fac ex 10, duas partes, ex quarum una in quadratam alterius radicem, fiat 3, & erunt 1 & 9, nā ex 1 in 3 & 9 fit 3, ideo talis & scilicet 3, est rei æstimatione. Aliud, 10 cubi æquales sunt q̃d' q̃drati, & 64, iam hic cubus hæret q̃d' q̃drato, & à numero distat intermediantibus q̃drato & re, dices igitur, fac de 10 duas partes, ex quarum una in alterius cubū, producat 64, & erunt partes 8 & 2, qui ad cubum deducendus est, igitur 2 est rei æstimatione, scilicet quòd oporteat semper numerum cum quo operamur, esse rei æquationem. Aliud, & est quarti modi exemplum, 10 cubi æquantur $p^{\circ} r^{\circ}$ & 48, tūc iam cubus distat à $r^{\circ} p^{\circ}$, intermedio q̃d' q̃drati, & à numero interpositis quadrato & re, diuide igitur $r^m p^m$ per cubum,

F

exit

exit quadratum, dicemus, fac de 10 numero mediæ denominationis duas partes, ex quarum una, in cubum radices quadratæ alterius producat 48 numerus æquationis, & erunt partes 6 & 4, nam ex 6 in 8 cubum 2 radices quadratæ 4, fit 48, ideo ipsum 2 radix quadrata 4, est rei æstimatio. Manifestum est igitur, quod semper sumimus radicem ex natura denominationis, secundum quam media in maiore continetur, & deducimus eam ad naturam ipsius mediæ, & qui scit hoc facere, nouit capitulum, & qui nouit capitulum, scit etiam hoc facere.

3 Est uero manifestum, quod cum mediâ denominatio, extremæ & numero æqualis est, tunc in omnibus, præterq̃ in maximo numero, duas æstimationes necessario habet.

De secunda incognita quantitate non multiplicata. Cap. IX.



Eneraliter hucusq̃ noua inuenta tractauimus, nunc uero de singulis dicendum speciebus est, namq̃ sæpius illud occurrit, ut quæstionem propositam, duplici positione soluiamus. Eiusmodi autem est exemplū, quando aliter uix rem hanc possumus explicare. Tres erant uiri pecunias habentes, Primus cū dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cū reliquorū tertia parte 28. Tertius cū reliquorum parte quarta 31, quæritur quantum quisq̃ habuit. Statuemus primo rem ignotam primam, secundo secundam rem ignotam, tertio igitur 31 aurei, minus quarta parte rei, ac quarta parte quantitatis relictæ sunt, iam igitur uide, quantum habet primus, equidem si illi dimidium secundi & tertij adijcias, habiturus est aureos 32, habet igitur per se aureos 32 m: $\frac{1}{2}$ quan: m: $15\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ pos: $\frac{1}{8}$ p: $\frac{1}{8}$ quant: quare habebit $16\frac{1}{2}$ m: $\frac{3}{8}$ quant: $\frac{1}{8}$ pos: hoc autē cum sit æquale uni positioni, erit $\frac{7}{8}$ pos: & $\frac{3}{8}$ quant: æquale $16\frac{1}{2}$, quare deducendo ad integra 7 pos: & 3 quant: æquabuntur 132. Rursus uideamus, quantum habeat secundus, habet hic 28, si ei tertia pars primi ac tertij addatur, ea est $\frac{1}{3}$ pos: p: $10\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ pos: m: $\frac{1}{12}$ quant: hoc est igitur $\frac{1}{4}$ pos: p: $10\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ quant: abijce ex 28 relinquitur, $17\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$ quant: m: $\frac{1}{4}$ pos: & tantum habuit secundus. suppositum est autem habere illum quantitatem, quantitas igitur secunda, æqui ualet $\frac{1}{12}$ sui met,

Pri: Secund: Terti:
res quan: 31 m:
Quarta parte reliq̃r
primus $16\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ pos:
m: $\frac{3}{8}$ quan: æqualia
positioni primæ

$\frac{7}{8}$ pos: p: $\frac{3}{8}$ quan: æq̃
lia $16\frac{1}{2}$

Secundus $17\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$
quan: m: $\frac{1}{4}$ pos: æq̃
lia quantitati secundæ

$\frac{1}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ pos: æ
qualia $17\frac{2}{3}$

met, & $17\frac{2}{3}$ m: $\frac{1}{4}$ pos: abiectis communiter $\frac{1}{12}$ quantitatis, & restituto m: alteri parti, fient $\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ pos: æqualia $17\frac{2}{3}$, quare 11 quan: p: 3 pos: æqualia erunt 212, multiplicatis partibus omnibus per 12 denominatorem, inde duces quamuis earum ad æqualitatem alterius, in positionum aut quantitatum numero, ut pote dicendo, 3 pos: p: 11 quan: æquantur 212, uolo modo ut sint 7 positiones, & erunt per regulam quatuor quantitatum proportionalem, $25\frac{2}{3}$ quan: æquales $494\frac{2}{3}$, habes igitur, ut uides, 7 pos: p: 3 quantitibus æqualia 132, & 7 pos: p: $25\frac{2}{3}$ quantitibus æqualia $494\frac{2}{3}$, igitur cum 7 pos: sint idem, in utroq; erit differentia quantitatum, scilicet $22\frac{2}{3}$, æqualis numerorum differentia, quæ est $362\frac{2}{3}$, diuide igitur, sicut in positione simplici, per capitulum tertium, $362\frac{2}{3}$, per $22\frac{2}{3}$, exit 16, æstimatio quantitatis, & tantum habuit secundus. Rursus ponamus primo esse rem, secundo iam erant 16, tertio sit secunda quantitas, cumq; secundus cum tertia parte primi & tertij, habeat 28, ipse autem habeat 16, erit $\frac{1}{3}$ pos: p: $\frac{1}{3}$ quantitatis æqualis 12, residuo 16 & 28, & ideo 1 pos: p: 1 quantitate æquabuntur 36, at uero primus, cum dimidio reliquorum habuit 32, dimidium reliquorum est 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: igitur 1 pos: p: 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: æquantur 32, igitur abiecto 8, fiet 1 pos: p: $\frac{1}{2}$ quan: æqlis 24, quia igitur 1 pos: p: 1 quan: æquabatur 36, igitur differentia 24 & 36, quæ est 12, æquatur dimidio quantitatis, quare per modum capituli tertij, diuiso 12 per $\frac{1}{2}$, exit 24, æstimatio quantitatis, seu numerus aureorū tertij, iam igitur constat secundū habuisse 16, tertium 24, primus autem cum dimidio secundi & tertij habet 32, detracto 20 dimidio secundi & tertij, ex 32, relinquitur 12 numerus primi, habuit igitur primus aureos 12, secundus 16, tertius 24. Operatio prolixa, & clara tamē ac facilis, semper autem reducenda est denominatio una ad eundem numerum, & tunc differentia numerorum æqualis necessario erit differentia alterius denominationis, ut uidisti bis in hoc exemplo

Exemplum aliud. Dixit primus secundo, da mihi tertiam partem tuorum, & 3 p: & habebo triplum residui tui. At secundus primo, da dimidium, & 2 p: tuorum, & quod tibi relinquetur, erit nona pars omnium quæ ego habebo. Dabimus primo rem, secundo quantitatem, quia

HIERONYMI CARDANI

igitur dando $\frac{1}{3}$ & 3 p:secundi, primo, relinquitur secundo $\frac{2}{3}$ quan:
m: 3, & hoc est tertia pars aggregati primi
quod est 1 positio p: $\frac{1}{3}$ quantitatis p: 3, igitur
triplato $\frac{2}{3}$ quan:m: 3, & fit 2 quan: m:
9, erit hoc æquale pos. p: $\frac{1}{3}$ quan^{ti} p: 3,
quare reddendo quod est minus, alteri par-
ti, fiet 1 positio p: 12, æqualis 1 $\frac{2}{3}$ quan^{ti}.
Rursus quia dictū est, quod si primus det
dimidium p: 2, secundo, erit residuum scili-
cet $\frac{1}{2}$ pos. m: 2, nona pars aggregati, quod
est 1 quan: p: $\frac{1}{2}$ pos. p: 2, igitur multiplicando tale residuum per 9, fiet
4 $\frac{1}{2}$ pos. m: 18, æquales 1 quan: p: $\frac{1}{2}$ pos^b p: 2, reddendo minus al-
teri parti, & auferendo similia, habebimus 4 pos. æquales 1 quan^{ti} p:
20, habebas etiam 1 pos. p: 12 æqualem 1 $\frac{2}{3}$ quan^{ti}, reducito partes
ad equalitatē unius denominationis, & primo multiplicando 1 pos. p:
12, æq̃lem 1 $\frac{2}{3}$ quan: per 4, fient 4 pos. p: 48 æquales 6 $\frac{2}{3}$, quan^b, & hoc
comparabis, ut uides in figura, cum 4 pos^b æqualibus 1 quan^{ti} p: 20.
& similiter eadem ratione reducendo
numerus quantitatū ad æqualitatē,
habebis 5 quan^{ti} æquales 36 p: 3 po-
sitionibus, & 5 quantitates p: 100,
æq̃les 20 pos^b, in utroq; casu trans-
feres uicissim, per regulam, si æqua-
libus equalia addas, tota quoq; fient
æqualia, & habebis 4 pos^{ti} p: 68 p:
1 quan^{ti} æq̃les 4 pos^b p: 6 $\frac{2}{3}$ quan^b
inde abiectis similibus, relinquentur
5 $\frac{2}{3}$ quan: æquales 68, igitur diuiso
68, per 5 $\frac{2}{3}$, exit 12 estimatio quantitatis, & id quod habuit secundus.
Eadem ratione, transferes in secunda æquatione, partes dissimiles, di-
cendo, si 1 quan: æquantur 36 p: 3 pos^b, & 5 quan: p: 100, æquantur
20 pos^b, igitur 5 quan^{ti} p: 20 pos^b, æquantur 5 quan^b p: 3 pos^b p:
136, inde abiectis similibus relinquentur 17 pos^{ti} æquales 136, qua-
re diuiso 136 per 17 exhibit 8, positionis æstimatio, seu numerus pri-
mi, habuit itaq; primus 8, secundus 12, & quamuis aliter hæc etiā sol-
ui possint, hoc tamen proprium est magis & purum, ut uno eodemq;
impetu tota quæstio absoluator, & si etiam primum exemplum per so-
lum rem ostendi queat.

Primus	Secundus
1 pos.	1 quan:
1 pos. p: $\frac{1}{3}$ quā. p: 3 tri-	1 pos. p: $\frac{1}{3}$ quā. p: 3 tri-
plum $\frac{2}{3}$ quan. m: 3.	plum $\frac{2}{3}$ quan. m: 3.
1 pos. p: 12 æq̃ 1 $\frac{2}{3}$ quā:	1 pos. p: 12 æq̃ 1 $\frac{2}{3}$ quā:
1 quā: p: $\frac{1}{2}$ pos. p: 2 no-	1 quā: p: $\frac{1}{2}$ pos. p: 2 no-
nuplum $\frac{1}{2}$ pos. m: 2	nuplum $\frac{1}{2}$ pos. m: 2
1 quā: p: 20 æq̃l. 4 pos.	1 quā: p: 20 æq̃l. 4 pos.

4 pos. p: 48 æq̃les 6 $\frac{2}{3}$ quan:	4 pos. p: 48 æq̃les 6 $\frac{2}{3}$ quan:
4 pos. æq̃les 20 p: 1 quan:	4 pos. æq̃les 20 p: 1 quan:
4 pos. p: 68 p: 1 quan: æq̃les	4 pos. p: 68 p: 1 quan: æq̃les
4 pos. p: 6 $\frac{2}{3}$ quan:	4 pos. p: 6 $\frac{2}{3}$ quan:
5 $\frac{2}{3}$ quan: æqualis 68	5 $\frac{2}{3}$ quan: æqualis 68
5 quan: æqual. 36 p: 3 pos.	5 quan: æqual. 36 p: 3 pos.
5 quan: p: 100 æqual. 20 pos.	5 quan: p: 100 æqual. 20 pos.
5 quan: p: 20 pos. æqual.	5 quan: p: 20 pos. æqual.
5 quan: p: 3 pos. p: 136	5 quan: p: 3 pos. p: 136
17 pos. æquales 136	17 pos. æquales 136

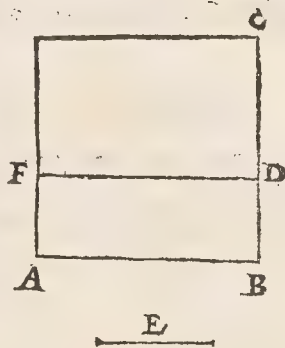
De secunda quantitate incognita multiplicata. Cap. X.



Um uero duæ quantitates incognitæ multiplicantur, aut in se ducantur, quatuor fient modi, quorum maior pars tria habet membra.

DEMONSTRATIO.

Primus est, cum quadratum unius, & quantitates ipsæ comparantur. Sit igitur primo quadratum AC , cuius latus AB , æquale duplo AB & quintuplo E , gratia exempli, igitur posita BD æquali numero rerum, scilicet 2, erit AD æquale duplo AB , igitur CF æquatur quintuplo E , quare ex 15^a sexti elementorum, AB ad E , ut 5 ad CD , est autem AB positio, & CD positio $m:2$, & 5 numerus cognitus, quare regula est.



REGULA.

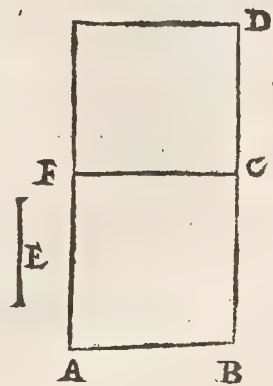
Posita re quantalibet, duc eam in se, detracto numero rerum, & quod exit, diuide per numerum ignotæ quantitatæ, exhibit æstimatio ignotæ quantitatæ. Exemplum, ponatur res 7, ducatur in 2 $m:se$, quia positum fuit, ut æquaretur duabus rebus, & quinque quantitatibus, fiet 35, diuide 35, per 5 numerum quantitatum, exit quan: etiam 7, & si ponatur res 10, ducemus eam in 2 $m: id est in 8$, & fiet 80, unde diuiso 80 per 5, exit 16, quantitas 2^a. Quod si quantitas 2^a ponatur cognita, multiplicabimus eam per suum numerum, & producto addemus quadratum dimidij ipsius numeri rerum, & radix totius, addito dimidio numeri rerum, est æstimatio rei. Exemplum, sit 2^a quantitas 16, ducemus in 5 fit 80, adde 1, quadratum dimidij numeri rerum, fit 81, huius Rx est 9, cui addito dimidio numeri rerum fit 10, quantitas ipsius rei.

DEMONSTRATIO.

Rursus, sit decuplum AB , æquale quadrato AB & septuplo E , gratia exempli, & sit quadratum AB superficies AC & BD sit 10, igitur septuplū E æquale est FD superficiei, & ut in precedenti, AB ad E , sic 7 ad CD , quare regula est, cum res æquantur quadrato rei & quantitatibus.

REGULA.

Positam rem quantamcūq; libuerit, minuemus ex numero rerum, & ducemus eam in residuum, productum diuidemus cum numero quantitatum, quod exit est quantita



F 3 tis

tis æstimatio. Exemplum, ponatur hoc in casu res 8, minue ex 10 numero rerum, relinquuntur 2, quos duc in 8, fit 16, diuide per 7 numerum quantitatum, exit $2\frac{2}{7}$ æstimatio quantitatis, quod si secunda quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum suum, & quod producitur, à quadrato dimidij numeri rerum minuemus, & radix residui, addita uel detracta, à numeri rerum dimidio, ostendit æstimationem rei. Exemplum, ponatur quantitas secunda $2\frac{2}{7}$, ducatur in 7 numerum quantitatum, fit 16, abijce hunc numerum ex 25, quadrato dimidij 10 numeri rerum, & relinquitur 9, cuius radix addita uel detracta à 5, dimidio 10 numeri rerum, ostendit 8 uel 2, æstimationes ipsius rei.

DEMONSTRATIO.

- 3 Sit etiam E numerus, æqualis quadrato AB, quod est AC, & numero AB qui est superficies FD, posita igitur AB prima, numero E secunda, E tertia, BD quarta, erit proportio AB ad E, ut numeri E ad BD, quare regula erit, cum quantitates æquantur rebus & quadrato rerum.

REGULA.

Posita rem quantamcunque libuerit, ducemus in aggregatum ex ipsa & suo numero, & productum diuidemus per numerum quantitatum, & quod exit est æstimatio quantitatis. Exemplum, 5 quantitates æquatur 7 rebus, & quadrato rei, & res est 3, dicemus igitur, duc 3 in 10, aggregatum 3 æstimationis rei & 7 numeri rerum, fit 30, diuide per 5, numerum quantitatum, exit 6, æstimatio quantitatis. Quod si quantitas secunda sit cognita, ducemus eam in suum numerum, & producto addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius, detracto dimidio numeri rerum, est æstimatio rei. Exemplum, ponatur 6, quantitatis æstimatio, quando 5 quantitates æquales sunt 7 rebus, & quadrato rei, duc igitur 6 æstimationem quantitatum in 5, numerum quantitatum, fit 30, adde his quadratum $3\frac{1}{2}$ dimidij 7 numeri rerum, scilicet $42\frac{1}{4}$, ab huius radice, quæ est $6\frac{1}{2}$, si auferas $3\frac{1}{2}$, dimidium numeri rerum, relinquetur 3 æstimatio rei.

Not^m. Solemus autem his uti positionibus, cum duorum numerorum, qui ab initio ponuntur, nulla exprimitur comparatio, nec in aggregato, nec in differentia, nec in multiplicatione, nec in diuisione, seu proportionem, nec in radice, his enim quinque modis comparantur numeri, quare si unus consistat, nulla est secundæ quantitatis utilitas, sed una positione quæstio soluitur.

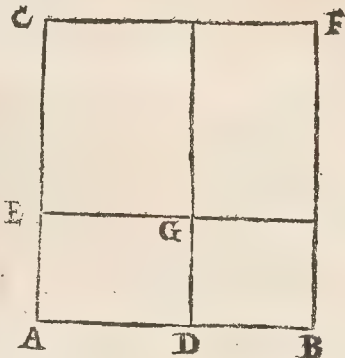
DEMONSTRATIO.

- 4 Quod si productum, ex re in quantitatem, quantitatis & rebus comparetur, consurgent duo modi tantum, aut enim tale productum, quan-

quantitatibus & rebus æquabitur, aut res æquabuntur producto & quantitatibus, sit & res AB , quantitas AC , numerus quantitatium AD , numerus rerum AE , erunt igitur ex supposito, duæ superficies DC , & BE , æquales AF , est autem AF æqualis quatuor superficiebus, GA , GB , GC , GF , igitur hæ quatuor superficies, æquales sunt superficiebus DC & BE , detractis itaq; æqualiter tribus superficiebus GA , GB , GC , relinquetur altera GA , æqualis GF , quare ex 15^a sexti elementorum, AD ad DB , ut CE ut E A , proportio igitur numeri quantitatium, ad residuum ex re, ut residui quantitatis, ablato numero rerum, ad numerum rerum, secundum hoc erit regula.

REGULA.

Si nota fuerit res, abijciemus ex ea numerum quantitatū, & cum residuo diuidemus productum, ex numero rerum in numerum quantitatium, quod exit, est addendum numero rerum, & totum est quantitas. Exemplum, sint 10 res & 12 quantitates, æquales producto rei in quantitatē, & sit quantitas 18, tunc abijcies econtra, 10 numerum rerum, ex 18 quantitate, & relinquitur 8, cum quo diuide 120, productum ex 10 rerum numero, in 12 quantitatium numerum, & exit 15, quem adde, ad 12 numerum quantitatium, fit 27, rei æstimatio, unde 10 res, sunt 270, & 12 quantitates sunt 216, quæ iuncta faciunt 486, productum 18 quantitatis in 27 rem, & ita posuimus exemplum, regulæ conuersum, ut intelligas unam & eandem esse rationem. Quod si productum ipsum cognitum sit, diuide ipsum productum per numerum quantitatium, si sit minor numero rerum, aut per numerum rerū, si ille sit minor numero quantitatium, & dimidium exeuntis, duc in se, à quo abijce illud, quod prouenit, diuiso producto ex numero maiore in productum quantitatis, in rem, per numerum minorem, seu numerus rerum sit maior, seu minor, & R^{es} residui, addita uel detracta, ab eo quod in se duxeras, ostendit æstimationem quantitatis, aut rei scilicet, quæ minore numero describitur, inde diuiso per eam producto, exit illa, quæ est maiore numero definita. Exemplum 2 res & 6 quantitates, æquales sunt quantitati rei, quæ est, gratia exempli 64, diuido 64 per 2, minorem quàm 6, exit 32, cuius dimidiū 16, in se duco, & fit 256, abijcio ex hoc, 192, qui prouenit, diuiso



res	quan:	productū
2	6	64
	32	
	16	256
6	64	192
		64
	384	8
	2	
	192	

384 producto 6, in 64, per 2, relinquuntur 64, cuius radix est 8, quæ addita uel detracta à 16 numero, quem in se duxisti, ostendit rei æstimationem 8, uel 24, quare si res ualet 8, quantitas etiam erit 8, diuiso enim 64 per 8, exit 8, & si res ualet 24, quantitas est $2\frac{2}{3}$, diuiso 64 per 24, & in utroq; casu, 2 res & 6 quâtitates, equantur 64 quantitati rei.

DEMONSTRATIO.

- 5 Quod si latus unum, æquatur producto unius in alterum, & reliquo lateri, sit latus illud AB, & reliquum AE, numerus uero lateris AB est AC superficies, igitur EF, fit ex supposito, ex AE in suum numerum, eadem autem fit ex AB in EC, proportio igitur AB ad AE, ut numeri AE ad EC, est aut EC residuum AE quantitatis, & AC numeri rerum, quare regula erit.

REGULA.

Cum fuerint res æquales quantitati rei, & quantitatibus, & nota fuerit quantitas, minuemus eam ex numero rerum, deinde ducemus quantitatem in suum numerum, & productum diuidemus per tale residuum, quod exit, est æstimatio rei. Exemplum, 10 res, æquantur quantitati rei, & quatuor quantitatibus, & quantitas ipsa est 8, aufero 8 ex 10, relinquitur 2, duco etiam 8 quantitatem, in 4 numerum ipsius, fit 32, quem diuido per 2, residuum relictum, exit 16, æstimatio rei, & ubi prima detractio nequiret fieri, casus non potest in ueris numeris esse. Si uero nō quantitas, sed ipsa res, sit cognita, quia ex AB, in AC, fit, quantum ex AE in aggregatum ex AB et numero AE, diuidemus productum ex numero rerum in æstimationem rei, per aggregatum ex re & numero quantitatibus, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum, 10 res æquantur quantitati rei, & 4 quantitatibus, & res est 16, duco 16 rem in 10 numerum rerum, fit 160, diuido per 20 aggregatum ex 4 numero quantitatibus & 16 rei æstimatione, exit 8, æstimatio quantitatis, si uero quantitas rei cognita esset, duces talem quantitatem rei, in numerum quantitatibus, & productum diuides per numerum rerum, cui exeunti, adde quadratum dimidij eius, quod exit, diuisa quantitate rei per numerum rerum, & radix aggregati, addito dimidio, quod prius in se duxeras, est rei æstimatio. Exemplum, sint 4 res æquales 5 quantitatibus, & quantitati rei, quæ sit 45, ducam 45, per 5 numerum quantitatibus, fit 225, diuido per 4 numerum rerum, exit $56\frac{1}{4}$, cui addo $31\frac{41}{64}$ quadratum $5\frac{5}{8}$, dimidij prouentus 45 diuisi per 4, & fit totum $87\frac{57}{64}$, cuius radici quæ est $9\frac{3}{8}$, si addantur $5\frac{5}{8}$ dimidium prouentus diuisionis, fiet 15 res.

DEMONSTRATIO.

- 6 Cum uero quadratum rei, & quantitas rei, & res, inuicem comparantur,

rantur, fiunt modi tres, primus est, cum quadratū rei, æquale est quantitatibus rerum & rebus, & sit AB res, cuius quadratum AC , & sit BF quantitas, & AD quantitates rerum, & erit, ut quoties BF in BD continetur, totus sit numerus quantitatis rei, DC igitur erit rerum numerus, quia igitur BC æqualis est AB , & CD est numerus rerum, erit ut detracto numero rerum ex re, relinquatur BD , productum ex numero quantitatis rei, in quantitatem, unde regula.

REGULA.

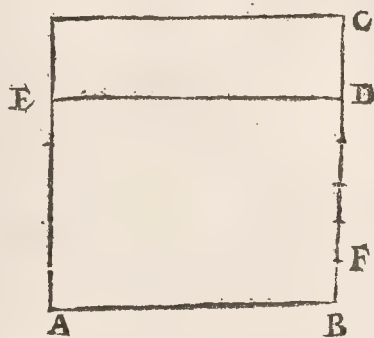
Cum quadratum rei æquatur rebus, & quantitatibus rerum, si res est cognita, auferemus ex ea numerum rerum, residuum diuidemus per numerum quantitatis rei, & prodibit quantitas. Exemplum, 10 res cum 4 quantitatibus rerum, æquantur quadrato rei, & res est 30, aufero 10 ex 30, relinquitur 20, quem diuido per 4, numerum quantitatis rei, & exit 5, æstimatio quantitatis. Quod si quantitas nota sit, ducemus eam in numerum quantitatis rei, & producto addemus numerum rerum, & conflabitur rei æstimatio. Exemplū, 10 res & 4 quantitates rei, æquantur quadrato rei, & quantitas est 7, ducemus 7 in 4 numerum quantitatis, & fiet 28, cui addemus 10 numerum rerum, fiet æstimatio rei 38. Si uero productum ex re in quantitatem cognitum fuerit, ducemus ipsum in numerum quantitatum rerum, & ei addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius cum dimidio numeri rerum superaddito, est æstimatio rei. Exemplū, quadratū rei æquatur 10 rebus, & quatuor quantitatibus rerum, & quantitas rei est 50, ducemus 50 in 4 numerum suum, id est quantitatum rerū, & fit 200, cui addemus 25, quadratum dimidij 10 numeri rerum, fit 225, cuius radici addo 5, dimidium numeri rerum, & fit 20, rei æstimatio, unde diuiso 50 producto rei, in quantitatem exit $2\frac{1}{2}$, æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei & numero rerum, ponemus rem AB , & quantitatem BC , & quantitas rei AC , ea causa necessario erit & DC numerus rerum, & AD erit aggregatum quadratorum, igitur detracta DC ex BC , relinquetur BD , qua diuisa per numerum quadratorum, prodibit BF æqualis AB , regula igitur est.

REGULA.

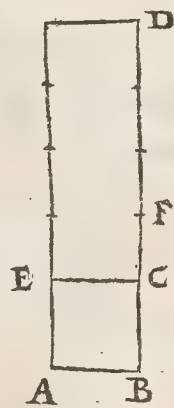
Cum fuerit quantitas rei, æqualis quadratis rei & numero



mero rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in numerum quadratorum, & producto addemus numerum rerum, & conflabitur quantitas. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei, & 10 rebus, & res est 4, duc 4 in 6 numerum quadratorum, fit 24, adde ei 10, numerum rerum, fit 34, æstimatio quantitat. Quod si quantitas cognita sit, auferemus ex ea numerum rerum, & residuum diuidemus per numerum quadratorum rerum, quod exit, est æstimatio rei. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei, & 10 rebus, & quantitas ipsa est 34, aufero 10 de 34, relinquitur 24, quem diuido per 6, numerum quadratorum, exit 4, æstimatio rei. Si uero quantitas rei cognita sit, diuidemus eam per numerum quadratorum, & prodeunti addemus quadratum dimidij eius, quod exit diuiso numero rerum per numerum quadratorum rerum, & radix totius, cum detractum fuerit idem dimidium, crit rei æstimatio. Exemplum. Quantitas rei æquatur 6 quadratis rei, & 60 rebus, & quantitas rei est 1200, diuide 1200 per 6 numerum quadratorum rei, exit 200, cui addo 25, quadratum 5, dimidij prouentus 60 numeri rerum, diuisi per 6 numerum quadratorum, fit 225, à cuius radice, quæ est 15, aufero 5 dimidium ipsius prouentus, & relinquetur 10, rei æstimatio, inde diuiso 1200, qui est quantitas rei, prodit 120 æstimatio quantitat.

DEMONSTRATIO.

- § Quod si numerus rerum, sit æqualis quadrato rei & quantitatibus rerum (etenim ad unum quadratum, uel ad unam quantitatē rei, per cōmunem diuisionē, semper, ut in uniuersis dictū est capitulis, reducere licet) ponemus A B rem, qdratum eius A C, numerū rerū B D, erit igitur E D numerus quantitat. rei, & C D numerus productus ex numero quantitatū in quantitatem, quæ sit C F, quia igitur C D, est residuum A B & B D, erit regula hæc. REGULA.



Cum fuerit numerus rerum, æqualis quantitatibus rerum, & quadrato rei, & fuerit res cognita, auferemus eam ex suo numero, & residuum diuidemus per quantitat. rei numerum, quod exit, est quantitat. æstimatio. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato rei, & tribus quantitatibus rei, & res est 4, auferemus 4 ex 10, relinquantur 6, diuido per 3, numerum quantitat. rei, exit 2, æstimatio quantitat. Si uero quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum quantitat. rei, & productum auferemus ex numero rerum, residuum est rei æstimatio. Exemplum, 10 res æquantur quadrato rei, & producto rei in quantitatē ter, & quantitas est 2, duce-

ducemus igitur 2 æstimationem quantitatis, in 3, numerum quantitatis rei, & producitur 6, quem aufero ex 10, numero rerum, relinquitur 4, æstimatio rei. Si uero productum ex re, in quantitatem, cognitum fuerit, ducemus illud in numerum suum, & productum auferemus à quadrato dimidij numeri rerum, & radix residui addita uel detracta, ab ipso dimidio numeri rerum, ostendit æstimationem rei. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato rei, & 3 quantitatibus rerum, & quantitas rei est 8, ducam 8 in 3, numerum quantitatis rei, fit 24, hunc abijciemus ex 25, quadrato 5 dimidij 10, relinquitur 1, cuius R², quæ est 1, addita uel detracta ex 5, ostendit 6, uel 4, æstimationes rei, unde diuiso 8 quantitate rei, per 6, uel per 4, exit $1\frac{1}{3}$ uel 2, æstimatio quantitatis.

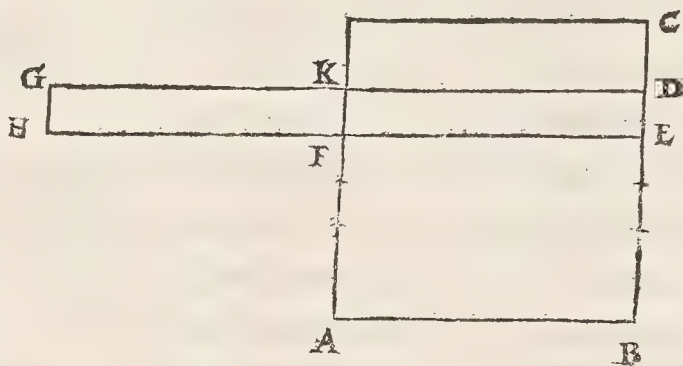
DEMONSTRATIO.

Quod si quadratum rei, & quantitas rei, & quantitas, inuicem 9 comparentur, confurgunt tres alij modi, sit igitur primo quadratum rei, æquale quantitatibus rerum, & numero quantitatum, & ponatur A B res ipsa, cuius quadratum A C, æquale sit quantitatibus rerum (quæ sint A D, ita ut D E, sit quantitas) & numero quantitatum D E, qui sit F H, eritq; superficies G F, æq^ualis ex supposito, superficiei C K, quare ex 15^o 6^o elementorum A B, ad D E, uelut H F, ad D C, est aut A B res, D E quantitas, H F numerus quantitatum, C D residuum rei, & producti ex numero quantitatis rei, in ipsum quantitatem, quare regula est.

REGULA.

Cum quadratum rei, æquale fuerit productis, ex quantitate in rem & in numerum, fueritq; res ipsa cognita, ducemus rem in numerum quantitatum rerum, & producto addemus numerum quantitatum, & cum aggregato diuidemus quadratum rei, prouentus est æstimatio quantitatis. Exemplum, quadratum rei, æquale sit sex quantitatibus rerum, & 20 quantitatibus, & ipsa res sit 12, duco 12, in 6 numerum quantitatis rei, fit 72, cui addo 20 numerum quantitatum, fit 92, cum hoc diuido 144 quadratum rei, exit $1\frac{2}{3}$, quantitas ipsa, si uero quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum suum, & seruabimus productum, deinde ducemus eandem in numerum quantitatis rerum, huiusq; producti dimidium, in se ductum, addemus priori producto & radici, ipsius aggregati, adijciemus dimidium quod in se duxera-

G 2 mus,



mus, & totum est æstimatio rei. Exemplum, Quadratum rei, æquale sit 12 quantitibus, & 5 quantitibus rei, & quantitas ipsa est 2, ducam 2 quantitatem, in 12 numerum suum, fit 24, deinde ducam eandem quantitatem 2, in 5 numerum quantitatis rei, & fit 10, huius dimidium quod est 5, duco in se, fit 25, addo ad 24, iam seruatum, fit 49, huius radici quæ est 7, addo idem dimidium quod est 5, fit 12, æstimatio rei. Vbi autem nota esset quantitas rei (& est in figura superficies E K) ducemus eam in suum numerum, & producti tertiam partem, ad cubum reducemus, ducemus & quantitatem rei in numerum quantitatum, & dimidium producti in se multiplicabimus, & ab hoc auferemus partem, quam ad cubum duxeramus, id est cubum ipsum, tertiæ partis, primi producti, quem seruasti, & radicem huius residui, addemus & minuemus, à dimidio secundi producti, & radices cubicæ aggregati, & residui simul iunctæ, sunt æstimatio rei. Exemplum. Quadratum rei, æquale est 12 quantitibus, & 2 quantitibus rei, & quantitas rei est 24, ducam 2, in 24, fit 48, huius tertiam partem, quæ est 16, ducam ad cubum, fit 4096, ducam etiam 24 in 12, fit 288, cuius medietatē in se duco, & fit 144 medietas, & eius quadratum, 20736, ab hoc aufero 4096, relinquitur 16640, cuius radicem addo & minuo à 144, fiūt 144 p: R 16640 & 144 m: R 16640, horum radices cubicæ iunctæ, sunt rei æstimatio.

Quad. rei.	Quan:	Quan: rei
	12	2
Quan: rei		24
	288	48
	144	16
	20736 —	4096
	16640	
	144 p: R	16640
	144 m: R	16640

Quòd si ex numero, per æqualia diuidendo, sumpta medietas, nō producat quadratum æquale, aut maius cubo tertiæ partis primi producti, operaberis per residuum regulæ capituli, cubi æqualis rebus & numero, nam facta multiplicatiōe per productum, ut in exemplo per 24, qui numerus est quantitas rei, erit cubus æqualis rebus & numero, rebus quidem productis ex quantitate rei in numerum suum, numero autem producto ex quantitate rei in numerum quantitatum, ut in exemplo dictum est, quod quadratum rei æquale fuit 2 quantitibus rei, & 12 & quantitibus, & quod quantitas rei est 24, dicemus igitur cubus æquatur 48 rebus, p: 288 numero, & 48 producit ex 24 in 2, & 288 ex 24 in 12, ergo ponamus quod quadratum rei, æquale sit 2 quantitibus rei & 3 quantitibus, & quantitas rei sit 8, ducemus 8 in 2, & 3, & producentur 16 & 24, igitur cubus æquabitur 16 rebus

rebus $p:24$, & res ualet $R:13$ $p:1$, ex capitulo suo, inde diuiso 8 quantitate rei, per $R:13$ $p:1$, exit $R:5\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quantitas ipsa, est autem quadratum $R:13$ $p:1$, hoc 14 $p:R:52$ & quantitas rei est $R:75\frac{1}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, & est 8, cuius duplum est 16, & tres quantitates sunt, $R:52$ m: 2, quæ iunctæ cum 16, duplo quantitatis rei, faciunt 14 $p:R:52$, quadratum rei.

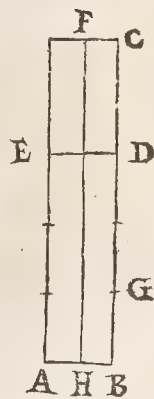
Nota quod in hac regula, semper res est media proportionalis, Not^m 1 inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum, & producto rei in numerum quantitatis rei, ut in exemplo, $R:13$ $p:1$, quæ est res, est proportionalis inter $R:5\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quæ est quantitas, & $R:52$ $p:5$, qui constat ex 3, numero quantitatum, & producto ex $R:13$ $p:1$, re ipsa, in 2, numerum quantitatis rei.

Nota etiam, quod regula hæc pendet ex capitulo cubi æqualis re Not^m bus & numero, uelut sequens, ex capitulo cubi & numeri æqualium secundum rebus, & ultima, ex capitulo cubi & rerum æqualium numero.

Nota etiam, quod res est eadē, quæ queritur in capitulo cubi æq^u Not^m lis rebus & numero, sed quantitas, est numerus, qui provenit diuiso tertium, quocunque numero, per rem ipsam, nam eidem capitulo, cubi æqualis rebus & numero, competit una sola res, sed infinitæ quantitates, uelut dictum est hic, quod res est $R:13$ $p:1$, & diuissimus 8, quantitatem rei, si autem ponatur cubus æqualis 16 rebus & 24 numero, erit res semper $R:13$ $p:1$, sed posita quantitate rei 4, erit numerus quantitatis 6, & quantitatis rei 4, & quantitas $R:1\frac{4}{9}$ m: $\frac{2}{3}$.

DEMONSTRATIO.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei, & quantitatibus, 10 ponemus A B rem, & quantitatem B C, & numerum quadratorum, secundum quem B G, æqualis A B, continetur in B D, & erunt quadrata A D, iuncta, & E C residuum, æquale numero quantitatum, & sit numerus quantitatum F C, erit igitur F B, æqualis E C, quare B C quantitatis, ad A B rem, ut D C residui rei, ductæ in numerum quadratorum, à quantitate ad E C F numerum quantitatum, erit etiam ex hoc E B residuum, æquale A F residuo, quare A B media proportionalis inter A H & B C, diuissam secundum numerum, secundum quem B G continetur in B D.



Nota igitur, quod in hac tota regula, res media proportionalis est, inter quantitatem diuissam, per numerum quadratorum, & residuum rei & numeri quantitatum.

G 3

R E G V

HIERONYMI CARDANI

REGULA.

Regula igitur est, cū quantitas rei, æqualis fuerit quadratis rei & quantitatibus, & res nota fuerit, ducemus eam in se, deinde in numerum quadratorum, & productum diuidemus, per residuum rei à numero quantitatum, & quod exit, est quantitas. Exemplum, Quan: rei æquatur tribus quadratis rei, & 12 quantitatibus, & sit res 20, gratia exempli, duco 20 in se, fit 400, duco 400 in 3 numerum quadratorum, fit 1200, diuido 1200, per 8, differentiam rei & numeri quantitatum, exit 150, quantitas ipsa. Si uero quantitas ipsa cognita sit, non res, duc eam in numerum quantitatum, & productum diuide per numerum quadratorum, quod exit, abijce ex quadrato dimidij prouentus quantitatē diuisæ per numerum quadratorum, & radix residui, addita uel detracta, à dimidio eiusdem prouentus, ostendit æstimationem rei. Exemplum, Quantitas rei, æqualis est 4 quadratis rei, & 3 quantitatibus, & quantitas ipsa est 50, duc 50 in 3 numerum quantitatum, fit 150, diuide 150, per 4 numerum quadratorum, exit 37 $\frac{1}{2}$, deinde diuide 50, per 4, scilicet quantitatē per numerum quadratorum, exit 12 $\frac{1}{2}$, huius dimidium, quod est 6 $\frac{1}{4}$, duc in se, fit 39 $\frac{1}{16}$, à quo abijce 37 $\frac{1}{2}$, relinquuntur 1 $\frac{2}{16}$, cuius radix est 1 $\frac{1}{4}$, quæ addita uel detracta à 6 $\frac{1}{4}$, ostendit æstimationes rei, 7 $\frac{1}{2}$, uel 5. Si autem productum seu quantitas rei cognita sit, ducemus quantitatē rei in numerū quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, exiēs est numerus, qui cū cubo æquatur tot rebus, quotus est numerus qui prouenit diuisa quantitate rei per numerum quadratorum. Exemplum, Quantitas rei, quæ sit 1500, æqualis est 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, ducemus igitur 6 in 1500, fit 9000, diuide per 4 numerum quadratorum, exit 2250, numerus, qui cum cubo æquatur 375 rebus, est autem 375 numerus, qui prouenit, diuiso 1500 numero quantitatē rei, per 4 numerum quadratorum, per capitulum autem suum, res ualet 10, uel 300 m: 5, & uterq; istorum numerorum, potest esse rei æstimatio, in casu isto, quando quant^{as} rei, quæ est 1500, æquatur 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, & æstimatio quantitatē habetur, diuiso 1500 qui est æstimatio quantitatē rei, per alteram æstimationem rei.

Quan: rei	Quad. rei	Quan:
1500	4	6
	375	1500
2250		1000

DEMONSTRATIO.

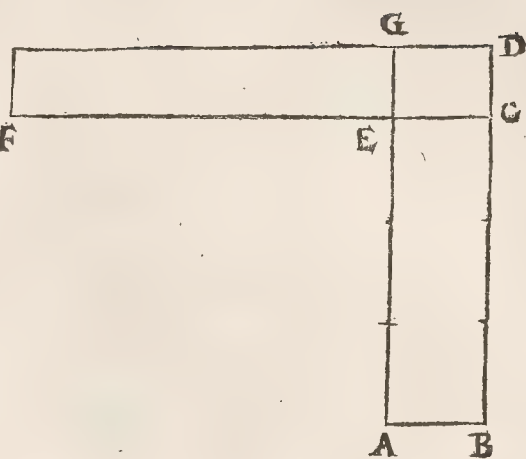
- 11 Cum uero quantitates c d, in numero c f, æquales fuerint quadratis a b rei, & quantitati rei d e, reducendo ad unam quantitatē rei, erit

erit detracta communi superficie DE, superficies GF æqualis AC, quare quadratum AB, per primam sexti elementorum, æquale superficiei, ex EG in partem EF talem, qualis AB, est pars BC, igitur ex 16^a 6^a elementorum, AB media est inter DC & partem illam ex EF, unde regula.

REGULA.

Cum fuerint quantitates, æquales quantitati rei, & quadratis rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in se, deinde productum in numerum quadratorum, & diuidemus, quod producit ultimo, per numerum quantitatum, detracta re, & exhibet quantitas. Exemplum, 12 quantitates, æquantur quantitati rei, & tribus quadratis rei, & res est 4, ducam 4 in se, fit 16, ducam 16 in 3, numerum quadratorum rei, fit 48, diuidam 48, per 12 numerum quantitatum, detracto 4 re, & est diuidere per 8, exit 6, quantitas ipsa. Si uero quantitas cognita sit, duc eam in numerum suum, & productum diuide per numerum quadratorum rei, ei prouentui adde quadratum dimidij eius, quod prouenit, diuisa quantitate per numerum quadratorum, & radix totius, detracto eodem dimidio, est æstimatio rei. Exemplum, 12 quant^{tes} æquantur quan^{ti} rei, & 3 quadratis rei, & quantitas est 6, duco 12 in 6, fit 72, diuido per 3 numerum qdratorum, fit 24, deinde diuido 6 quantitatē, per 3 numerum qdratorum, exit 2, cuius dimidium quod est 1, duco in se fit etiam 1, addo ad 24, fit 25, cuius R^{ex} 5, detracto 1, dimidio 2, relinquit 4, æstimationem rei. Si uero quant^{tas} rei nota sit, ducemus eam in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, & quod exit, est numerus qui æquatur cubo & rebus, quarum numerus est id, quod prouenit diuisa quantitate rei, per numerum quadratorum, inde equatio rei, est æstimatio quæsita, unde diuisa quan^{te} rei, per æstimationē rei, exhibet æquatio quantitatis.

Exemplum, 12 res, æquales sunt quan^{ti} rei, & 3 quad. rei, & quant^{tas} rei, est 24, duco 24 in 12, fit 288, diuido per 3, exit 96, deinde diuido 24 per idem 3, numerum quad. rei, exit 8, igitur cubus p: 8 rebus, æquatur 96, tunc uero per capitulum suum, res ualet 4. Ideo 4 est rei æsti^{matio}



Quad. rei	Quan: rei	Quan:
3	24	12
8	288	
96		

æstimatio, cum quo diuide 24 quantitatem rei, exit 6 quantitas ipsa.
 Not^m. Scias, quòd quodlibet capitulum, seu regula ex præcedentibus, habet omnes proprietates contentas in eadem regula, in singulis modis, quamuis modo utamur una, modo alia, secundum quòd illud quod est notum, aliud fit. Exemplum, in decima regula sunt quinque proprietates. PRIM^A, quòd proportio quantitatis ad rem, est ut ducta re in numerum quadratorum, & detracta quantitate, ad numerum quantitatum. SEC^{UND}A, quòd res est proportionalis, inter quantitatem diuisam per numerum quadratorum, & differentiam rei à numero quantitatum. TER^{TI}A, quòd ducta re in se, & post in numerum quadratorum, ducto quadrato, tantum fit, quantum ex quantitate in residuum rei & numeri quantitatum. QU^{ART}A & QU^{INT}A, sunt reliqui duo modi procedendi illius regulæ, ad inuentionem rei, horum exempla in quæstionibus subiungere libuit.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta, sint 100, & productum unius in alterum duplum sit aggregato eorū. Ponemus primum rem, secundum quantitatem, igitur quantitas rei, æqualis est 2 rebus, & 2 quantitibus, quare ex 4^a regula, proportio residui rei, ad 2, ut 2 ad residuum quantitatis, igitur erunt tres quantitates proportionales, residuum rei, 2, & residuum quantitatis, res autem constat ex suo residuo & 2, sed quantitas ex suo residuo & 2, igitur res est aggregatū primæ & secundæ trium quantitatum proportionalium, & quantitas aggregatum secundæ & tertiæ, igitur ex dictis in capitulo trium quantitatum proportionalium, quadratum aggregati primæ & secundæ cum quadrato aggregati secundæ & tertiæ, & cum quadrato secundæ, æquantur quadrato aggregati ipsarum trium quantitatum, at uero quadratum aggregati primæ & secundæ & quadratum aggregati secundæ & tertiæ ex supposito faciunt 100, & quadratum secundæ est 4, quia 2^a quantitas proportionalis fuit 2, igitur quadratum aggregati omnium trium quantitatum est 104, igitur tres quantitates ipsæ iunctæ, sunt R^x 104, & quia 2^a est 2, erunt reliquæ, scilicet prima & tertia, R^x 104 m: 2, fac igitur ex R^x 104 m: 2, duas partes, producentes 4, quadratum 2, & erunt R^x 26 m: 1 p: R^x v: 23 m: R^x 104, & R^x 26 m: 1 m: R^x v: 23, m: R^x 104, & quia res cōstat ex prima & secunda proportionali, & quātitas ex 3^a & 2^a pportionali, erit igitur ut addamus 2 utriq; parti, scilicet secundam quantitatem, & fiet res R^x 26 p. 1 p: R^x v: 23 m: R^x 104, & quātitas R^x 26 p: 1 m: R^x v: 23 m: R^x 104, horū qdrata iuncta sunt 100, præcise, & productum unius in alterum est R^x 416

p:4, duplum aggregati eorū,
uia uero comuni procedēdo,
peruenires ad partes has, quas
uides infra, liquet autem quod
illæ confusæ magis sunt, quam
uis superioribus æquiualeant.

Rz 26 p:1 p:Rz V:23 m:Rz 104	Rz 26 p:1 p:Rz V:23 m:Rz 104
Rz 26 p:1 m:Rz V:23 m:Rz 104	Rz 26 p:1 m:Rz V:23 m:Rz 104
Rz V ^{ma} 50 p:Rz V:2068 m:Rz 26624	Rz V ^{ma} 50 p:Rz V:2068 m:Rz 26624
Rz V ^{ma} 50 m:Rz V:2068 m:Rz 26624	Rz V ^{ma} 50 m:Rz V:2068 m:Rz 26624

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, quorum q̄drata iuncta sint 100, & quadratum maioris, æquale sit ductui maioris in minorem quater cum octuplo maioris. Ponemus maiorem rem, minorem quantitatē, eritq̄ quadratum rei, æquale 4 quantitatibus rei & 8 rebus, quare ex 6^a regula, auferemus 8 ex re, & fiet residuum res m:8, unde diuisum per 4 exhibit $\frac{1}{4}$ rei m:2, & hæc est quantitas quadrata, igitur rei & $\frac{1}{4}$ rei m:2 æqualia sunt 100, quare $1 \frac{1}{16}$ quad. p:4 m:1 re, æq̄bitur 100, & quadratum æquabitur $\frac{16}{17}$ rei, & 90 $\frac{6}{17}$, quare res est Rz 90 $\frac{166}{289}$ p: $\frac{8}{17}$, & quantitas est $\frac{1}{4}$ huius m:2, scilicet Rz $5 \frac{121}{289}$ m: $1 \frac{15}{17}$.

QVÆSTIO III.

Inuenias duos numeros, quorum q̄drata iuncta sint 100, & productum unius in alterum, æquale sit triplo quadrati minoris, & sexcuplo eiusdem minoris. Ponemus rem minorem numerum, & quantitatē maiorem, igitur quantitas rei, æquatur 3 q̄dratis rei & 6 rebus, quare ex 7^a regula, quantitas est 3 res p:6 quadrata, igitur rei & triū rerum p:6 iuncta sunt 100, igitur 10 quadrata p:36 rebus p:36, æquantur 100, & 1 q̄d. p: $3 \frac{3}{5}$ rei, æquatur 6 $\frac{2}{5}$, res igitur est, Rz $9 \frac{16}{25}$ m: $1 \frac{4}{5}$, & quantitas triplum huius p:6, id est Rz $86 \frac{12}{25}$ p: $\frac{3}{5}$.

QVÆSTIO IIII.

Fac de 20, tres partes proportionales, quarum mediæ quadratū, æquale sit duplo producti mediæ in minorem, & quadruplo minoris, posita media re, & minore quantitate, erit quadratum rei, æquale 2 quantitatibus rei, & 4 quantitatibus. Quare ex notando primo nonæ regulæ, res media est proportionalis, inter quantitatē & aggregatum ex numero quantitatū 4, ac producto rei in numerum quantitatē rei, scilicet 2, tertia igitur quantitas est 2 res p:4, quia igit̄ 3^a quantitas est 2 res p:4, & 2^a res, & hæc cum prima constituunt 10, erit prima 6 m:3 rebus, quare ducta prima in tertiam, fiet quadratum secundæ, igitur 1 q̄dratum æq̄tur 24 m: 6 q̄dratis, quare 7 q̄drata æquantur 24, & res est Rz $3 \frac{3}{7}$, & hæc est media, cuius duplum p:4 est tertia, uidelicet 4 p:Rz $1 \frac{5}{7}$, inde detracto aggregato secundæ & tertiæ ex 10

H

relin

relinquitur prima 6 m: & 30 $\frac{6}{7}$, hæ autem quantitates proportionales sunt, & quadratum secundæ est æquale duplo producti secundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

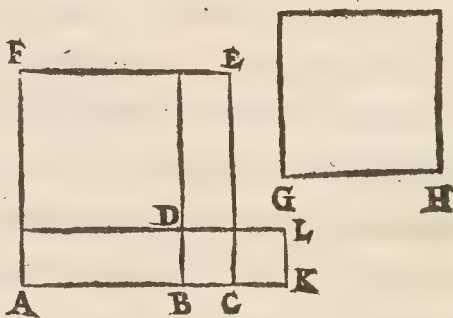
De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.



Cipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Maria Florido Veneto, qui cū in certamen cū Nicolao Tartalea Brixellense aliquando uenisset, occasionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quæsiuimus, eamq; in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiecimus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli causa cubus GH & sexcuplum lateris GH æquale 20, & ponam duos cubos AE & CL , quorum differentia sit 20, ita quod productum AC lateris, in CK latus, sit 2, tertia scilicet numeri rerum pars, & abscindam CB , æqualem CK , dico, quod si ita fuerit, lineam AB residuum, esse æqualem GH , & ideo rei æstimationem, nam de GH iam supponebatur, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi 6ⁱ capituli huius libri, corpora DA , DC , DE , DF , ut per DC intelligamus cubum BC , per DF cubum AB , per DA triplum CB in quadratum AB , per DE triplum AB in quadratum BC . quia igitur ex AC in CK sit 2, ex AC in CK ter, fiet 6 numerus rerum, igitur ex AB in triplum AC in CK fiunt 6 res AB , seu sexcuplum AB , quare triplum producti ex AB , BC , AC , est sexcuplum AB , at uero differentia cubi AC , à cubo CK , & existenti à cubo BC ei æq̃le ex supposito, est 20, & ex supposito primo 6ⁱ capituli, est aggregatum corporum DA , DE , DF , tria igitur hæc corpora sunt 20, posita uero BC m: cubus AB , æqualis est cubo AC , & triplo AC in quadratum CB , & cubo BC m: & triplo BC in quadratum AC m: per demonstrata illic, differentia autem tripli BC in quadratum AC , à triplo AC in quadratum BC est productum AB , BC , AC , quare cum hoc, ut demonstratum est, æquale sit sexcuplo AB , igitur addito sexcuplo AB , ad id quod fit ex AC in quadratum BC ter, fiet triplum BC in quadratum AC , cum igitur BC sit m: iam ostensum est, quod productum CB



in quadratum $A C$ ter, est m : & reliquum quod ei æquatur est p : igitur triplum $C B$ in quadratum $A B$, & triplum $A C$ in quadratum $C B$, & sexcuplū $A B$ nihil faciunt. Tanta igitur est differentia, ex cōmuni animi sententia, ipsius cubi $A C$, à cubo $B C$, quantum est quod cōflatur ex cubo $A C$, & triplo $A C$ in quadratum $C B$, & triplo $C B$ in quadratum $A C$ m : & cubo $B C$ m : & sexcuplo $A B$, hoc igitur est 20, quia differentia cubi $A C$, à cubo $C B$, fuit 20, quare per secundum suppositum 6ⁱ capituli, posita $B C$ m : cubus $A B$ æquabitur cubo $A C$, & triplo $A C$ in quadratum $B C$, & cubo $B C$ m : & triplo $B C$ in quadratum $A C$ m : cubus igitur $A B$, cum sexcuplo $A B$, per communem animi sententiam, cum æquetur cubo $A C$ & triplo $A C$ in quadratum $C B$, & triplo $C B$ in quadratum $A B$ m : & cubo $C B$ m : & sexcuplo $A B$, quæ iam æquatur 20, ut probatum est, æquabuntur etiam 20, cum igitur cubus $A B$ & sexcuplum $A B$ æquentur 20, & cubus $G H$, cum sexcuplo $G H$ æquentur 20, erit ex cōmuni animi sententia, & ex dictis, in 3⁵ pⁱ & 3¹ undecimi elementorum, $G H$ æqualis $A B$, igitur $G H$ est differentia $A C$ & $C B$, sunt autem $A C$ & $C B$, uel $A C$ & $C K$, numeri seu linie continentes superficiem, æqualem tertiæ parti numeri rerum, quarum cubi differunt in numero æquationis, quare habebimus regulam.

REGULA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, unīq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta Rz cubica Apotomæ ex Rz cubica sui Binomij, residuū quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatione.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est Rz 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiū Rz 108 p : 10, & Apotomen Rz 108 m : 10, horum accipe Rz^{cs} cub^{as} & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, Rz v: cub: Rz 108 p : 10 m : Rz v: cubica Rz 108 m : 10.

cub ⁹ p : 6 reb ⁹ æqlis 20	
2	20
8	10
	108
Rz 108 p : 10	
Rz 108 m : 10	
Rz v: cu. Rz 108 p : 10	
m : Rz v: cu. Rz 108 m : 10	

Aliud, cubus p : 3 rebus æquetur 10, duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1, duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1,

H 2 fiunt

fiunt 26, huius radici adde 5, & ab ea minue 5, habebis Binomium $\text{R} \times 26 \text{ p} : 5$, & Apotomen $\text{R} \times 26 \text{ m} : 5$, igitur rei æstimatio est $\text{R} \times \text{V} : \text{cubica} \text{R} \times 26 \text{ p} : 5 \text{ m} : \text{R} \times \text{V} : \text{cubica} \text{R} \times 26 \text{ m} : 5$, experientia sic habetur.

$\text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 26 \text{ p} : 5 \quad \text{m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 26 \text{ m} : 5$
 $\text{cubi partium Ra} : 26 \text{ p} : 5 \quad \text{m} : \quad \text{Ra} : 26 \text{ m} : 5$

hoc autem totum, ut liquet, est 10

Quad: partiū, $\text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} 51 \text{ p} : \text{R} \times 2600 \quad \text{R} \times \text{V} : \text{cu}^{\text{ca}} 51 \text{ m} : \text{R} \times 2600$
 triplicata q̄drata partium, $\text{R} \times \text{V} : \text{cub} : 1377 \text{ p} : \text{R} \times 1895400$
 $\text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} 1377 \text{ m} : \text{R} \times 1895400 \quad \text{partes ipsæ}$
 $\text{m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{R} \times 26 \text{ m} : 5. \quad \text{p} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{R} \times 26 \text{ p} : 5$

Producta partium in triplata quadratorum

$\text{p} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} 49299354 \text{ p} : 6885 \text{ m} : \text{Ra} : 47385000 \text{ m} : 7020$
 $\text{m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} 49299354 \text{ m} : 6885 \text{ m} : \text{Ra} : 47385000 \text{ p} : 7020$

Porro hæ $\text{Ra} : \text{cubica}$ quatuor nominibus constantes, ad duas reduci possunt, cum enim 6885 dempseris ex 7020, relinquetur 135, detracta etiam radice 47385000, ex radice 49299354, relinquitur $\text{Ra} : 18954$, igitur talia producta erunt $\text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 18954 \text{ m} : 135$
 $\text{m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 18954 \text{ p} : 135$, cubus igitur totus, ex demonstratis in 3^o libro est 10 $\text{p} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 18954 \text{ m} : 135 \text{ m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 18954 \text{ p} : 135$, at uero tres radices seu res sunt

$\text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 18954 \text{ p} : 135 \text{ m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 18954 \text{ m} : 135.$

Iunctis igitur omnibus simul, cum radices illæ uniuersales cubicæ mutuo se deleant, fiet aggregatum cubi & trium rerum, 10, ad unguem.

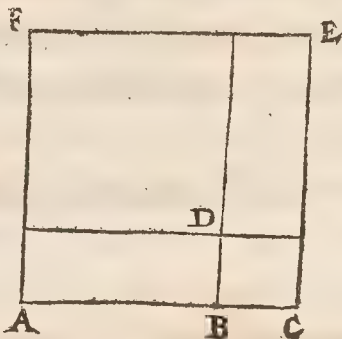
Exemplum tertium, cubus & 6 res æquantur 2, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum fit 8, duc 1 dimidium 2, ad quadratum fit 1, iunge 8 & 1, fiunt 9, huius radix est 3, ergo geminata 3, alteri adde 1 dimidium numeri, fiet 4, ab altero minue 1, similiter dimidium reliquum numeri, fit 2, minue igitur $\text{Ra} : \text{cubi minoris}$ ex maiore, habebis æstimationem rei, $\text{Ra} : \text{cubicam} 4 \text{ m} : \text{Ra} : \text{cubica} 2.$

Memento autem eius, quòd in capitulo de educenda cubica radice in libro tertio dixeramus, quandoq; radices illas uniuersales cubicas, numero integro, uel fracto æquipollere, ut in primo exemplo docuimus, nam $\text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 108 \text{ p} : 10 \text{ m} : \text{Ra} : \text{V} : \text{cubica} \text{Ra} : 108 \text{ m} : 10$, est 2 ut ibi ex regula patet, & ut experimento etiam notissimum est.

DEMONSTRATIO.



It etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi DC & DF , quorum latera AB & BC , producāt tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico AC esse rei quęsitę æstimationē, cum enim ex AB , in BC , fiat tertia pars numeri rerum, ex AB in BC ter, fiet numerus rerū, & ex AC in productum ex AB in BC ter, fient res ipsę, posita AC re, at ex AC in productum AB in BC ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex AB in quadratum BC , alia tria ex BC in quadratum AB , hæc igitur sex corpora, æqualia sunt rebus, ipsa uero cum cubis DC & DF , ex primo supposito capituli sexti constituunt cubum AE , cubi etiam DC & DF , æquivalent numero proposito, igitur cubus AE , æqualis est rebus & numero propositis, quod erat demonstrandum, superest ostendere, quod triplum AC in productum AB in BC , sit æquale sex corporibus, id ostendā, si probauero ex AB , in BC ducto in AC , fieri duo corpora ex AB in quadratum BC , & ex BC in quadratū AB , nam quod fit ex AC in productum AB in BC , æquale est ei, quod fit ex AB in superficiem BE , latera enim omnia omnibus sunt æqualia, sed hoc æquale est ei, quod fit ex AB in CD & DE , quod autem fit ex AB in DE , æquale est ei, quod fit ex CB in quadratum AB , quoniam latera omnia omnibus sunt æqualia, quod igitur ex AC , in productum AB in BC fit, æquale est his, quę fiunt ex AB in quadratum BC & ex BC in quadratum AB , quod est propositum.



REGULA.

Regula igitur est, cum cubus tertię partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidiij numeri æquationis, auferes ipsum ex eodem, & residui radicem, adde dimidio numeri æquationis, atq; iterum minue ab eodem dimidio, habebisq; ut dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum & cubicę iunctę rem ipsam constituunt. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p: 40, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum, fit 8, aufer ex 400, quadrato 20, dimidiij numeri, fit 392, huius radicē adijce ad 20, fit 20, p: & 392, detrahe etiam ab eodem, fit 20 m, & 392, horum & cubicę iunctę, faciunt rei æstimationem,

nem, & v: cubicam 20 p: & 392 p: & v: cubica 20 m: & 392. Aliud, cubus equatur 6 rebus p: 6, tertiam partem numeri rerum, quæ est 2, ad cubum, ducito, fit 8, detrahe ex 9 quadrato dimidij 6 numeri equationis, relinquitur 1, cuius & est 1, hanc adde & minue à 3, dimidio numeri, fiunt partes, 4 & 2, quarum & cubicæ iunctæ, faciunt & cubicam 4 p: & cubica 2, æstimationem rei.

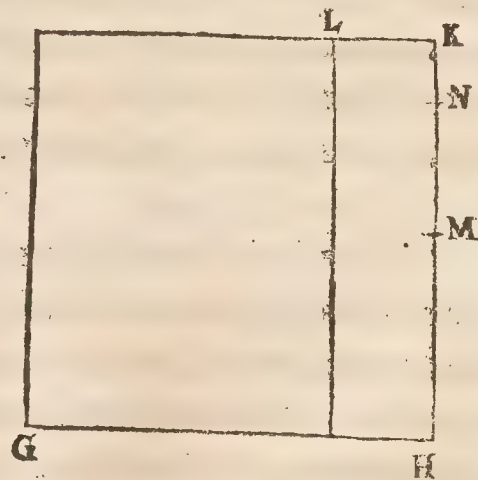
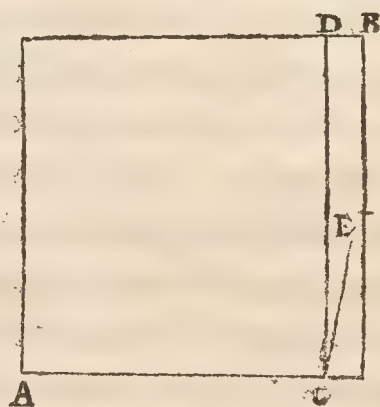
At ubi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quodocumq; numerus æquationis est minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, uel ubi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in & $\frac{1}{3}$ eiusdem numeri maior numerus numero equationis, tunc hoc dissoluitur per quæstionem Alizam, de qua in libro de quæstionibus Geometricis dictum est, sed si libet tantam effugere difficultatem, plerumq; capitulum 25^m huius tibi satisfaciet.

De cubo & numero æqualibus rebus. Cap. XIII.

DEMONSTRATIO.



Hoc capitulum ex præcedenti trahitur, sit igitur cubus GH, æqualis rebus AB, quæ describuntur quadrata superficie & numero F, & sit basis cubi GH, quadratū GK, cuius pars quarta sit HL, residuum autem æquale AD superficiem, latus autem, quod Græce tetragonicum uocant, residui CD sit CE, sit uero MK dimidium HK, à qua abscindatur MN, æqualis CE, dico quod tam HN, quàm NK, cubi, cum numero F, æquantur rebus AB, ut numerus rerum & equationis idem maneat, & primo ostendamus de HN, constat enim cubū HN continere latus suum, HN in quadrato HN, quadratum autem AB (quia GL æqualis est AD, & GL triplum est quadrati HM) æquale est triplo quadrati HM, & quadrato MN, hæc autem superant, ex 4² 2¹ elementorum, quadratum HN, in duplo HM in NK, quare in eo quod fit ex HK in NK, quia HK dupla est ad HM, cubus igitur HN, continet latus suum



F numerus.

HN

HN in superficie AB minus eo, quod fit ex HK in KN . At uero, quia cubus GK continebat res seu latera HK in quadrato HK , uel in quadrato AB , cum numero F , igitur ex communi animi sententia, F numerus æqualis est producto ex HK in differentiam quadratorum AB & GK , at differentia GK & AB est, quanta differentia HL & CB , quia AD est æqualis GL differentia autem HL & CB est, ut quadrati HM & MN , igitur ex differentia quadrati HM , & MN in HK , fit F numerus, at uero ex 4^a 2^a elementorum, differentia quadratorum HM , seu MK , & MN , est duplum MN in NK , cum quadrato NK , & ideo MN & MK in NK , & ideo HN in NK , igitur ex HK in productum HN in NK fit F numerus, addatur igitur F numerus, cubo HN , & ex alia parte productum ex HK in KN ductum in HN producto ex HN in superficiem AB , minus producto HK in KN , fiet cubus HN cum numero æqualis HN ductæ in AB , seu rebus ex AB , quod erat probandum. Similiter, quia differentia GK & AB , quæ est HN in KN , ducta in KN , producit F , differentia etiam AB & quadrati KN (cum AB sit æqualis quadratis HM & MK & MN , & ductui KM in MN) æqualis est differentiæ dupli KH in HN à quadrato NH , addito ei rectangulo HN in NK , at quod fit ex HN in NK cum quadrato NH , æquale est producto ex KH in HN , per 3^{am} 2^a elementorum, igitur quadratum AB superat quadratum NK in producto KH in HN semel, cum igitur numerus F , contineat NK in producto KH in HN , & cubus KN contineat KN in quadrato KN , erit, ut cubus KN cum numero F , seu cum producto ex KN in rectangulum KH in HN , æqualis producto AB in KN , igitur cubus KN cum eodem numero F , æqualis est AB numero rerum eidem. Ex hac demonstratione patet, quod æquatio cubi æqualis rebus & numero, æqualis est ambabus æquationibus cubi & eiusdem numeri æqualium totidem rebus, simul iunctis, uelut si cubus æqualis sit 10 rebus & 12, & æquatio sit $R^2 7 p: 1$, æquationes cubi $p: 12$, æqualium 10 rebus quæ sunt 2 & $R^2 7 m: 1$, simul iunctæ, facient $R^2 7 p: 1$.

REGULA.

Regula igitur est, cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, inuenies æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero, cuius dimidium in se ducito & triplicato, hoc abijce ex numero rerum, & R^2 residui, addita dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, uel detracta, ostendit æstimationem cubi & numeri æqualium rebus. Exemplum, cubus $p: 3$, æquatur 8 positionibus, tunc inuenio æstimationem cubi æqualis 8 rebus $p: 3$, ex præcedenti capitulo, & est etiam 3, huius dimidium duco in se, fit $2 \frac{1}{4}$, triplica, fit $6 \frac{3}{4}$, abijce ex 8 rerum

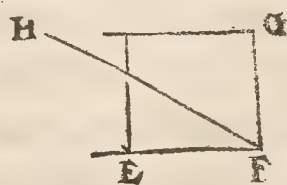
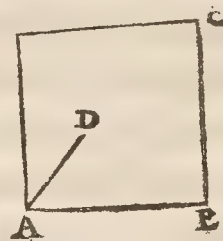
rerum numero, fit residuum $1 \frac{1}{4}$, cuius R addita uel detracta ab $1 \frac{1}{2}$ dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, ostendit utraq; æstimationes quæsitæ alteram $1 \frac{1}{2} p:R$ $1 \frac{1}{4}$, reliquam $1 \frac{1}{2} m:R$ $1 \frac{1}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Nunc etiam ostendamus, quomodo una æstimatione habita, absq; auxilio præcedentis capituli habeatur & reliqua, & sit, ut ex $A D$ in $A C$ quadratum fiat numerus æquationis, ita quod quadrata $A D$ & $A C$ iuncta, faciant numerum rerum, eritq; ex 8^o capitulo, $A D$, rei æstimatio, & sit $F H$ linea, cui si adderetur dimidium $A D$ quadratum totius, æquale foret quadrato $A C$ & quadrato dimidij $A D$, dico $F H$ esse reliquam æstimationem, quando cubus cum numero ex $A D$ in $A C$ æqualis est rebus in quadrato $A C$, & quadrato $A D$, fiat quadratum $E G$, quod cum quadrato $F H$ æquale sit quadratis $A C$ & $A D$, iunctis, quia igitur quadratum compositæ ex $F H$ & dimidio $A D$, æquale est quadratis $C A$ & dimidij $A D$, erit ex 4^a 2ⁱ elementorum abiecto communi quadrato dimidij $A D$, quadratum $A C$ æquale quadrato $F H$, & duplo $F H$ in dimidium $A D$, quare rectangulo ex $F H$ in $A D$ semel cum quadrato $F H$, quare ex 16^a 6ⁱ elementorum $A B$ proportionalis inter $F H$ & aggregatum $F H$ & $A D$, quia uero quadratum $E G$, additum producto $F H$ in se, & in $A D$, tantum facit, quantum additum, quadrato $A C$, $E G$ uero, & $F H$ quadratum, æqualia sunt quadratis $A D$ & $A C$, ex supposito, erit quadratum $A C$ & quadratum $A D$ & productum $F H$ in $A D$, æquale quadratis $A C$ & $E G$, inde abiecto communiter $A C$ quadrato, erit $E G$ quadratum, æquale ei quod fit ex $F H$ in $A D$ cum quadrato $A D$, ex 16^a igitur 6ⁱ, $E F$ proportionalis est inter $A D$ & aggregatum ex $A D$ & $H F$, cumq; similiter, ut ostensum est, $A B$ sit proportionalis inter $F H$ & aggregatum $F H$ & $A D$, erit ex 34^a 5ⁱ nostri super Euclidem, quia $F H$ & $A D$ iunctæ in utroq; ordine sunt prima quantitas, proportio $F H$, ad $A D$, ut $A B$ ad $E F$ duplicata, quare ex 17^a 6ⁱ elementorum, $F H$ ad $A D$, ut $A C$ ad $E G$, igitur ex 34^a 11ⁱ elementorum, corpus quod sub $F H$ & $E G$ continetur, æquale est corpori sub $A D$ & $A C$, quare & numero æquationis, cumq; quadrata $E G$ & $H F$, æquentur numero rerum, quia quadratis $A C$ & $A D$, erit ex 8^o capitulo huius, $H F$ etiam æstimatio rei, in eodem capitulo. unde regula.

REGULA.

Duc dimidium primæ æstimationis in se, & triplica, & aufer à numero rerum, & R residui, detracto dimidio prioris æstimationis, est æquatio



æquatio quæsitæ. Exemplum, cubus & 60, æquatur 46 rebus, & altera æquationum est 6, pro habenda reliqua duc 3, dimidium prioris æstimationis in se, fit 9, hunc triplica fit 27, abijce 27 ex 46, relinquitur 19, ab huius radice abijce 3, dimidium primæ æstimationis, habebis secundam æstimationem, $\text{R} \times 19 \text{ m} : 3$, & eadem ratione cum hac inuenies primam æstimationem, scilicet cum $\text{R} \times 19 \text{ m} : 3$, eodem modo ipsum 6.

De cubo æquali quadratis & numero. Cap. XIII.



Vòd si cubus, æqualis sit quadratis & numero, conuertetur capitulum in cubum æqualem rebus & numero, primo conuersionis modo, qui est à toto ad partem, nam secundus est à parte ad totum, tertius à differentia partiũ, quartus à proportionem.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur cubus $A E$, in capituli 12 figura, æqualis 6 quadratis $A C$, & 100, cumq; quadratum $A C$, constet ex quadrato $A B$, & gnomone eum circundante, erit cubus $A C$ æqualis quadratis 6 $A B$, & gnomonibus 6 & 100, gnomonem autem constat quadrato $B C$, & duplo $A B$, in $B C$, igitur cubus $A C$ constat 6 quadratis $A B$ & 6 quadratis $B C$ & 6 productis $A B$, in $B C$ bis, & 100, at ex $A B$ in $B C$ bis, fiunt 4 res, quia $A B$ est res, & $B C$, 2, & 6 quadrata $B C$, sunt triplum cubi $B C$, quia $B C$ est tertia pars 6, igitur cubus $A C$, æqualis est 6 quadratis $A B$, & 24 rebus, & triplo cubi $B C$, & 100, at constat, quòd 24 numerus rerum, constat ex 6 numero quadratorum, in 4, qui est duplum tertiæ partis eiusdem numeri. At ex alia parte constat etiam, cubus $A C$, cubis $A B$ & $B C$, & triplo $A B$ in quadratũ $B C$, & triplo $B C$ in quadratũ $A B$, hoc namq; in primo supposito 6ⁱ capituli ostensum est, igitur cubus $A C$, æqualis est cubis $A B$ & $B C$ & 6 quadratis & 12 rebus, igitur cubus $A B$, & cubus $B C$, & 6 quadrati, & 12 res, æquantur 6 quadratis & 24 rebus, & triplo cubi $B C$ & 100, constat autem, quod numerus quadratorũ manet idem, quia est triplus ad $B C$, & $B C$ fuit tertia pars numeri quadratorum, & numerus rerum est ex numero quadratorum in suam partem tertiam, hoc enim æquale est semper, triplo quadrati tertiæ partis, abiectis igitur cõmuniter cubo $B C$ semel, & 6 quadratis, & 12 rebus scilicet tot rebus, quot fiunt ex numero quadratorum in suam tertiam partem, relinquetur cubus $A B$, æqualis 100, & 12 rebus, & duplo cubi $B C$, manifestum est autem, quod numerus 100, manet idem,

I

& quod

& quod numerus rerum fit ex numero quadratorum in tertiam sui partem, & quod duplum cubi BC , est 16 , quia BC est 2 , igitur cubus AB æqualis est 12 rebus, & 116 numero, ideo ex præcedenti capitulo, inuenta AB , addemus ei BC , tertiam partem numeri quadratorum, & conflabitur AC , & quia in querendo AB , reducimus tertiam partem numeri rerum ad cubum, & hæc tertia pars numeri rerum, est quadratum tertiæ partis numeri quadratorum, ideo ex ultima contractione sit hæc regula.

REGULA.

Adde cubum tertiæ partis numeri quadratorum, dimidio numeri æquationis, & totum quod inde fit, in se ducito, à quadrato abijce cubum quadrati tertiæ partis numeri quadratorum, residui radicem adde & minue dimidio aggregati, quod in se duxeras, habebis Binomium & Apotomen, cuius R cubicam iunge, & eis adde tertiam partem numeri quadratorum, & totum quod conflatur, est rei estimatio. Exemplum, cubus æquatur 6 quadratis $p: 20$, adde 8 , cubum 2 , tertiæ partis 6 , ad 10 , dimidium 20 , fit 18 , ab huius quadrato 324 , abijce 64 , cubum quadrati 2 , relinquitur 260 , cuius radicem adde & minue à 18 , habebis $18 p: R 260$, & $18 m: R 260$, horum R cubicæ iunctæ, addita tertia parte numeri quadratorum, constituunt rem.

De cubo & quadratis æqualibus numero. Cap. XV.

DEMONSTRATIO.



Hoc capitulum conuertitur secundo modo, differentia autem est, quod primus modus ostendit addendam tertiam partem numeri quadratorum, & secundus minuendam, sit igitur, in figura 12^i capituli, cubus AB cum 6 quadratis AB , æqualis 100 , & ponatur BC tertia pars numeri quadratorum, & compleatur cubus AC , erit igitur cubus AC æqualis cubo AB , & 6 quadratis, & 12 rebus, & cubo BC , ex primo supposito 6^i capituli, loco igitur cubi AB & 6 quadratorum ponatur 100 , nam illa erant æqualia 100 , igitur cubus AC , æqualis erit 12 rebus, & cubo BC , & 100 , at 12 res ex AB , deficiunt à 12 rebus ex AC in $12 BC$, at illud 12 , ut ostensum est in præcedenti, fit ex triplo quadrati BC , igitur $12 BC$, est triplum cubi BC , igitur cubus AC & triplum cubi BC æquantur 12 rebus, & cubo BC , & 100 , abiecto igitur cubo BC communi semel, erit cubus AB cum duplo cubi BC , æqualis 12 rebus, & 100 , duplum autem cubi BC est 16 , & numerus rerum est triplum quadrati BC , tertiæ partis numeri

qua

quadratorum, & ideo inuenta æstimatione A C, abijciemus B C tertiam partem numeri quadratorum, & relinquetur A B cognita, secundum hoc erit regula.

REGULA.

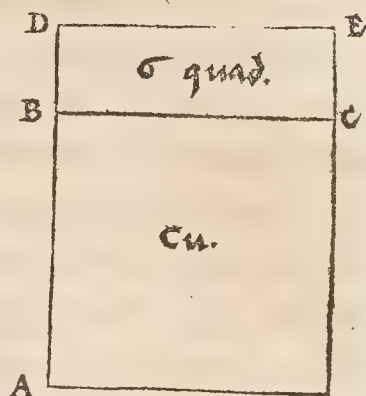
Duc tertiam partem numeri quadratorum, ad cubum, & duplica illum cubū, & differentiam numero æq̃tionis ab eo sume, inde triplum quadratum tertiæ partis numeri quadratorum, & habebis res, quæ æquantur cubo & numero, si duplum cubi fuit maius numero æq̃tionis, uel res cum numero, æquales cubo, si duplum cubi minus sit numero æq̃tionis, uel res æquales cubo, ubi differentia numerorum nulla sit, inde inuenta æquatione, minue ab ea tertiam partem numeri quadratorum, & residuum est rei æstimatio. Exemplum. Cubus & 6 quadrata æquantur 100, duc 2 ad cubum fit 8, duplica fit 16, abijce ex 100 habebis cubum, æqualem 84 p: 12 rebus, sunt autē 12 res, triplum quadrati 2, tertiæ partis 6, numeri quadratorum, res igitur est, ex capitulo 12. R̃ v: cubica 42 p: R̃ 1700 p: R̃ v: cubica 42 m: R̃ 1700, ab hoc abijce 2, tertiā partem 6 erit rei æstimatio quæsitā, quando cubus & 6 quadrata æquantur 100, hæc, R̃ v: cubica 42 p: R̃ 1700 p: R̃ v: cubica 42 m: R̃ 1700 m: 2. Rursus, sit cubus & 6 quadrata, æqualia 25, & abijcio 16 duplum cubi tertiæ partis 6, ex 25, fient 9, & 12 res, ut prius, æquales cubo, res igitur ualet R̃ 5 $\frac{1}{2}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, abijce 2 relinquitur æstimatio quæsitā, R̃ 5 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$. Rursus, cubus & 6 quadrata æquantur 16, abijce duplum cubi 2, scilicet 16, ex 16 numero relinquitur nihil, deinde sume triplum quadrati & eiusdem tertiæ partis numeri quadratorum, & est 12, numerus rerum, æqualium cubo, quare quadratum æquatur 12, quare res est R̃ 12, abijce 2 tertiam partem 6 relinquitur rei æstimatio, R̃ 12 m: 2. Rursus, cubus & 6 quadrata, æquantur 7, sume differentiam 7 & 16, dupli cubi 2, & est 9, & quia duplum cuborum est maius numero æq̃tionis, & numerus rerum est 12, ut prius, habebimus cubū p: 9, æqualem 12 rebus, ideo res ualet 3, uel R̃ 5 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$, abijce 2, erit æstimatio cubi & 6 quadratorum 1, uel R̃ 5 $\frac{1}{4}$ m: 3 $\frac{1}{2}$ & hoc est in re m: quia 3 $\frac{1}{2}$ m: maius est quàm R̃ 5 $\frac{1}{4}$, & 6 quadrata sunt 105 m: R̃ 9261, cubus uero est R̃ 9261 m: 98, si igitur iungantur cubus & 6 quadrata, fient 7 præcise, ut patet.

Ex hoc est manifestum, cur capitulum, cubi & numeri æqualium Cor^m. quadratis, non demonstratur ex capitulo cubi & quadratorum æqualium numero. Quemadmodum capitulum cubi & numeri, æqualium rebus, demonstratum est ex capitulo cubi æqualis rebus & numero. Nam cum capitulum hoc perueniat aliquando ad capitulum cubi &

numeri æqualium rebus, melius est igitur ducere capitulum cubi & numeri æqualium quadratis, immediate ad capitulum cubi & numeri æqualium rebus, quàm ad idem capitulum, medio capituli cubi & quadratorum æqualium numero, nam & operatio longior, & demonstratio magis confusa euaderet.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio alia Ludouici, similis nostræ uniuersali, capituli 7ⁱ, & fuit inuēta hæc à Ludouico de Ferrarijs. Sit cubus A C & 6 quadrata, gratia exempli, C D æqualia 100, quia igitur B D, est altitudo 6 quadratorum, erit B D 6, posita igitur A D quadrato aliquo, erit A B quadratum m: 6, A C igitur superficies est 1 qd' qd' p: 36, m: 12 quadratis, & hæc est basis corporis A E, quare corpus A E est 1 cu' qd' p: 36 qdratis m: 12 qd' qdratis, & hoc est æquale 100, igitur 10, radix 100, æquatur 1 cub. 6 co: radici 1 cu' qdrati p: 36 qdratis, m: 12 qd' qdratis, æstimatione igitur rei est cognita, qua in se ducta, quia A D posita est 1 quadratum, habebitur A D, à qua detracta B D, quæ fuit 6, relinquetur A B, quæ sita res.



REGULA.

Regula igitur est, pone numerum quadratorum, numerum rerum, quæ cum R numeri propositi æquantur cubo, & inuentā æstimationē in se ducito, à qua abijce productione numerum quadratorum seu rerum, residuum est rei æstimatio. Exemplum, cubus & 6 quadrata æquantur 40, dices igitur, cubus æquatur 6 rebus & R 40, æstimatio rei, est ex suo capitulo, R v: cubica R 10 p: R 2 p: R v: cubica R 10 m: R 2, hanc in se ducto producet R v: cubica 12 p: R 80 p: R v: cubica 12, m: R 80 p: 4, abijce 6 numerum rerum, relinquetur æstimatio quæ sita, R v: cubica 12 p: R 80 p: R v: cub. 12 m: R 80 m: 2. Idem inuenies ex prima regula operatiōis, Probatio est, ut in exemplo, cubus & quadrata 3, æquantur 21, æstimatio ex his regulis est, R v: cubica 9 1/2 p: R 89 1/4 p: R v: cubica 9 1/2 m: R 89 1/4 m: 1, cubus igitur est hic constans ex septem partibus.

Ex^m

12 m: R v: cubica, 4846 1/2 p: R 23487833 1/4 m: R v: cubica 4846 1/2 m: R 23487833 1/4 p: R v: cub. 46041 3/4 p: R 2119776950 7/8 m: R 2096289117 2/16 m: R 2096354180 13/16 p: R v: cub. 46041 3/4 p: R 2096354180 13/16 m: R 2096289117 2/16 m: R 2119776950 7/8 p: R v: cub. 256 1/2 p: R 65063 1/4 p: R v: cub. 256 1/2 m: R 65063 1/4

Triā

Tria autem quadrata sunt ex septem partibus hoc modo

9 p: R: v: cub. $4846 \frac{1}{2}$, p: R: $23487833 \frac{1}{4}$, p: R: v: cub: $4846 \frac{1}{2}$ m: R: $23487833 \frac{1}{4}$ m: R: v: cub. $256 \frac{1}{2}$ p: R: $65063 \frac{1}{4}$ m: R: v: $256 \frac{1}{2}$ m: R: $65063 \frac{1}{4}$ m: R: v: cub. $256 \frac{1}{2}$ p: R: $65063 \frac{1}{4}$ m: R: v: cub. $256 \frac{1}{2}$ m: R: $65063 \frac{1}{4}$.

Inde iunctis tribus quadratis cum cubo sex partes, quæ sunt R: v: cubi cæ æquales p: cū m: cadunt & relinquitur 21 adamussim aggregatū.

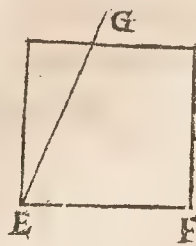
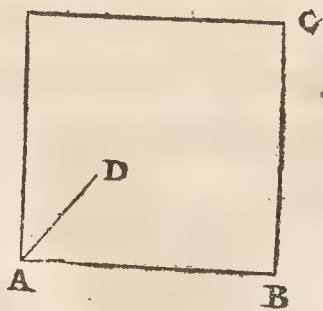
De cubo ac numero æqualibus quadratis. Cap. XVI.

REGULA.

Hoc capitulum per se patet, ex demonstratione 7ⁱ capituli, regula est, duc R: cubicam numeri, in numerum quadratorum, producetur numerus rerum æqualiū cubo, & eidem numero, inuentis autem æstimationibus, duc R: cubicam numeri in se, & productum diuide per quamlibet æstimationem inuentā, exhibit æstimatio quæsitā utraq;. Exemplum, 1 cubus p: 64, æquetur 18 quadratis, duc 18 in 4 R: cubicam 64, fit 72, numerus rerū æqualium cubo p: 64, huius æstimationes sunt ex capitulo suo, 8 & R: 24 m: 4, cum quibus diuide 16, quadratum 4, R: cubicæ 64, exit 2, & R: 96 p: 8, & hæ sunt æstimationes.

DEMONSTRATIO.

Et sit una æstimationum habita AB, uolo habere reliquam, facio quadratum AB, quod sit AC, & detraho AB ex numero quadratorum & relinquatur AD, & ducatur AD, in aggregatū ex AB, & quarta parte AD, & superficiæ productæ sumatur latus quod in eam potest, & ei addatur dimidium AD, & fiat EF, quam dico esse secundam æstimationem, fiat quadratum EF, & sumatur EG, quæ cū EF iuncta, æqlis sit aggregato AB & AD. Quia igitur EF quadratum, æquale est producto ex tetragonali in se, & dimidio AD in se, & producto tetragonali in AD ex 4^a 2ⁱ elementorum, erit quadratum EF, æquale producto AD in aggregatum ex AB, & dimidio AD, & tetragonali ex 16^a 6ⁱ elementorum, igitur EF media inter AD & aggregatum AB & tetragonali & dimidio AD, dimidium autem AD & tetragonali constituunt EF, ex supposito, EF igitur proportionalis est, iter AD & aggre



I 3 gre

HIERONYMI CARDANI

gregatum $AB \& EF$. Rursus, quod fit ex $AB \& AD$, in $AB \& EF$, æquale est ei quod fit ex $EF \& EG$, in aggregatū $AB \& EF$, quia ex supposito EF , & EG , æquantur AB , & AD & $AB \& EF$ manent idē, quod autem fit ex AD in $AB \& EF$, ex probatis, æquale est quadrato EF , igitur quod fit ex AB in $AB \& EF$, cum quadrato EF , æquale est ei quod fit ex $EF \& EG$ in $EF \& AB$, abiectō igitur communi quadrato EF , erit quod fit ex AB in aggregatum $AB \& EF$, æquale producto $AB \& EF$ in EG , cum eo quod fit ex EF in AB , detractō igitur communi iterum producto, AB in EF , relinquetur quadratum AB , æquale producto ex $AB \& EF$ in EG , quare AB media inter EG & aggregatum $AB \& EF$, fuerat uero, ut dictum est, EF media, inter AD & aggregatum $AB \& EF$, sunt igitur tres quantitates proportionales, in duobus ordinibus, quarum prima in utroq; ordine eadem est, uidelicet aggregatum $AB \& EF$, igitur ex 34^a 5^a nostri super Euclidē, EG ad AD , ut AB ad EF duplicata, quare ex 17^a 6^a elementorum, EG ad AD , ut AC ad quadratū EF , igitur ex 34^a 11^a elementorum, corpus quod ex AD in AC , æquale est corpori ex EG in quadratum EF , sed AB fuit æstimatione rei igitur corpus quod ex AD in AC æquale est numero equationis posito aggregato $AD \& AB$ numero quadratorum, per demonstrationem habitam in capitulo 8^o, igitur productum ex EG in quadratum EF , est æquale numero equationis, cum igitur $EF \& EG$, sint æquales numero quadratorum, quia aggregato $AB \& AD$, & ex GE in quadratum EF , fiat numerus equationis, erit per 8^m capitulum, EF rei æstimatione, quod erat probandum.

REGULA.

Regula igitur est, minue primam æstimationem à numero quadratorum, & residuum duc in aggregatum ex prima æstimatione, & quarta parte eiusdem residui, & producti accipe radicem, cui adde dimidium eiusdem residui, aggregatum est æstimatione rei quæsita. Exemplum, sit cubus cum 24 æqualis 8 quadratis, & æstimatione cognita 2, abijcio 2 ex 8, numero quadratorum relinquitur 6, hoc duc in $3\frac{1}{2}$, quod constat ex 2, prima æstimatione, & $1\frac{1}{2}$ quarta parte 6 residui, fit 21, cuius radici adde dimidium primæ æstimationis, quod est 1, fit 22 p: 1, æstimatione quæsita.

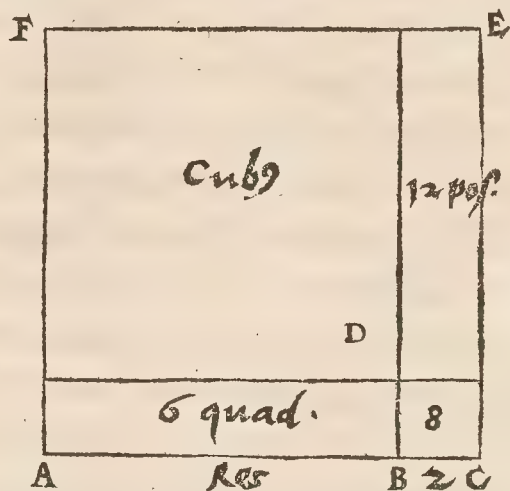
De cubo, quadratis & positionibus æqualibus
numero. Cap. XVII.

DEMON

DEMONSTRATIO.



It gratia exempli cubus AB , & 6 quadrata, & 20 positiones æqualia 100, & addam BC ad AB , quæ sit 2, tertia pars numeri quadratorum, & describitur cubus uniuersalis AC , secundum quod componitur ex suis octo partibus, erit igitur cubus AB , FD superficies cum sua altitudine, & cubus BC 8, quia BC est 2, & AD corpora, 6 quadratis AB , æqualia, & corpora de 12 AB seu duodecuplo AB ex sexto capitulo huius libri, quia igitur cubus AB & 6 quadrata & 20 positiones, æquantur 100, addantur 8 positiones, quæ sunt reliquum ad 20 positiones, cubo AC , qui iam æquebatur cubo AB , & 6 quadratis, & 12 positionibus, & cubo BC , erit cubus AC cum 8 positionibus, æqualis 108, nam cubus AC excedit tria corpora DA , DE , DF , in cubo CD , qui est 8, at quia 8 positiones AB deficiunt AB , 8 positionibus AC cubi maioris, in 8 BC seu octuplo BC , quæ est 2, addemus igitur octuplum BC utriusque parti, & fiet cubus p : 8 rebus, æqualis 124



nota igitur ex capitulo suo AC , auferemus BC , relinquitur AB . Sit rursus cubus AB , & 6 quadrata & 12 res, æqualia 100, igitur addito communi cubo BC , erit cubus AC æqualis 108, & AC & cubice 108, & AB 2 m: quàm AC cognita, sit denuo cubus & 6 quadrata AB & 2 positiones æqualia 100, additis igitur 10 positionibus residuis, ad complendum corpora DE , & addito cubo BC , fiet cubus AC æqualis 10 positionibus superadditis, & 108, sed 10 positiones AB deficiunt à 10 positionibus AC in 10 BC , addemus igitur 10 BC utriusque parti, fiet cubus AC p : 20, æqualis 10 positionibus p : 108, abijce 20 ex utraque parte, relinquetur cubus AC æqualis 10 positionibus p : 88, inuenta AC , minue BC & relinquetur AB necessario cognita.

REGULA.

Regula igitur communis est, duc 3^{am} partem numeri quadratorum (quam hoc signo, trpqd : demonstramus) ad cubum, addeque numero inde duc numerum quadratorum in sui tertiam partem, & producti differentia à numero rerum, est numerus rerum addendarum cubo, ubi productum fuerit minus numero rerum propositarum uel addendarum numero, ubi productum fuerit maius numero rerum propositarum. Si igitur differentia est nulla, producti & numeri rerum erit

erit cubus æqualis numero iam coaceruato, inde sumpta radice cubi-
ca numeri, minue ex ea $tpqd$: & residuum est rei æstimatio, quod si po-
sitiones & cubus, æquentur numero, duces numerum positionum in
 $tpqd$: & productum addes numero iam aggregato, & habebis cubū,
& res iam inuentas, æquales numero iam aggregato, inde ab æquatio-
ne minue $tpqd$:, & residuum est æstimatio. Quod si productum fuerit
maius numero rerum, duc differentiam, quæ est numerus rerum, in
 $tpqd$: & productum minue ex numero, quæ habebas, aggregato, & si
nihil superest, habebis cubū, æq̃lem rebus iam propositis tantū, quare
deducendo ad minorem denominationem habebis q̃d^m æquale nume-
ro, & res erit & quadrata numeri rerum, à qua minue $tpqd$: & resi-
duum erit æstimatio rei. Quod si in detractiōe producti ex numero
rerum in $tpqd$: à numero aggregato, supersit, numerus ille cum re-
bus iam propositis, æquatur cubo, inde ab æstimatione minue $tpqd$:
& residuum est æstimatio quæsita. Sed si productum numeri rerum in
 $tpqd$: maius esset numero iam aggregato, differentia est numerus, qui
cum cubo æquatur rebus iam propositis, inde habita æstimatione mi-
nue $tpqd$: & residuum est æstimatio rei.

Cor^m. Ex hoc patet, quod tale capitulum resoluitur in quinque capitula,
quæ sunt hæc in margine posita, &
non possunt resolui in plura, in ali-
quibus autem sequentium resolu-
tio fit in tria postrema tantum, in
omnibus autem capitulis quatuor
denominationum, cōmune est, cum
fuerint resoluta in capitulum trium uel duarum denominationum, ut
æstimationi inuentæ addatur aut minuatur $tpqd$: ut in hoc capitulo
semper minuitur, & commune est etiam omni capitulo, ut rerum nu-
merus & numerus ipse constituentur eodem modo, uelut hic nume-
rus rerum, est differentia numeri rerum assumptarum in capitulo qua-
tuor denominationum, & producti ex numero quadratorū in sui ter-
tiam partem, & numerus capituli in quod resoluitur, est differentia
producti ex numero rerum iam inuentarū, in $tpqd$: & aggregati ex
cubo $tpqd$: & numero æquationis primo.

cubus & res æquales numero.
cubus æqualis numero.
cubus æqualis rebus.
cubus æqlis rebus & numero
cubus & numerus æqlis reb⁹

QVÆSTIO I.

Exemplum. Est corpus quadratum unde quaq̃, quod cum super-
ficiebus & lateribus est 22, dices igitur, cubus & 6 quadrata & 12 res
æquantur 22, cuba igitur 2, tertiam partem numeri quadratorum, fit
3, adde ad 22 fit 30, deinde duc 6 numerum quadratorū in 2 sui par-
tem

tem tertiam, fit 12, differentia cuius à numero rerum est nihil, nam res etiam fuerāt 12, habemus igitur 1 cubū equalem 30, & res est R2 cub. 30, abijce 2 tpqd: fit æstimatio rei, R2 cub. 30 m: 2.

Experientia autem est, ut iungas 1 cub. p: 6 qd: p: 12 reb⁹, & fiūt 22.

Sex quadrata 24 p: R2 cub. 194400, m: R2 cub. 414720

cubus 22, m: R2 cub. 194400, p: R2 cub. 51840

Duodecim res R2 cub. 51840 m: 24

Aggregatum 22

QVÆSTIO II.

Exemplum secundi. Inuenias quatuor numeros continue proportionales, quorum primus sit 3, & reliqui tres sint 19, pone 2^m 1 rem, erit tertius $\frac{1}{3}$ qdrati, & quartus erit $\frac{1}{4}$ cubi, igitur 1 positio $\frac{1}{3}$ qdrati, $\frac{1}{2}$ cubi, æquantur 19, duc ad integra habebis cubum & 3 quadrata & 9 res, equalia 171, nam omnia ducuntur per 9, adde igitur cubum tertiæ partis numeri quadratorum ad 171, & est 1, fit 172, deinde duc 3 numerum quadratorum in sui tertiam partem fit 3, huius producti, & 9 numeri rerum, differentia est 6, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, quia productum fuit minus, duc igitur 6 numerum rerū in 1 tpqd: fit 6, adde ad 172, fit 178, igitur cubus & 6 res equantur 178, & rei æstimatio est R2 v: cubica R2 7920 p: 89 p: R2 v: cubica R2 7929 m: 89, ab hoc minue tpqd: quæ est 1, habebis secundam quantitatem R2 v: cubicam R2 7929 p: 89 m: R2 v: cubica R2 7929 m: 89 m: 1, ex qua habebis reliquas.

Exemplum tertij modi. Cubus & 6 quadrata & 1 positio, æquantur 14, adde cubum 2 tpqd: qui est 8, ad 14, fit 22, deinde duc 6 numerum quadratorum in 2 tertiam sui partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum est 11, numerus rerum equalium cubo cum numero, quia numerus productus 12 fuit maior numero rerum, duc igitur 11 in 2 tertiam partem numeri quadratorum, fit 22, differentia cuius & numeri prioris aggregati est nulla, quare habebimus cubum equalem 11 rebus, igitur quadratum æquatur 11, res igitur est R2 11, à qua minue 2 tpqd: fit rei æstimatio R2 11 m: 2, sumpsisti autem differentiam in numero & non aggregasti, quia res equabantur cubo, & non cubus cum rebus æquabantur numero, ut in præcedente exemplo.

QVÆSTIO III.

Exemplum quarti modi. Ex oraculo iubet princeps fieri sacram ædem, cuius spacium sit 400 cubitorum, & longitudo latitudine maior sit 6 cubitis, latitudo altitudine 3 cubitis maior, quæritur quantitas. Pone Altitudinē rem, Latitudo erit 3 p: & Longitudo 9 p: duc
K inuicem

inuicem habebis 1 cub. p: 12 quadratis p: 27 positionibus, æqualia 400, adde ad 400, cubum 4 tpqd: qui est 64, fit 464, duc 12 numerū quadratorum in tertiam sui partem, fit 48, cuius differentia à 27, est 21, numerus rerum, quæ æquantur cubo cum numero, quare duc 21 in 4 tpqd: fit 84, sume differentiā à 464, quæ est 380, & eam adde rebus, quia

Altitudo	1	pos:
Latitudo	1	pos: p: 3
Longitudo	1	pos: p: 9
productum	1 cub. p: 12 qd:	
	p: 27 pos:	

aggregatum numerorum primum, fuit maius numero producto secundo, habebis cubum æqualem 21 positionibus p: 380, res igitur ualet R: v: cubicam. 190 p: R: 35757, p: R: v: cub. 190 m: R: 35757, ab hac minue 4 tpqd: habebis altitudinem, qua habita, addendo 3 & 9 habebis latitudinem & longitudinem, ut uides

Altitudo, R: v: cub. 190 p: R: 35757 p: R: v: cub. 190 m: R: 35757 m: 4
 Latitudo, R: v: cub. 190 p: R: 35757 p: R: v: cu. 190 m: R: 35757 m: 1
 Longitudo, R: v: cu. 190 p: R: 35757 p: R: v: cu. 190 m: R: 35757 p: 5

Exemplum quinti modi. Cubus & 6 quadrata, & 2 res, æquantur 3, adde 8, cubum tpqd: ad 3 fit 11, deinde duc 6 in suam tertiam partem, fit 12, differentia à 2, numero rerum est 10, numerus rerum, duc in 2 tpqd: fit 20, cuius differentia ab 11, est 9 numerus, qui cum cubo æquatur 10 rebus, quia productum 2^m maius est numero aggregato, uoco autem productum secundum, quod fit ex numero rerum iam inuento, in tpqd: æstimatio igitur rei quando cubus & 9 æqualia sunt 10 rebus est 1, uel R: 9 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, abñce igitur 2 tpqd: fient duæ æstimationes quæsitæ, altera R: 9 $\frac{1}{4}$ m: 2 $\frac{1}{2}$ alia m: 1.

De cubo, & rebus æqualibus quadratis & numero. Cap. XVIII.

DEMONSTRATIO.



It in eadem figura, cubus AC cum 33 AC, æqualis 6 quadratis AC p: 100, (gratia exempli) diuidatur cubus AC, posita BC tpqd: scilicet 2, in suas partes, erit cubus AC, æqualis cubo AB, cubo BC, sex quadratis AB, & 12 positionibus AB, at 33 AC, sunt 33 AB, & 33 BC, quæ sunt 66, quia BC est 2, igitur cubus AC, & 33 AC, æquantur cubo AB, cubo BC, sex quadratis AB, & 45 AB positionibus, & 66, hæc eadem igitur æq̃lia sunt 6 quadratis AC, & 100, at 6 quadrata AC, diuisa AC in B, per 4^m 2ⁱ elementorum, æqualia sunt 6 quadratis AB, & 6 quadratis BC, & 12 superficialibus

ciebus A D, sed A D est 2 positiōes, quia B D est 2, igitur 12 A D sunt 24 positiones A B, quare 6 quadrata A B, & 6 quadrata B C, & 24 positiones AB, & 100, equantur cubo A B, cubo B C, 6 quadratis A B, & 45 A B & 66 numero, cubus autem B C est 8, & 6 quadrata B C sunt 24, igitur 6 quadrata A B & 24 positiones A B, & 124, æquantur cubo A B, & 6 quad. A B, & 45 positionibus A B, & 74, facta igitur detractiōe similiū ex utraq; parte,

scilicet 6 quad.	24	6 qd ^a A B	24 pos ^a A B	124
positionibus & 74,		cub ^o AB 6 qd ^a A B	45 pos ^a A B	74
relinquetur cub ^o A B		cub ^o A B	p: 21 pos ^b A B æqles	50

p: 21 positionibus A B, æqualis 50, manifestum est igitur quod inuenta A B, ex capitulo suo, & addita B C ei quæ est 2, conflatur A C. Manifestum est autem, quod ubi positiones, quæ cum cubo erant, essent æquales productis, haberemus cubum æqualem numero tantū, & ubi positiones quæ cum cubo erant, essent pauciores, haberemus res ex una parte, & cubum ex alia, & tunc si numerus qui est cum cubo, foret æqualis alteri, essent positiones æquales cubo, & si essent minor, haberemus res & numerum æquales cubo, & si maior, haberemus res æquales cubo & numero, ex eadem demonstratione, uelut in præcedente capitulo.

REGULA.

Regula igitur est, ut primo statuas numerum rerum semper, ut in præcedenti capitulo, & est ut ducas numerum quadratorū in tertiam sui partem, & differentia huius producti, à numero rerum, est numerus rerum, quæ si nulla sit, habebimus cubum æqualem numero, si autem productum sit minus numero rerum, differentia erit numerus rerum, quæ cum cubo equantur numero, & si productum fuerit maius, habebimus res æquales cubo, & tunc si numeri erunt æquales, erit cubus æqualis rebus, & si qui producitur ex numero rerum, in tpqd: fuerit minor numero æquationis cum additione, erit cubus æqualis rebus & numero, quod si productus numerus ex rerum numero in tpqd: fuerit maior numero æquationis cum sua additione, habebimus res æquales cubo & numero, numerus autem æquationis sic habetur, duc priorem numerum rerum, in tertiam partem numeri quadratorum, & producti accipe differentiam, cum aggregato numeri æquationis, & dupli cubi tpqd: differentia, erit numerus addendus cubo uel rebus, prout oportuerit, uel numerus æqlis cubo, ubi nullæ sint res, inde habita æstimatione, eam adde uel minus tpqd: prout in exemplis doceberis, & habebis quæsitam æstimationem.

Exemplum primum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis &

HIERONYMI CARDANI

25, duc 6 in 2, sui tertiam partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum nulla est, igitur cubus æquabitur numero, duc ergo 12 numerum rerum, in 2 tpqd: fit 24, abijce ex 41, aggregato 16 dupli cubi 2, & 25 numero æquationis, relinquitur 17, qui æquatur cubo, res igitur est & cubica 16, adde ei 2 tpqd: fit rei æstimatio & cubica 17 p: 2.

Exemplum secundum. Mercator fugiens, paciscitur redditurum $\frac{3}{4}$ debiti proportionaliter in tribus annis, ita quod si pactus fuisset redditurum $\frac{12}{27}$ primo anno reddidisset $\frac{2}{27}$, secundo $\frac{6}{27}$, tertio $\frac{4}{27}$, ut residua sint in eadem proportionem, cum residuo capitali, quæritur portio cuiusque anni, reddendo solum $\frac{3}{4}$, & ponamus, quod capitale sit 4, ad uitandum fractiones, uult igitur reddere 3, pone igitur quod restituat primo anno rem, igitur secundo anno restituet rem m: $\frac{1}{4}$ qd^u, & tertio anno, rem m: $\frac{1}{2}$ qdrati p: $\frac{1}{16}$ cubi, igitur in tribus annis restituet 3 res p: $\frac{1}{16}$ cubi m: $\frac{3}{4}$ qdrati, & hoc iam supponitur 3, quare reducito ad integrum, cubum ducendo per 16, habebis 1 cubum p: 48 rebus, æqualem 12 qdratis p: 48, duc 12 in 4 tertiam sui partem, fit 48, igitur differentia rerum nulla est, & cubus æquabitur numero, duc igitur 48, numerum rerum, in 4 tpqd: fit 192, à quo detrahe 176, aggregatum ex duplo cubi 4, & 48 numero æquationis, relinquitur 16, & hic æquatur cubo, igitur rei æstimatio est & cubica 16, quam minue ex 4, tpqd: fiet æstimatio quæsita 4 m: & cubica 16, reddet igitur anno primo 4 m: & cubica 16, & secundo & cubicam 16 m: & cubica 4, & tertio, & cubicam 4 m: 1, & horum residua, sunt proportionalia, cum 4, & iuncta faciunt 3, & est conuersum primi exempli, & residua ipsa sunt & cubica 16, & cubica 4, & 1.

Exemplum tertium. Cubus & 15 res, æquantur 6 qdratis & 24, duc 6 in sui tertiam partem, fit 12, cuius differentia à 15 numero rerum, est 3, & quia productum fuit minus, erit cubus & 3 res, æqualia numero, duc igitur 15 numerum rerum, in 2 tpqd: fit 30, minue ex 40, aggregato 24 & duplo cubi tpqd: relinquitur 10, igitur 10 æquatur cubo p: 3 rebus, & rei æstimatio est & v: cubica & 26 p: 5, m: & v: cubica 26 m: 5, cui adde 2 tpqd: habebis quæsitam æstimationem.

Exemplum quartum. Cubus & 15 res, æquantur 6 qdratis p: 10, iterum habeo cubum & 3 res, æqles numero, & numerus productus erit 30, ut prius, uerum aggregatum ex duplo cubi 2, tpqd: & 10 numero æquationis, est 26, differentia igitur est 4, cum igitur cubus & 3 res æquantur 4, rei æstimatio est 1, & quia productus numerus est maior aggregato, id est 30, maior est 26, minuemus 1 æstimationem æqua-

æquationis inuentæ ex 2, tpqd: & relinquetur 1 æstimatio quæsitæ cubi & 15 rerum, æqualium 6 quadratis & 10.

Ideo patet quod in hoc casu, ubi cubus & res, æquantur numero, si differentia numerorū nulla foret, uelut si loco 10, posuissemus 14, æstimatio rei esset tpqd: scilicet 2, quia in æquatione inuenta, nihil haberemus addendum uel minuendū, quia cubus & 3 res, æquarentur nihil.

Exemplum quintum. Cubus & 10 res, æquatur 6 quadratis p:4, duc igitur numerum quadratorum in tertiam sui partem, ut prius, fit 12, differentia cuius à numero rerum, est 2, & quia productum est maius numero rerum, ideo 2 res equabuntur cubo, pro numero itaq; duc 10 numerum rerum primum, in 2 tpqd: fit 20, differentia cuius à 20, aggregato dupli cubi tpqd: & 4, est nihil, igitur nō habebimus numerum, sed cubus æquabitur, ut dictum est, 2 rebus, igitur deprimendo, quadratum æquabitur 2, ergo rei æstimatio, est R: 2, quam adde uel minue tpqd:, habebis ueram æstimationum quæsitam, 2 p: R: 2, uel 2 m: R: 2, & potest etiam esse 2, & sic habet tres æstimationes hic casus.

Exemplum sextum. Sit cubus & 21 res, equalia 9 qd^{tis} p:5, tunc ut prius, ducam 9, in 3 tertiam sui partem, fit 27, huius differentia à 21, est 6, numerus rerum, cubo æquandarum, quia productum 27, est maius 21 numero rerum, addo igitur 54, duplum cubi tpqd: ad 5 numerum æquationis fit 59, cuius differentia, à 63, producto numeri rerum prioris, in tpqd: est 4, igitur quia productum est maius aggregato, addemus numerū cubo, & fiet 1, cubus p:4, æqualis 6 rebus, iam inuentis, huius igitur æstimationes sunt tres, prima est 2, secunda R: 3 m: 1, tertia ficta m: R: 3 p: 1, quas adde ad 3 tpqd: habebis ueras æstimationes illas quas à latere uides.

	Prima	5
	Secunda	2 p: R: 3
	Tertia	2 m: R: 3

Exemplum septimum. Cubus & 26 res, æquantur 12 quadratis p: 12, duc 12 numerum quadratorum, in sui tertiam partem, quæ est 4, fit 48, cuius differentia à 26, numero rerum, est 22, & quia productum est maius numero rerum, res equabuntur cubo, deinde duc 26 numerum rerum, in 4 tertiam partem numeri quadratorum, fit 104, abijce ex 140 duplo cubi tpqd: & 12 numeri simul iunctis, fit 36, numerus addendus rebus, quia aggregatum est maius producto, contrario, exemplo præcedenti, cubus igitur æquabitur 22 rebus, p: 36, quare eius erunt tres æstimationes, prima R: 19 p: 1, & est uera, secunda ficta m: R: 19 m: 1, tertia etiam ficta, quæ est m: 2, has adde singulas,

K 3

las,

las, tpqd: habebis ueras tres æstimationes, quarum experientiam à latere in margine posui.

Prima	5	p:Rz 19
Secunda	5	m:Rz 19
Tertia	2	

Ex hoc patet, quòd numerus quadratorum, in his tribus exemplis, in quibus æstimatio rei triplicatur, semper componitur ex tribus æstimationibus iunctis simul, uelut in quinto exemplo, 2 p:Rz 2, & 2, & 2 m:Rz 2, componunt 6, numerum quadratorum, & in sexto exemplo, 5, & 2 p:Rz 3, & 2 m:Rz 3, componunt 9, numerum quadratorum, & in septimo exemplo, 5 p:Rz 19, & 5 m:Rz 19 & 2, componunt 12, numerum quadratorum, ideo duabus cognitis, tertia semper emergit, & causa est cognita in initio huius libri. Et manifestum est, quòd cum peruenimus ad res, quæ à cubo separantur, seu numerus rebus, seu cubo iungatur, semper emergunt tres æstimationes, & causa dicta est superius ibidẽ, ubi de uera & ficta æstimatione locuti sumus. Et patet etiam, quòd omnes modi hi, ad additionem semper possunt referri, quamuis minus cum additur, uicem gerat plus cum detrahitur, ostensum est enim quod tantum est minuere 4 ex 12, quantum addere 4 m: ad 12, utroq; enim modo fiet 8.

cubus primæ	410 p:Rz	167884
26 res	130 p:Rz	12844
aggregatum	540 p:Rz	273600
12 quadra.	528 p:Rz	273600
numerus	12	
aggregatum	540 p:Rz	273600
cub⁹ secunde	410 m:Rz	167884
26 res	130 m:Rz	12844
aggregatum	540 m:Rz	273600
12 quadra.	528 m:Rz	273600
numerus	12	
aggregatum	540 m:Rz	273600
cubus tertiæ	8	
26 res	52	
aggregatum	60	
12 quadra.	48	
numerus	12	
aggregatum	60	

Est etiam demonstratio alia huius capituli inuenta à Ludouico Ferrario, clarius ostendens rationem harum operationum.

ALIA DEMONSTRATIO.

Sit igitur cubus & 100 res æqualia 6 quadratis p: 10 numero. Et ponatur AB rei æstimatio, BC tpqd: AG autem æqualis, BC, quare GB est differentia AB & BC, cubus autem GB, est differentia cubi AB cum triplo AB, in quadratum BC, à cubo BC cum triplo BC in quadratum AB, ex sexto capitulo, cubus uero AB cum 100 rebus, æquatur 6 quadratis p: 10, ex supposito, 6 quadrata autem AB, sunt triplū BC in quadratum AB, triplum igitur BC in quadratum AB, & cubus

BC,

B C, qui est 8, sunt 2 m: quàm cubus A B cum 100 rebus, dico autem 2 m: quia cubus B C, qui iungitur 6 quadratis, debuit esse 10, & est tantum 8, at cubus A B cum 100 rebus, superat cubum A B, & triplū A B in quadratum B C, quod est 12 res, in 88 rebus, differentia igitur cubi B C, & tripli B C in quadratum A B, à cubo A B, cum triplo A B in quadratum B C, est 88 A B, m: 2, huic igitur differentia, æqualis est cubus G B, ut diximus, ponatur igitur B G res, erit igitur G C seu A B, 2 m: re, cuius quantitas sumpta 88 uicibus, ut dictum est, æquatur cubo B G p: 2, igitur cubus B G, p: 2, p: 88 suis rebus, æqualis est 176, quare cubus B G cum 88 suis rebus, æquatur 174, quare si eam æstimationem B G detraxeris ex B C, quæ est tpqd: scilicet 2, habebis quantitatem A B, quæsitam.

ALIA DEMONSTRATIO.

Ponatur rursus, cubus cum 5 rebus, æqualis 6 quadratis ac 10, & ponatur E F res, D E tpqd: differentia D E & E F, E H, erit q̄ ex demonstratione consimili præmissæ, ut cubus E H, æquetur 7 reb⁹

p: 16, inde inuenta æstimatione, si ei addatur H F tpqd: quæ est 2, habebitur E F res quæsitæ, nec in hoc addam uerba, quia demonstratio est similis præmissæ, & operatio eius in hac parte, est clarior in nostra demonstratione.

REGULA.

Regula igitur sumpta ex hac demonstratione est, si numerus rerum æqualis est, producto ex numero quadratorum in suam tertiam partem, duc tpqd: ad cubum, & cubicam differentia huius, & numeri æquationis, adde tpqd: ubi cubus sit minor numero, aut minue, ubi sit maior, & totum est æstimatio rei, manifestum est autem, quod ubi cubus tpqd: & numerus, sint æquales, non addemus nec minuemus, sed tpqd: erit ipsa rei æstimatio.

Exemplum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p: 8, tunc quia ducto 6, numero quadratorum, in 2 sui tertiam partem, fit 12, numerus rerum, ad unguem, ideo duc 2 tpqd: ad cubum, fit 8, cuius differentia à numero æquationis nulla est, ideo æstimatio rei est 2 tpqd: Et si cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p: 9, tunc quia cubus æquatur numero, abijciemus 8, cubum tpqd: ex 9, relinquitur 1 cuius & cubicam quæ est 1, addo tpqd: quia cubus tpqd: est minor æquatione numeri, fit rei æstimatio 3. Et eadem ratione, si cubus p: 12 rebus, æquetur 6 quadratis p: 7, detracto 7 ab 8, cubo tpqd: relinquitur

linquitur 1, cuius & cubicam quæ est 1, detrahe ex 2, tpqd. relinquitur 1, rei æstimatione.

Quòd si numerus positionum, maior sit producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam, differentia erit numerus rerum, ut in prima demonstratione, & suis regulis, hunc duc in tpqd. & ei adde cubum tpqd. & huius aggregati, numeriæ æquationis differentia, est numerus æquationis cubi, & talium rerum differentia, si nulla sit, æstimatione rei est tpqd. Et si numerus æquationis est minor aggregato, æstimationem inuentam minue, & si maior, adde tpqd. quod fiet, erit rei æstimatione. Exemplum, cubus & 20 res, æquantur 6 quadratis & 24, ducto 6 in 2, tertiam partem sui, fit 12, cuius differentia à 20, numero rerum, est 8, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, duc igitur 8 numerum rerum, in 2 tpqd. fit 16, adde ei 8, cubum tpqd. fit 24, differentia cuius nulla est à 24 numero æquationis, igitur æstimatione rei est tpqd. scilicet 2, fit rursus cubus cum 20 rebus, æqualis 6 quadratis & 15, habebimus igitur, ut prius, cubum & 8 res, pro numero, duc ut prius, 8 numerum rerum posteriorem in 2 tpqd. fit 16, adde cubum tpqd. fit 24, abijce 15, relinquitur 9, igitur cubus & 8 res, æquatur 9, & rei æstimatione est 1, quod minue ex 2, tpqd. relinquitur uera æstimatione rei 1, minuisti autem, quia 15 numerus æquationis, est minor aggregato cubi & producti, quod est 24, & si bene animaduertis, eodem modo fit in prima parte regulæ, quando numerus rerum æqualis est producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam. Rursus, cubus cum 20 rebus, æqualis fit 6 quadratis p: 33, habebis itaq; cubum, ut prius, & 8 res, æquales differentia 24 aggregati, & 33 numeri æquationis, quare cubus & 8 res, æquabuntur 9, & æstimatione rei erit 1, addendum tpqd. quia numerus æquationis 33, est maior numero aggregato 24, quare rei æstimatione erit 3.

Quòd si numerus positionum, minor sit producto ex numero quadratorum in sui tertiam partem, differentia nihilominus erit numerus rerum, ut prius, sed hæ non copulabuntur cubo, imò erunt ei æquales, deinde duc ipsum numerum rerum posteriorum, in tpqd, & productum iunge numero æquationis, huius aggregati & cubi tpqd. differentia est numerus æquationis secundæ, si igitur differentia nulla est, cubus æquabitur rebus, & & quadrata numeri rerum addita tpqd. est æstimatione rei, quod si aggregatum sit maius cubo, erit differentia, numerus qui cum rebus æquatur cubo, inde habita æstimatione, adde ei tpqd. & fiet uera æstimatione. Quòd si cubus fuerit maior aggrega

grega

gregato, differentia erit numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, adde ei $tpqd.$ quod conflatur, est rei uera æstimatione, & tam multiplex habenda, ut in nostra regula docuimus, quancūque quod ad regulam pertinet, & hæc nostra sit. Exemplū igitur, Cubus & 9 res, æquales sint 6 quadratis $p:2$, tunc numerus rerum secundus erit 3, duc in 2, $tpqd.$ fit 6, adde ad 2 numerum æquationis, fit 8, cubus autem $tpqd.$ est 8, differentia nulla, igitur cubus æquatur 3 rebus, res igitur est $R:3$, & rei æstimatione 2 $p:R:3$. Rursus, cubus $p:9$ rebus, æqualis sit 6 quadratis $p:4$, habebimus ut prius, cubum æqualem 3 rebus, pro numero duc 3 numerum rerum posteriorem in 2 $tpqd.$ fit 6, adde 4, numerum æquationis, fit 10, abijce 8, cubum $tpqd.$ fit 2, addendus rebus, quia aggregatum est maius cubo $tpqd.$ igitur cubus æquatur 3 rebus, $p:2$, & res erit 2, addito 2 $tpqd.$ fit 4, uera æstimatione. Iterum, sit cubus $p:21$ rebus, æqualis 9 quadratis $p:5$, erunt igitur 6 res in posteriore æquatione, quia 9 numerus quadratorum, ductus in 3, tertiam sui partem, producit 27, duc igitur 6 numerum posteriorem rerum, in 3, $tpqd.$ fit 18, adde ei 5, fit 23, differentia cuius à numero producto ex cubo c $tpqd.$ est 4, & quia aggregatū est minus cubo, ideo cubus & 4, æquabuntur 6 rebus, æstimatione igitur est 2, uel $R:3$ $m:1$, & ficta $R:3$ $p:1$, quæ est m : si igitur his addas 3 $tpqd.$ habebis æstimationes quæsitæ 5, & 4 $p:R:3$, & 2 $p:R:3$, in harum qualibet uerum est, quod cubus & 21 res, æquales sunt 9 quadratis & 5 numero.

De cubo & quadratis, æqualibus rebus & numero.

Caput XIX.

DEMONSTRATIO.



It etiam cubus AB , & 6 quadrata, æqualia 20 rebus $p:200$, gratia exempli, & ponemus BC 2, $tpqd.$ erit igitur AC res $p:2$, & eius cubus, erit cubus & 6 quadrata, & 12 res, & 8 iam autem suppositum est, quod cubus AB & 6 quadrata, sint æqualia 20 rebus $p:200$, igitur ponantur, 20 res & 200, loco cubi, & 6 quadratorum, & fiet cubus AC , æqualis 32 rebus $p:208$, at quia 32 res AB , deficiunt à 32 rebus AC , in 32 BC , addantur utriusque parti 32 BC , erunt igitur 32 res $p:208$, æquales cubo $p:64$, tantum enim sunt 32 BC , abijce 64 ab utraque parte, erit cubus æqualis 32 rebus $p:144$, inde inuenta æstimatione abijce BC , $tpqd.$ relinquetur AB .

REGULA.

L

Regula

HIERONYMI CARDANI

Regula igitur est, duc numerum quadratorum, in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, & aggregatum erit numerus rerum, inde duc hunc numerum in $tpqd$. & producti sume differentiam, ab aggregato ex numero æquationis, & cubo $tpqd$. quæ si nulla est, habebis cubum æqualem rebus, si uero sit productum minus aggregato, differentia est numerus, qui cum rebus æquatur cubo, quod si productum fuerit maius aggregato, differentia est numerus qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, minue $tpqd$. residuum est æstimatio uera, quæsita.

Exemplum, Cubus & 6 quadrata, æqualia sunt 20 rebus & 56, duc 6 in 2 tertiam sui partem, fit 12, adde ad 20 fit 32, duc 32 in 2 $tpqd$. fit 64, adde ad 56 numerum æquationis 8 cubum $tpqd$. fit 64, differentia producti ab aggregato nulla est, res igitur æquabuntur cubo, quare deprimendo quadratum æquatur 32, & res est $Rx\ 32$, & uera æstimatio $Rx\ 32\ m: 2$. Rursus, cubus & 6 quadrata, æqualia sint 20 rebus $p: 112$, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 20, fit 32, numerus rerum, duc in 2 $tpqd$. fit 64, abijce ex 120 aggregato cubi $tpqd$. & numeri æquationis, relinquitur 56, numerus qui cum 32 rebus, æquatur cubo, res igitur est $Rx\ 29\ p: 1$, minue $tpqd$. relinquitur æstimatio rei $Rx\ 29\ m: 1$. Rursus, cubus & 6 quadrata, æqualia sint 20 rebus $p: 41$, habebis igitur ut prius, in secunda æquatione, 32 res, & 15 numerum, nam detracto 49 aggregato numeri æquationis & 8 cubi $tpqd$. ex 64, producto 32 in $tpqd$. relinquitur 15, quia uero productum est maius aggregato, erit 15 cum cubo, æqualis 32 rcb^9 , & res erit 5, uel $Rx\ 1\ 3\ \frac{1}{4}\ m: 2\ \frac{1}{2}$, uel ficta $Rx\ 1\ 3\ \frac{1}{4}\ p: 2\ \frac{1}{2}$, abijce 2 $tpqd$. habebis æstimationem ueram 3, & duas fictas per m : scilicet $4\ \frac{1}{2}\ p: Rx\ 1\ 3\ \frac{1}{4}$, & $4\ \frac{1}{2}\ m: Rx\ 1\ 3\ \frac{1}{4}$, sicut diximus in capitulo primo.

De cubo æquali quadratis rebus & numero. Cap. XX.

DEMONSTRATIO.

SIt iterum cubus AC , æqualis 6 quadratis, 5 rebus, & 88 (gratia exempli) & ponatur $BC\ tpqd$. scilicet 2, manifestum est igitur, quod cubus AC , æquatur 6 quadratis AB & 12 AB , & cubis AB , & BC , hæc eadem igitur æqualia sunt 6 quadratis AC , 5 rebus AC , & 88, abijciatur iam cubus BC communis, scilicet 8, relinquentur, cubus AB & 6 quadrata AB , & 12 AB , æqualia 6 quadratis AC , 5 rebus AC , $p: 80$, at 6 quadrata AC , superant 6 quadrata AB in 6 gnomonibus AB quadrati, & erunt 24 res ex AC , minus

minus 6 quadratis B C, quæ sunt 24, igitur 6 quadrata A B & 29 res A C, & 56, æqualia sunt cubo A B, & 6 quadratis A B, & 12 rebus A B, abijciantur igitur 6 quadrata A B, cōmunia, relinquentur 29 res A C, p: 56, æqles cubo A B, & 12 rebus A B, & 29 res A C, superant 29 res A B, in 29 B C, quare in 58, quia B C est 2, igitur addatur numerus numero, erunt 29 A B & 114, æqualia cubo A B & 12 rebus A B, abijciantur de nuo 12 res communes, erunt 17 res p: 114, æquales cubo, inde habita æstimatione, adde ei B C.

REGULA.

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, & productum adde numero rerum, aggregatum erit numerus rerum, æqualium cubo, pro numero autem, duc numerum rerum secundum in tpqd. & productum adde numero æquationis, à quo minue cubum tpqd. residuum est numerus, qui cum rebus æquatur cubo, inde inuenta æstimatione, adde ei tpqd. & habebis uerum æstimationem.

QVÆSTIO.

Exemplum, in hac quæstione, Quidam dedit aureos 1728 ad caput anni ut dicunt, seu sub usura rediuiua, ea conditione, ut reciperet tertio anno, ex capitali & usura, quantum est dimidium capitalis, & dimidium eius quod debuisset in fine primi anni, & dimidiū eius quod debuisset in fine secundi anni, ubi retinuiſſet pecunias, & uoluisset solvere sub eadē usura. Pone igitur quod in capite primi anni haberet 144 res, in capite secundi anni habebit 12 quadrata, in capita tertij anni habebit cubum, & hic erit æqualis dimidijs reliquorum annorum simul sumptis, igitur cubus erit æqualis 6 quadratis 72 rebus & 729, duc igitur 6 numerum quadratorum in 2, tertiam sui partem, fit 12 adde ad 72 fit 84, numerus rerum, duc 84 in 2 tpqd. fit 168, adde ad 729, fit 897, abijce 8, cubum tpqd. fit 889, igitur cubus æquatur 84 rebus p: 889, æstimatio igitur huius erit R: v: cubica 444 $\frac{1}{2}$ p: R: 175628 $\frac{1}{4}$, p: R: v: cubica 444 $\frac{1}{2}$, m: R: 175628 $\frac{1}{4}$, huic adde 2 tpqd. habes quæſitam æstimationem R: v: cubicam 444 $\frac{1}{2}$ p: R: 175628 $\frac{1}{4}$ p: R: v: cubica 444 $\frac{1}{2}$ m: R: 175628 $\frac{1}{4}$ p: 2, cuius cubus est quantitas pecuniarū, quæ ei debentur tertio anno, inde detracto 1728, habebis sortem, per terminos proportionales.

De cubo & numero, æqualibus quadratis & rebus.

Caput

XXI.

DEMONSTRATIO.



It cubus & 100, æqualia etiam 6 quadratis, & 24 rebus, & sit cubus ille AC , & BC $tpqd$. cunq; cubus AC , æqualis sit cubo AB & 6 quadratis AB , & 12 rebus AB , & cubo BC , qui est 8, erit cubus AB , & 6 quadrata AB , & 12 res AB , & 108, æqualia 6 quadratis AC , & 24 rebus AC , sed 6 quadrata AB , minora sunt 6 quadratis AC , in 6 gnomonibus ADE , & 24 res AB , minores sunt 24 rebus AC , in 24 BC , quare cubus AB , & 6 quadrata AB , & 12 res AB , & 108, æquantur 6 quadratis AB , & 6 gnomonibus ADE , & 24 rebus AB , & 48, nam 24 BC sunt 48, igitur abiectionis ex utraq; parte 6 quadratis AB , & 12 rebus AB , & 48, erit cubus AB , & 60, æqualis 6 gnomonibus ADE , & 12 rebus AB , sunt autem 6 gnomones ADE , 24 res AB , $p:24$, eo quod quælibet superficies AD , & DE , est 2 res, eo quod BD est 2, & quadratum BC est 4, igitur 36 res AB , & 24, æquantur cubo AB $p:60$, abijce 24 ex utraq; parte, erit cubus AB $p:36$, æqualis 36 rebus AB , inde cognita AB addemus eam BC , quæ est $tpqd$. & conflabitur æstimatio.

REGULA.

Regula est igitur. Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, & conflabitur numerus rerum, hunc duc in $tpqd$. & producti sume differentiam ab aggregato ex numero æquationis, & cubo $tpqd$. quæ si nulla est, erunt res æqles cubo. Si uero productum fuerit maius aggregato, differentia est numerus, qui cum rebus æquatur cubo, & si aggregatum fuerit maius producto, differentia est numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, addes eam $tpqd$. & conflabitur uera æstimatio. Memineris tamen, quod quando capitulum hoc peruenerit ad capitulum cubi æqualis rebus & numero, addenda erit uera æstimatio eius, & ex his quæ fictæ sunt minor, per $m: tpqd$: ut habeas utramq; æstimationem capituli cubi & numeri æqualis rebus & quadratis, cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, unam tantum ueram æstimationem habeat.

Exemplum, Cubus & 64, æqualia sunt 6 quadratis & 24 rebus, duc 6 numerum rerum in 2, tertiam sui partem, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, quem duc in 2 $tpqd$. fit 72, deinde cuba 2 fit 8, adde ad 64, numerum æquationis, fit etiam 72, ideo quia differentia horum numerorum nulla est, habebimus cubum æqualem 36 rebus, quare quadratum æquabitur 36, igitur res est 6, ex capitulo simplici, adde ad 2 $tpqd$. fit 8, æstimatio rei. Rursus, cubus & 128, æquetur 6

qua

quadratis & 24 rebus, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, duc 36 in tpqd , fit 72, differentia cuius à 136, aggregato 128 numeri æquationis, & 8, cubi tpqd , est 64, numerus addendus cubo, quia aggregatum 136, est maius producto 72, quare cubus & 64, æqualia erunt 36 rebus, æstimationes autem sunt 2, & Rz 33 $m:1$, quas adde ad 2 tpqd , fiunt ueræ æstimationes 4, uel Rz 33 $p:1$. Rursus, sit cubus & 9, æqualis 6 quadratis & 24 rebus, duc, ut prius, 6 in 2, tertiam sui partem, fit 12, quem adde ad 24, numerum rerum, fit 36, numerus rerum, ut prius, deinde duc 36, in 2 tpqd , fit 72, differentia cuius à 17 aggregato 8, cubi tpqd , & 9 numeri æquationis, est 55, ideo quia productum est maius aggregato, addemus 55 ad res, & habebimus cubum, æqualem 36 rebus $p:55$, huius igitur uera æstimatio est, Rz $17\frac{1}{4}p:2\frac{1}{2}$, falsa maior est $m:5$, & falsa minor $m:V$; Rz $27\frac{1}{4}m:2\frac{1}{2}$, seu ut clarius intelligas, $2\frac{1}{2}m:Rz$ $17\frac{1}{4}$, adde igitur hanc æstimationem, & similiter ueram, tpqd , quæ est 2, habebis æstimationes quæsitas, alteram $4\frac{1}{2}p:Rz$ $17\frac{1}{4}$, reliquam $4\frac{1}{2}m:Rz$ $17\frac{1}{4}$.

De cubo rebus & numero, æqualibus quadratis.

Caput

XXII.

DEMONSTRATIO.



It denuo cubus AC , cum 4 rebus, & 16 numero, æqualis 6 quadratis, & BC sit tpqd , ut prius, resoluemus igitur cubum AC , qui æqualis est cubo AB , 6 quadratis AB , 12 rebus AB , & cubo BC , qui est 8, & erit hoc totum, cum 4 rebus AC , & 16, æquale 6 quadratis AC , quare cū 4 res AC , sint 4 res AB , $p:4BC$ & ideo $p:8$, erunt cubus AB , $p:6$ quadratis AB , $p:16$ rebus AB , $p:32$, æqualia 6 quadratis AC , 6 autē quadrata AC , æqualia sunt, ut demonstratum est, 6 quadratis AB , $p:24$ rebus AB , $p:24$, igitur cubus AB , & 6 quadrata AB , & 16 res AB , & 32, æqualia sunt, 6 quadratis AB , $p:24$ rebus AB , $p:24$, abijce ex utraq; parte 6 quadrata AB , & 16 res, & 24, relinquetur cubus AB , $p:8$, æqualis 8 rebus, inde cognita AB , adde ei BC , tpqd , & fiet AC cognita, rei æstimatio. Rursus, cubus & 4 res & 1, æquentur 6 quadratis, erunt igitur 6 quadrata AC , ut prius, 6 quadrata AB , 24 res AB , & 24. At cubus AC , cum 4 rebus AC , $p:1$, æqualis est cubo AB , & 6 quadratis AB , & 16 rebus, & 17, quare abiectis communibus, 6 quadratis AB , & 16 rebus AB , & 17, erit reliquum reliquo æquale, scilet cubus, æqualis 8 rebus $p:7$, inde cognita AB , habes AC , ut prius, addendo BC tpqd .

L 3

REGV

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in sui tertiā partem, & à producto minue numerum rerū, quod si fieri nequeat, casus est impossibilis, in uera æstimatione, residuum. itaq; erit numerus rerum, inde multiplica primum numerum rerum in $tpqd$, & productū adde numero æquationis, huius aggregati & dupli cubi $tpqd$. differentiā accipe, quæ si nulla est, habes cubum æqualem rebus solum, sin duplum cubi $tpqd$. maius est, differentia est numerus addendus rebus, si duplum cubi minus est aggregato, differentia est numerus addendus cubo, inde estimationi inuentæ adde $tpqd$, ut habeas æstimationem ueram.

Exemplum, cubus & 4 res & 8, æquantur 6 quadratis, duc 6 in 2, tertiā sui partem, fit 12, abijce 4 fit numerus rerum 8, duc etiam 4 numerum rerum, priorem, in 2 $tpqd$. fit 8, adde ad 8, numerū æquationis, fit 16, huius & dupli cubi $tpqd$. quod est etiā 16, nulla est differentia, quare cubus æquatur 8 rebus, & rei æstimatio est rx 8, cui adde 2 $tpqd$. fiet uera æstimatio rei, rx 8 p: 2. Rursus, cubus p: 4 rebus p: 16, æqualis fit 6 quadratis, duco 6 in 2 $tpqd$. ut prius, fit 12, abijce 4 numerum rerum, fit 8, rerum numerus, duco 4 numerū priorem rerum, in 2 $tpqd$. fit 8, adde ad 16 numerum æquationis, fit 24, abijce 16, duplum cubi $tpqd$. relinquitur 8, igitur addemus 8 cubo, quia aggregatum maius est duplo cubi $tpqd$. & fiet cubus p: 8, æqualis 8 rebus, res igitur est 2, uel rx 5 m: 1, quare addito 2, $tpqd$. fiet uera estimatione 4, uel rx 5 p: 1. Rursus, cubus & 4 res & 1, æquantur 6 quadratis, eruntq; ut prius, 8 res, & ducto numero rerum priore, qui est 4, in 2 $tpqd$. fit 8, addito 1, numero æquationis, fit 9, duplum cubi $tpqd$. est 16, differentia est 7, & quia duplū cubi maius est aggregato, erūt 8 res, & 7, æqualia cubo, quare res ualet rx $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, uel in æquatione falsa, minor æstimatio erit 1 m: adde 2 $tpqd$. cuius, habebis duas ueras æstimationes, scilicet 1, & rx $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$.

Memineris autem eius, quod diximus in præcedenti capitulo, etiam hic, quod cum peruenerit æquatio ad cubum æqualem rebus tantum, quia falsa æstimatio à uera non differt in numero, ideo pro secunda æstimatione, quia nihil additur, nec p: nec m: $tpqd$. ideo ipsa $tpqd$, erit æstimatio uera, in utroq; ut hic æstimatio cubi & 4 rerum & 8, æqualium 6 quadratis, erit rx 8 p: 2, uel 2, & in præcedente capitulo, æstimatio cubi & 64, æqualium 6 quadratis & 24 rebus, erit 8 ut dictum est, & etiam est 2, $tpqd$. scilicet, & hoc, quia omnes additiones & detractiones, ex tertia parte numeri quadratorum fieri debent.

De

De cubo quadratis & numero, æqualibus rebus.

Caput

XXIII.

DEMONSTRATIO.



It etiam cubus, 6 quadrata, & 4, æqualia 41 rebus, & sit cubus A B, cui addam B C tpqd. eritq; A C cubus, æqualis cubo A B, 6 quadratis, 12 rebus, & 8, loco cubi A B 6 quadratorum, & 4, ponantur 41 res, his æquales, erit cubus A C æqualis 53 rebus A B, & 4, qui est differentia cubi B C, & 4 numeri equationis primi, ad complendum igitur 53 res A C, addantur 53 B C, eruntq; cubus A C p: 106, æqualia 53 rebus A C, p: 4, abijce 4 ex utraque parte, erit cubus p: 102, æqualis 53 rebus suis, inde A C æstimatione inuenta, abijce B C tpqd. relinquetur A B cognita, & est res ipsa.

REGULA.

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, fiet numerus rerum secundus, ab hoc minue quadratum tpqd. & residuum duc in tpqd. & totum productum adde numero æquationis, & conflabitur numerus, qui cū cubo æquabitur rebus iam assignatis, inde ab eius estimationibus minue tpqd. residua sunt quæsitæ æstimationes, ideo sufficiet unum exemplum.

Cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus, Duc 6 numerū quadratorum, in 2, sui tertiam partem, fit 12, adde ad 31, fit 43, numerus rerum, ab hoc abijce 4 quadratū tpqd. relinquitur 39, quem duc in 2 tpqd. fit 78, adde ad 12, numerum æquationis, fit 90, igitur cubus p: 90, æquatur 43 rebus, res igitur est 5, uel $R\ 24\frac{1}{4}m: 2\frac{1}{2}$, abijce 2 tpqd. habebis ueras æstimationes 3, uel $R\ 24\frac{1}{4}m: 4\frac{1}{2}$, & in his ambabus, uerū est, quod cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus. Memineris igitur quod omnes horum capitulorum æstimationes, habentur, addendo semper ueras & fictas æstimationes capitulorum in quo resoluuntur tpqd. & dummodo numerus relinquať, etiam id quod additur sit m: purum, illud relictum est rei uera æstimatio. possunt etiam resolui in capitula alia quatuor denominationū, ut liquet.

De 44 capitulis deriuatiuis.

Cap.

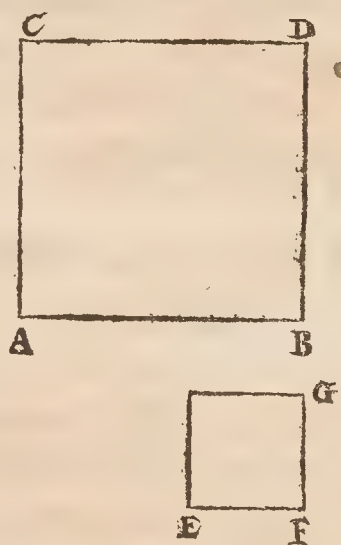
XXIII.

DEMONSTRATIO.

Sit



It igitur (gratia exempli) cubus quadrati, cum 6 qd' qdratis, æqualis 100, & sit cubus qdrati, corpus A B C D, altitudinem habens A B, erit igitur qdratum, quia latus cubi cū corporis A B C D, quod supponitur cubus quadrati, manifestum est igitur, quod superficies A B C D, est qd' qd^m, quia iam A B supponitur quadratum, sexcuplum igitur A B C D superficiei, cum A B C D corpore, æqle est 100, ex supposito, ponatur igitur A B res, erit igitur corpus A B C D cubus, & superficies A B C D qdratum, suppositum est aut, quod corpus A B C D, cum sexcuplo A B C D superficiei, sit æquale 100, igitur cubus A B & 6 quadrata A B, æqualia sunt 100, quare ex suo capitulo A B cognita, at A B in prima interrogatione fuit qdratum, igitur æstimatio quadrati in prima interrogatione, quando cubus quadrati, & 6 qd' qd^m æquantur 100, cognita erit, cum sit eadem æstimationi rei in secunda quæstione. At nos uolumus in prima quæstione rei æstimationem, res autem est semper R² quadrati, igitur R² A B æstimationis inuentæ per secundam quæstionem, est rei æstimatio in prima quæstione, ut proponebatur. Eadem ratione, si posuerimus cubū quadrati, & 6 cubos, æquales 100, erit corpus A B C D, cubus quadrati, & A B quadratum, cui si ponatur aliqua superficies quadrata æqualis, puta E F G, erit sexcuplum corporis ex E F in E F G, cum corpore A B C D, æquale 100, ponatur modo corpus E F G res, quia igitur E F est R² A B, ex supposito erit cubus E F R² cubi A B, igitur corpus A B C D, quadratū corporis ex E F in E G, posito igitur corpore A B C D quadrato, erit cubus E F res, & sexcuplum eius sex res, & iam sexcuplum cubi E F, cum corpore A B C D, æquabatur 100, & non mutantur corpora, sed manent eadem, & sexcuplum cubi E F, est 6 res, et corpus A B C D quadratum, igitur quadratum & 6 res, æquantur 100, igitur res est cognita, scilicet cubus E F, sed cum E F sit latus cubi cum sui cubi, igitur E F cognita erit, quæ est R² cubica, æstimationis inuentæ. At cum E F sit res in prima quæstione, quia est R² quadrata A B, & A B supponitur quadratum, posito A B C D, corpore cubo quadrati, igitur posito A B C D corpore cubo quadrati, erit res E F, & nota latus scilicet cubicum æstimationis inuentę per secundam quæstionem, quam uolumus.



Ex hoc manifestæ sunt regulæ capitulorum deriuatiuorum omnium.

nium. ostendimus enim in uniuersum, capitula 16 primitiua composita, & sunt hæc.

Primū, Quadratū æq̄le rebus & numero. 2^m, res æq̄les q̄d° & numero. 3^m, numerus æq̄lis q̄d° & rebus. 4^m, cubus æq̄lis rebus & numero. 5^m, res æq̄les cubis & numero. 6^m, numerus æq̄lis cubo & rebus. 7^m, cubus æq̄lis q̄d' & numero. 8^m, q̄d' æq̄lia cubo & numero. 9^m, numerus æq̄lis cubo & q̄d'. 10^m, cubus æqualis q̄d' rebus & numero. 11^m, q̄d' æq̄lia cubo reb' & numero. 12^m, numerus æq̄lis cubo q̄d' & reb'. 13^m, res æq̄les cubo q̄d' & numero. 14^m, cubus & numerus æq̄les q̄d' & reb'. 15^m, cubus & res æq̄les q̄d' & numero. 16^m, cubus & q̄d' æq̄lia rebus & numero. Manifestū est aut̄ quòd ex his 2^m, 5^m, 8^m, 11^m, 13^m & 14^m, scd^m naturam, habent duas æstimationes, ex toto diuersas, & à diuersis regulis pendentes. Vnde duplicatis his capitalis fiēt capitula primitiua 22 cōposita, unicuiq̄ aut̄ eorum debent̄ duo capitula deriuatiua, alterū ex natura q̄drati, alterum ex natura cubi, nam etsi deriuatiua sint infinita, in unoquoq̄ capitulo, omnia tñ reducuntur ad alterum horū duorum modorum, loquendo de his, de q̄bus potest haberi regula generalis. Igitur manifestū est, ipsa esse ad unguē 44, quanq̄ em̄ capitulum rerum æq̄lium q̄dratis & numero, habeat duas æstimationes diuersas, ideo tñ duplicatum dici nō debet, quia illæ æstimationes una regula simul habent̄, & similiter quamuis capitulū cubi & rerum æq̄lium q̄dratis & numero, habeat tres æstimationes ueras, non tamē hoc est illi propriū, & mea nihil refert de numero dicere, modo scias, quòd omnia primitiua, habent duo deriuatiua diuersi generis, & quòd capitula primitiua cōposita, ad minus reduci nequeūt quàm 18, igitur cōtracto numero, quantumuis erunt deriuatiua saltē 36, nā capitula, rerū æq̄lium numero & cubo, & q̄dratorum æq̄lium cubo & numero, necessario sunt duplicata, manifestum est em̄, quantū una æstimatio ab alia differat. Oblato igit̄ capitulo, ex tribus aut quatuor denominationibus cōstante, si non adsit numerus, primo oēs denominationes per minorē deprime, ita ut minor in numerū euadat, deinde accipe inferiorē denominationē, & uide si constat capitulū, ex tribus denominationibus, an minor sit radix maioris q̄drata uel cubica, uel q̄ radix minoris q̄drata, sit & cubica maioris, tunc quæres æstimationē in cōsimili capitulo ex 16, deinde eius æstimationis, accipe talē radicē, q̄lis est denominatio minor, cōparata ad minorem, una unius ordinis ad reliquā, & ad facilitatē. Disposui deriuatiua oīa, in directo suorū primitiuorū, in capitulo 2°, etiā constantia ex q̄tuor denominationib', in quibus si bene aduerteris, semper minor denominatio, id est, infe-

rior post numerum, est radix quadrata unius, & $\mathcal{R}$ cubica alterius, denominationis eiusdem capituli. Exemplum. Igitur si quis dicat,

1^m. Quad' $\mathcal{Q}$ d' p: 2 $\mathcal{Q}$ dratis, equantur 10, uides quod eius primitiuū est quad' & res, æqualia numero, quere igitur æstimationem $\mathcal{Q}$ d' p: 2 rebus, æqualis 10, & est $\mathcal{R}$ 11 m: 1, & quia res est $\mathcal{R}$ quadrata $\mathcal{Q}$ drati, dic quod æstimatio est $\mathcal{R}$ v: $\mathcal{R}$ 11 m: 1.

2^m. Cu' $\mathcal{Q}$ d', p: 2 cu', æquatur 10, eius primitiuum est etiam quad' p: rebus, æqualia numero, cum igitur $\mathcal{Q}$ d' & 2 res, æquantur 10, æstimatione rei est $\mathcal{R}$ 11 m: 1, cum igitur res sit $\mathcal{R}$ cubica cubi, minor scilicet denominationis minoris, erit æstimatio quæ sita $\mathcal{R}$ v: cub' $\mathcal{R}$ 11 m: 1.

3^m. Quad^m relati primi, & 2 rel' prima equantur 10, uides quod relatum est $\mathcal{R}$ $\mathcal{Q}$ drata, $\mathcal{Q}$ drati relati primi, dic igitur hoc esse deriuatiuum ex genere quadrati, si igitur $\mathcal{Q}$ d' & 2 res, æquantur 10, æstimatione est $\mathcal{R}$ 11 m: 1, igitur cū res sit $\mathcal{R}$ relata relati, dices quod æstimatio quæ sita, est $\mathcal{R}$ relata v: $\mathcal{R}$ 11 m: 1.

4^m. Cubus $\mathcal{Q}$ d' p: 3 $\mathcal{Q}$ d' $\mathcal{Q}$ dratis, æqualis est 20, tunc uides, quod eius primitiuum est cubus & quadrata, æqualia numero, cum igitur cubus & 3 $\mathcal{Q}$ drata æquantur 20, æstimatione rei est 2, & quia quadratum est radix quadrata, $\mathcal{Q}$ d' $\mathcal{Q}$ drati, ideo æstimatione rei erit $\mathcal{R}$ 2.

5^m. Cubus quadrati p: 3 $\mathcal{Q}$ d' $\mathcal{Q}$ dratis, p: 10, æquatur 15 quadratis, uides quod eius primitiuum in tabula, uel ex ratione dicta, est cubus & quadrata & numerus, æqualia rebus, ideo quære æstimationem cubi & 3 $\mathcal{Q}$ d' & 10, æqualium 15 rebus, quæ est 2, & quia res est radix quadrata, quadrati, ideo dices quod æstimatione erit $\mathcal{R}$ 2.

6^m. Cubus cubi & 3 cu' $\mathcal{Q}$ d'², & 10, æquantur 15 cubis, dices ut prius, primitiuum esse cubum & quadrata & numerum, æqualia rebus, igitur si cubus & 3 quadrata & 10, æquantur 15 rebus, res est 2, & quia res est $\mathcal{R}$ cubica cubi, ideo dicemus quod æstimatione erit $\mathcal{R}$ cubica 2, & quia primitiuum habet duas æstimationes, ut notum est, totidem etiam habebit deriuatiuum, & utriusq; $\mathcal{R}$ cubica in hoc exemplo & quadrata in præcedenti, satisfaciet, & hoc est generale omnibus deriuatiuis, ut habeant totidem æstimationes, quot sua primitiua.

7^m. Sit etiam cubus cubi æqualis 3 cubis quadrati & 16, tunc quia ducta $\mathcal{R}$ cubi $\mathcal{Q}$ ² quæ est cubus, in cubū quadrati, fit cubus cubi, ideo res erit in capitulo deriuatiuo generali, & eius primitiuum erit, cubus æqualis quadratis & numero, si igitur cubus æqualis sit 3 quadratis p: 16, æstimatione rei erit 4, quia igitur quadratum minor denominatio in secunda æquatione, est $\mathcal{R}$ cub. cubi quadrati, ideo dico, quod sumenda erit $\mathcal{R}$ cub. 4, pro æstimatione. Et ita de alijs.

Et

Et similiter dices, de cubo cubi & cubo, nam potest referri ad 8^m. re & cubum, ut enim res est re cubica cubi, sic cubus est re cu: cub cubi. Potest & referri ad quadratū, & cubum quadrati, nam ex utraq; in suam radicem, producitur compar denominatio, nam ex quadrato in rem, fit cubus, & ex cu qdrati in cubum, fit cubus cubi, sed prior modus est facilior.

De capitulis imperfectis & particularibus. Cap. XXV.



Regulæ hæ, dicuntur generales, & hoc duabus de causis, prima, q̃a modus in se generalis est, quamq̃ repugnet naturæ æstimationis, ut sit uniuersalis, uelut si quis dicat, omnis numerus productus ex aliquo in se ducto, quadratus est, regula est generalis, nec tamen sequitur, quod per hanc regulam, cognoscam omnem numerum quadratum, quia non licet cognoscere omnem numerum, qui ex alio in se ducto producitur. Dicitur & generalis regula, quia exhaurit æstimationis genus uniuersum, quamq̃ æstimatio non exhauriat regulam, particulares tamen sunt regulæ, quia non omnem propositam quæstionē per illas soluere posumus.

Cum igitur cubus æqualis est rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum una in alterius radicem, fiat numerus æquationis, tunc adde quartam partem eius partis, cuius sumenda esset radix, alteri parti, & re aggregati, addito dimidio re partis, cuius assumpsisti radicem, est æstimatio rei.

Exemplum. Cubus æqualis sit 20 rebus & 32, tunc ex 16 in re 4, fit 32, igitur addo 1 quartam partem 4, ad 16, fit 17, cuius re p: 1, dimidio re 4, est rei æstimatio, quare res est re 17 p: 1.

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos numeros, producentes numerum æquationis, quorum unus sit re aggregati, ex altero & numero rerum, ille qui est re, est rei æstimatio.

Exemplum. Cubus æquatur 24 p: 32 rebus, & sunt duo numeri, producentes 24, qui sunt 6 & 4, quorum 6 est re aggregati, ex 32 numero rerum, & 4 alio producente, nam 6 est re 36, igitur 6 est rei æstimatio.

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum utraq; in alterius radicem mutuo, fiat dimidium numeri æquationis, radices illarum partium, cōstituunt iunctæ, rei æstimationem.

Exemplum, Cubus æquetur 10 rebus
p: 24, & ex 10 fiunt duæ partes, 9 & 1,
ex quarum mutua unius in & alterius mul-
tiplicatione fiunt 9 & 3, qui iuncti faciunt
12, dimidiũ 24, igitur radices 9 & 1, quæ
sunt 3 & 1, iunctæ, constituunt 4, rei æstimationem.

$$\begin{array}{r} \text{cub}^o \text{ æqlis } 10 \text{ reb}^o \text{ p: } 24 \\ 9 \text{ --- } 1 \\ 3 \text{ } \times \text{ } 1 \\ \hline 12 \end{array}$$

- 4^a. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerũ
feceris tres partes proportionales, ex quarum ductu mediæ in aggre-
gatum, radicum primæ & tertiæ, fiat numerus æquationis, seu ex ter-
tia in & primæ, & primæ in & tertiæ, quod idem est, tunc tale aggre-
gatum dictarum radicum, est rei æstimatio.

Exemplum. Cubus æquatur 19 rebus
p: 30, & ex 19 fiunt tres partes proportio-
nales, 9, 6, 4, ex quarum secunda, quæ est 6
in 5 aggregatum radicum primæ & tertiæ,
fit 30, ideo 5 aggregatum radicum, est rei
æstimatio.

$$\begin{array}{r} \text{cub}^o \text{ æqlis } 19 \text{ reb}^o \text{ p: } 30 \\ 4 \text{ --- } 6 \text{ --- } 9 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad 2 \quad \quad 3 \\ 12 \text{ --- } \quad \quad 18 \text{ --- } 30 \end{array}$$

- 5^a. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos
numeros, quorum aggregatum, ductum in productum unius in alte-
rum, producat tertiam partem numeri æquationis, & quadrata illorũ
æqualia fuerint aggregato ex numero rerum, & producto unius in al-
terum, tunc aggregatum illorum numerorum, est rei æstimatio.

Exemplum. Cubus æquetur 7 rebus
p: 90, & 3 & 2 ducti inuicem producunt 6,
qui ductus in 5, aggregatum, producit 30,
tertiam partem 90, differentia uero 13, ag-
gregati quadratorum, ab ipso 6, producto
unius in alterum, est 7, numerus rerum, ideo 5, aggregatum illorum,
est rei æstimatio.

$$\begin{array}{r} \text{cub}^o \text{ æqlis } 7 \text{ reb}^o \text{ p: } 90 \\ 9 \quad 3 \\ 4 \quad 2 \quad 6 \text{ --- } 7 \text{ --- } 13 \\ \hline 13 \quad 5 \quad / \quad 30 \end{array}$$

- 6^a. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inuentus fuerit
numerus cubicus, cuius & cubica, ducta in numerum rerum, produ-
cat aggregatum ex numero cubico inuento, & numero æquationis,
seu illorum differentiam, tunc res p: eadem & cubica, erit communis
diuisor cubi, p: eodem numero cubico, & numeri rerum cum nume-
ro aggregato, ex numero æquationis, & numero cubo, uel res m: &
cubica eadem, erit communis diuisor, cubi m: numero cubo inuento,
& numeri rerum m: differentia numeri æquationis, & numeri cubi in-
uenti, inde peruenies ad rei æstimationem.

Exemplum. Cubus æquatur 16 rebus p: 21, tunc quia addito

27 numero cubo, ad 21 fit 48, qui produ-
citur ex 3 & cubica 27, in 16 numerum re-
rū, ideo dico, quod res p: 3, erit cōmunis
diuisor, addito 27 utriq; parti, scilicet cu-
bo & 16 rebus p: 21, inde facta diuisio-
ne, habebis quadratum m: 3 rebus p: 9,
æqualia 16, quare qdratum æq̃bitur 3 rebus p: 7, & res erit & 9 $\frac{1}{4}$ p:
1 $\frac{1}{2}$. Et similiter, si dicamus, cubus equat 4 rebus p: 15, hic abiecto 15
ex 27 numero cubo, differentia quæ est 12, continet 4, numerum re-
rum, in 3, radice cubica 27, ideo dico, quod abiecto communi 27, ex
utræq; parte, fiet cubus m: 27, æqualis
4 rebus m: 12, inde diuisis ambobus
per rem m: 3, communem diuisorem,
fiet quad. p: 3 rebus p: 9, æquale 4, qua-
re æquatio nulla sequetur, quamuis per-
ueneris ad modum æquandi, in detra-
ctione, nisi forsitan aliquando per m: syncerum.

$$\begin{array}{r|l} \text{cub}^o \text{ æqlis} & 16 \text{ reb}^o \text{ p: } 21 \\ & \frac{3}{48} \quad \frac{27}{48} \\ & 1 \text{ res p: } 3 \\ \text{cub}^o \text{ p: } 27 & 16 \text{ res p: } 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{cubus æqlis} & 4 \text{ reb}^o \text{ p: } 15 \\ & \frac{3}{12} \quad \frac{27}{12} \\ & 1 \text{ res p: } 3 \\ \text{cub}^o \text{ m: } 27 & 4 \text{ res m: } 12 \end{array}$$

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum 7^a.
auferatur $\frac{3}{4}$ quadrati rei, & & residui addatur, aut minuatur, ex dimi-
dio rei, aggregatum ductum in quadratum residui, & residuum du-
ctum in quadratum aggregati, producent numerum æquationis.

Exemplum. Cubus æquatur 14
rebus p: 8, & rei æstimatione est 4, cuius
qdratum est 16, huius $\frac{3}{4}$ sunt 12, abij-
ce ex 14 numero rerum fit 2 residuū,
cuius radicem adde, & minue ex 2, di-
midio 4, æstimationis rei, fiunt 2 p: & 2,
& 2 m: & 2, dico igitur quod ex uno
in quadratum alterius mutuo fiunt 8 scilicet numerus æquationis.

$$\begin{array}{r|l} \text{cubus æqualis} & 14 \text{ rebus p: } 8 \\ \text{res } 4 \text{ quadratum} & 16 \\ \frac{3}{4} \text{ qdrati} & 12 \quad \text{---} \quad 14 \quad \text{---} \quad 2 \\ 2 \text{ p: } \& 2 & \times < 6 \text{ p: } \& 32 \\ 2 \text{ m: } \& 2 & \quad \quad 6 \text{ m: } \& 32 \\ \hline & 8 \end{array}$$

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & diuiseris dimi- 8^a.
dium numeri æquationis, per rei æstimationem, addiderisq; prouen-
tum numero rerū, & ab aggregato detraxeris $\frac{3}{4}$ quadrati ipsius rei,
& residui, addita & detracta, à dimidio æstimationis, ostendit partes,
ex quarum ductu unius in quadratum alterius mutuo, producitur di-
midium numeri æstimationis.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & æstimatione est 4,
diuide 4 dimidium 8, per 4, æstimationem exit 1, adde ad 14 fit 15,
abijce 12, qui sunt $\frac{3}{4}$ quadrati æstimationis, relinquitur 3, cuius radi-
cē adde ac minue, ex 2 dimidio æstimationis, habebis 2 p: & 3, & 2 m:

$$\begin{array}{r|l} \text{M} & 3 \\ & \& 3, \end{array}$$

$\text{Rz } 3$, ex quorum ductu unius, in quadratum alterius mutuo, fit 4 dimidium numeri æquationis.

9°. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & inueneris numerum, qui ductus in Rz aggregati, ex ipso & numero rerū, producat numerum æquationis, tunc dimidia eius Rz , addita uel detracta radici differentiae numeri æquationis, & $\frac{3}{4}$ eiusdem aggregati, constituit rei æstimationem.

Exemplum. Cubus $p: 12$ æquatur 34 rebus, tunc quia addendo 2 ad 34 , productum ex ipso 2 , in $6 \text{ Rz } 36$ aggregati 2 , & 34 est 12 numerus æquationis, ideo dico, quod si ad 3 , dimidiū radicis 36 addatur uel minuatur $\text{Rz } 7$ differentiae 34 numeri æquationis & 27 , quod est $\frac{3}{4}$ quadrati 6 , seu talis aggregati, quod confurget rei æstimatio, $3 p: \text{Rz } 7$, uel $3 m: \text{Rz } 7$.

10°. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & subtraxeris talem numerum ex numero æquationis, ita quod Rz cuba differentiae, ducta in numerum rerum, producat numerum detractum, tunc res $m: \text{Rz}$ cubica differentiae, erit communis diuisor, facta detractio, & hæc regula similis est sextæ, sicut præcedens secundæ.

Exemplum. 16 res æquantur cubo & 21 , detracto 48 , relinquitur 27 , cuius Rz cubica 3 , ducta in 16 numerum rerū, producit 48 , igitur detracto 48 , ex utraque parte, fient cubus $m: 27$, & 16 res $m: 48$, inde diuisor communis erit res $m: 3$, & prouenient quadratum & 3 res & 9 , æqualia 16 , quare quadratum & 3 res, æquabuntur 7 , & rei æstimatio erit, $\text{Rz } 9\frac{1}{4} m: 1\frac{1}{2}$.

11°. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & ex numero rerum feceris tres partes proportionales, ex quarum secunda, ducta in differentiam radicū primæ & tertiæ, seu ex ductu primæ in Rz tertiæ, & tertiæ in Rz primæ, differentia æqualis fuerit tertiæ parti numeri æquationis, erit differentia illarum radicū rei æstimatio, & est similis 4^e.

Exemplum. 19 res æquales sunt cubo & 18 , cum ex 19 factæ fuerint tres partes proportionales $4, 6, 9$, ex quarum media 6 ducta

cubus æqlis 14 rebus $p: 8$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 4 \\ \hline 15 & 12 \\ 2 p: \text{Rz } 3 & 2 m: \text{Rz } 3 \\ 7 m: \text{Rz } 48 & 7 p: \text{Rz } 48 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

cub⁹ & 12 æqlis 34 rebus

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 36 \\ 12 - 2 - 6 \\ 34 \quad 3 \\ 27 \\ \hline 7 \end{array}$$

cubus & 21 æqlis 16 reb⁹

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 27 - 3 \\ 48 \end{array}$$

res $m: 3$

cub⁹ $m: 27$ | 16 res $m: 48$

in differentiam radicum 9 & 4, quæ est 1, fiat 6, tertia pars 18 numeri æquationis, ideo dico quod 1 differentia talium radicum est rei æstimatio.

Cum fuerint res equales cubo & nu-

mero, & cum r̄ cubica numeri æquationis, diuiferis numerum rerum, & de eo quod exit, feceris duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat numerus æquationis, tunc quantitas proportionalis, inter r̄ rubicam numeri æquationis, & partem, quam ducis in q̄dratum alterius, ut fiat æquationis numerus, est rei æstimatio.

Exemplum. 18 res æquantur cubo p: 8, diuiso 18 per 2 r̄ cubam 8, exit 9, ex quo fiunt duæ partes 8 & 1, ex quarum una quæ est 8, in quadratum alterius quod est 1, fit 8, numerus æquationis, ideo 4 numerus proportionalis inter 8, partē 9, quam duxisti in quadratum 1, alterius partis, & 2 r̄ cubam 8 numeri æquationis, est rei æstimatio.

cub⁹ & 18 æq̄les 19 reb⁹

$$\begin{array}{r} 9 \quad 6 \quad 4 \\ 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 6 \quad 3 \quad 18 \end{array}$$

18 res æquales cubo p: 8

$$\begin{array}{r} 2 \quad \text{---} \quad 2 \\ 9 \quad \text{---} \quad 1 \quad \text{---} \quad 8 \quad \text{---} \quad 4 \\ \quad \quad 1 \quad \quad 8 \end{array}$$

Cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, & ex tertia parte numeri rerum, feceris duas partes, quæ ductæ in suas radices, producant duos numeros, qui iuncti, æquales sint dimidio numeri æquationis, aggregatum illarum radicum, est rei æstimatio, & est similis tertiæ regulæ.

Exemplum. 15 res, æquantur cubo & 18, capio 5, tertiam partem 15, ex quo facio duas partes, 4 & 1, quæ ductæ in suas radices, 2 & 1, producant 8 & 1, quorum aggregatum 9, est dimidium 18 numeri æquationis, ideo dico,

15 res equales cubo p: 18

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1 \quad \text{---} \quad 4 \\ 1 \quad \text{---} \quad 2 \quad \text{---} \quad \text{res } 3 \\ \hline 1 \quad \text{---} \quad 8 \quad \text{---} \quad 9 \quad \text{---} \quad 9 \end{array}$$

quod 3, aggregatum talium radicum, est rei æstimatio. Et iam scis, etiam ex regula generali, quod quotiens ex numero rerum possunt fieri duæ partes, quarum una ducta in alterius radicem, producat numerus æquationis, quod talis r̄ est rei æstimatio, & quod hoc potest esse duobus modis, & quomodo cadat in Binomio uel reciso & integris, ideo quamuis essent similes primæ regulæ, quia tamen ex capitulo generali, quasi uolenter in eam rapimur, satis fuerit admonuisse hic.

Cum fuerit numerus æq̄lis cubo & quadratis, & sciueris ex numero quadratorum facere duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum

dratum alterius, fiat numerus equationis, tunc duces partem quæ non in se ducitur, in aggregatum eius quæ in se ducitur, & quartæ partis eius, quæ non in se ducitur, producti R, detracto dimidio partis, quæ non in se ducitur, est rei æstimatione.

Exemplum. Cubus & 20 quadrata, æquantur 72, ex 20 fiunt duæ partes, 18 & 2, & ex una in quadratū alterius fit 72, nam ex 18 in 4 fit 72, dico, quod si 18, ducatur in $6\frac{1}{2}$ aggregatū ex 2 reliqua parte, & $4\frac{1}{2}$, quarta parte ipsius 18, fiet 117, cuius R, detracto 9, dimidio 18, ostendit æstimationem rei R 117 m: 9.

$$\begin{array}{r} \text{cub}^9 \text{ \& 20 qdrata æqlia 72} \\ 2 \quad 18 \\ 4\frac{1}{2} \\ 2 \\ \hline 6\frac{1}{2} \text{ --- } 18 \text{ --- } 117 \\ \hline \text{R } 117 \text{ m: } 9 \end{array}$$

- 15^a. Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, & inueneris numerum non minorem quarta parte numeri quadratorum, nec maiorem tertia parte, cum quo diuiso numero equationis, proueniat numerus quadratus, cuius radicis dimidium additum numero quadratorum, faciat quadruplum ipsius diuisoris, tunc æstimatione rei est duplum numeri diuisoris, p: uel m: radice producti, ex quadruplo diuisoris, in differentiam numeri rerum, & tripli ipsius diuisoris.

Exemplum. Cubus p: 48 æquatur 10 quadratis, tunc quia 3, qui non est minor quarta parte 10 numeri quadratorum, nec eius tertia parte maior, diuidēs 48 producit 16, cuius medietas radicis quæ est 2, addita ad 10 numerum quadratorum, constituit 12, quadruplum diuisoris 3, ideo dico, quod si duplo diuisoris quod est 6, addatur uel detrahatur R producti, ex 12 quadruplo 3 diuisoris, in 1, differentiam 10 numeri rerum, & 9, tripli 3, diuisoris, & est tale productum etiam 12, quod constituemus utramq; æstimationem, 6 p: R 12, uel 6 m: R 12.

$$\begin{array}{r} 10 \text{ quad. æql. cubo \& 48} \\ 3 \quad \quad \quad 3 \\ 4 \quad \quad \quad 4 \text{ --- } 16 \\ 12 \quad \quad \quad 2 \text{ --- } 10 \text{ --- } 12 \\ \hline 6 \text{ p: R } 12 \text{ uel } 6 \text{ m: R } 12 \end{array}$$

Not^a. Et scias, quod per capitula cognoscuntur regulæ & quæstiones super his formatæ cum facilitate, quæ aliàs uix soluerentur, ipsæ uero regulæ sumptæ sunt ex demonstrationibus capituli sexti, & ego non apposui eas, quia intelligenti nostros libros super Euclidem, sunt per se manifestæ, & non intelligens nō curabit illas, nec quæret, quoniam non sunt ei necessariae.

- 16^a. Operæ precium fuerit nunc ostendere, quod hæ regulæ non possunt esse generales, respectu æstimationis, & modus in uno sufficiet ad

ad ostendendum in reliquis capitulis. Capiamus igitur capitulū proximius, & de quo magis posset hoc credi, propter multiplicem estimationem, & sit cubus p: numero, æqualis 7 quadratis, & sit $2\frac{2}{3}$ numerus positus, id est numerus, qui primo cognoscitur in sexto capitulo, regula secūda, erit igitur ex illa regula, rei æstimatio, & 16 p: $2\frac{2}{3}$, q̄re $6\frac{2}{3}$, quare residuū ad numerum q̄dratorū est $\frac{1}{3}$, quare ex demonstratione posita in initio tertij libri, productū $6\frac{2}{3}$, in q̄dratū $\frac{1}{3}$, est numerus fractus, & est $\frac{20}{27}$, & e contra, ducto $\frac{1}{3}$ in q̄dratum $6\frac{2}{3}$, fit fractus numerus etiam, scilicet $14\frac{22}{27}$, quare posito numero quadratorum integro, & æstimatione fractis numeris constituta, numerus æquationis, qui est superatio partium, quæ sunt rationales, quadratorum ad cubum, nunq̄ poterit esse numerus integer, sed talis æquationis numerus producit ex una parte numeri rerum, in alterius quadratum. Hoc ostenso, Capiō cubum & numerum æquales 7 quadratis, manifestum est autem ex demonstratis in septimo super Euclidem, & ex regulis sexti libri, deducendo numerum ad quadratum & cubum, quod maxima productio partiū 7 in quadratum alterius, est $50\frac{22}{27}$, igitur poterit diuidi 7, ut producat numeros integros, per multiplicationem unius partis in quadratum alterius, ab 1 usq̄ ad 50, & non in fractos, ex demonstratis igitur in integros, at in integris non potest fieri nisi triplex diuissio, ut patet in figura,

nec produci plus quā 6, 20, 36, 48, 50, igitur residui 45 numeri, nullo modo per genus huius æstimationis exhauriri poterunt, particularis igitur est, ac ualde etiam particularis, nec tamen credas, quod in alijs capitulis, numerus pro Binomij aut recisi altera parte non possit inferuire, ut sæpius in exemplis docuimus.

Cum fuerit cubus ac numerus æqualis rebus, & ex rebus numeri rerum feceris duas partes, ex quarum ductu primæ in duplum quadrati secundæ, & secundæ in quadratum primæ, fiat numerus æquationis, tunc secunda pars erit rei æstimatio. 17^a.

Exemplum. Cubus & 48, æquantur 25 rebus, tunc quia ex 5, & 25, fiunt partes 3 & 2, ex quarum ductu 2 in 18 duplum quadrati 3, & ex 3 in 4 quadratum 2, fit 48, ideo dico, quod 3 pars, cuius quadratum duplicatur, est rei æstimatio.

cub ⁹ & 48 æqualis 25 reb ⁹	
$ \begin{array}{r} 2 \quad \times \quad 3 \quad \text{---} \quad 5 \\ 4 \quad \quad \quad 18 \\ 12 \text{ ---} \quad 36 \\ \hline 48 \end{array} $	

Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, & duo numeri differentes in numero æquationis, ducti inuicem, produxerint tantum, 18^a.

N

tum,

tum, quantum ex cubo tpqd. in cubum differentia & cubicarum talium numerorum, tunc differentia talium & cubicarum, est rei æstimatio, ut in exemplo à latere patet, res enim facilis est.

$$\begin{array}{r} \text{cubus \& } 22\frac{1}{2} \text{ qd. æql. } 98 \\ 3375 \text{ ——— } 125 \text{ ——— } 27 \\ 7\frac{1}{2} 5 \text{ ——— } 3 \\ 421\frac{7}{8} \text{ ——— } 8 \\ 3375 \end{array}$$

Ostendit regulas maiores, quæ sunt omnino singulares.

Caput XXVI.

P.  Vando quadratum quadrati & res, æquantur quadratis & numero, & diuiso numero rerum ac numero æquationis, per numerum quadratorum, dimidium exeuntis ex numero rerum, fuerit radix prouentus numeri æquationis iam diuisi, tunc accipe & numeri primi equationis, & ei adde quartam partem numeri quadratorum, & totius accipe radicem uniuersalem, à qua minue & eiusdem quartæ partis numeri quadratorum, residuum est rei æstimatio.

Quest. Exemplum. Quatuor iniere societatem. Primus posuit quantitatem. Secundus posuit quadratū quadrati decimæ partis primi. Tertius posuit quintuplum quadrati decimæ partis primi. Quartus posuit quinq; & tantum posuit primus cum secundo, quantum tertius cum quarto, Quæritur quantū quisq; posuerit? Pone quòd primus posuerit 10 res, secundus posuit igitur quadratum quadrati, tertius 5 quadrata, quartus autem ut dictum est, posuit 5. Igitur quadratum quadrati, & 10 res, æquantur 5 quadratis & 5, diuidendo igitur numerum rerum per numerum quadratorum, exiret 2, cuius dimidium esset & 1, qui prouenit diuiso 5 numero æquationis, per 5 numerum quadratorum, igitur accipe & 5 numeri æquationis, cui adde quartam partem numeri quadratorum, & fiet & 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, cuius accipe & v: quæ est & v: & 5 p: 1 $\frac{1}{4}$, & ab ea minue quartam partem numeri quadratorum, habebis rei æstimationem & v: & 5 p: 1 $\frac{1}{4}$ m: & 1 $\frac{1}{4}$, & habebunt ut uides.

2. Eodē modo, ubi qd' qd^m, æquetur eisdem conditionibus qdratis rebus & numero, regula tenebit similis, & in æstimatione erit idem modus, nisi quòd in fine addemus & quartæ partis numeri qua

$$\begin{array}{l} \text{p: \& v: \& } 50000 \text{ p: } 125 \text{ m: \& } 125 \\ 2^{\circ} 17\frac{1}{2} \text{ p: \& } 500 \text{ m: \& v: \& } \\ \phantom{2^{\circ}} 612500 \text{ p: } 781\frac{1}{4} \\ 3^{\circ} 12\frac{1}{2} \text{ p: \& } 125 \text{ m: \& v: } 78125 \text{ p: } 156\frac{1}{4} \\ 4^{\circ} 5 \text{ ————— } \end{array}$$

quadratorum, radici uniuersali, quam in præcedente regula detrahebamus, ut in exemplo, si $\bar{q}d'\bar{q}d^m$ æquale foret 5 quadratis, 10 rebus & 5 numero, rei æstimatio esset $Rz\ v:Rz\ 5\ p:1\frac{1}{4}, p:Rz\ 1\frac{1}{4}$.

Et causa in his regulis est, qd $Rz\ \bar{q}d'\bar{q}drati$, est $\bar{q}dratum$, & $Rz\ 5\ \bar{q}dratorum\ m:10\ rebus\ p:5$, est $Rz\ 5\ m:Rz\ 5\ quadratorum$, seu $m:rebus\ Rz\ 5$, igitur quadratum & res $Rz\ 5$, æquantur $Rz\ 5$, & æstimatio est nota, quæ est eadem cum illa, $\bar{q}d'\bar{q}d^i$, $p:10\ rebus$, æqualium 5 quadratis & 5, & eadem ratione, si $\bar{q}d'\bar{q}dratum$ æquale est 5 $\bar{q}dratis$, 10 rebus & 5, erit quadratum æquale rebus $Rz\ 5\ p:Rz\ 5$, quare nota est res.

Quando quadratum quadrati & quadrata est res, æqualia fuerint cubis & numero, qui sit 2 p : numero quadratorum, fuerintq; numerus rerum & cuborum idem, & dimidium numeri rerum, radix numeri, tunc duc in se quartam partem numeri rerum, & producto adde 1, & ab hoc minue Rz aggregati ex quadrato dimidiij numeri rerum & unitate, & residui Rz adde uel minue à quarta parte numeri rerum, quod fiet, erit rei æstimatio. 3^a.

Exemplum. Quad' $\bar{q}dratum$ & 34 quadrata & 12 res, æquantur 12 cubis & 36, tunc uides quod cubi sunt æquales rebus in numero, & dimidium numeri rerum est $Rz\ 36$ numeri, & numerus ipse est 2 p : numero quadratorum, ideo duc 3 quartam partem 12 numeri rerum in se, fit 9, adde 1 pro regula, fit 10, abijce $Rz\ 37$ aggregati ex quadrato dimidiij numeri rerum & unitate, fit 10 $m:Rz\ 37$, huius Rz uniuersalem minue uel adde 3, quartæ parti numeri rerum, habebis æstimationem rei, 3 $p:Rz\ v:10\ m:Rz\ 37$, uel 3 $m:Rz\ v:10\ m:Rz\ 37$.

Et modus inueniendi tales regulas habetur ex regula magna, unde etiam capitulo huic nomen dedimus, & est, ut soluas aliquam questionem simpliciter, deinde per regulam magnam, uel etiam aliam, deinde obseruabis conditiones necessarias, in transitu ex una in aliam, postmodum obserua, quo modo perueneris ad rei æstimationem, & facies regulam nouam hoc modo super capitulum ignotum. 4^a.

Exemplum. Fac ex 6 duas partes, ita quod cubus minoris, & quadratum maioris, & productum ex eadem maiore in 8, hæc tria producta, sint proportionalia, dico peruenies per regulam magnam ad hoc quod proportio talium partium erit $Rz\ cub. 8$, scilicet 2, quare diuidemus 6, per $Rz\ cub. 8\ p:1$, & exhibit rei æstimatio, at sequendo positionem, habebimus 1 $\bar{q}d'\bar{q}d^m\ p:24\ \bar{q}dratis\ p:144$, æqualia 8 cub. $p:96$ positionibus. Dicemus igitur, quando $\bar{q}d'\bar{q}d^m$ & $\bar{q}drata$ & numerus, æquantur cubis & rebus, & potuerimus inuenire numerum aliquem, qui ductus in numerum æquationis, producat numerum cuius Rz du-

Et per 6, pro regula,
producat numerum,
qui diuisus per primum
numerum, quem multi-
plicasti, producat nume-
rum quadratorum, tunc
si ipsi primo numero iā
dicto, quem multiplica-
sti in numerum æquatio-
nis, addas 3 pro regula,

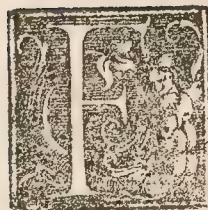
& ducto in rē radicis numeri quem iam ab initio produxisti, proue-
niat numerus, qui diuisus per numerum primum inuentum, produ-
cat numerum cuborum, & numerus rerum ductus per primum nu-
merum, fuerit quadruplus cubo eius rē rē, tunc dico, quod detracto
4, pro regula à primo numero quem multiplicasti, & residui sumpta
rē cubica, & ei addita etiam unitate pro regula, & cum aggregato di-
uisa tali rē rē, quod prouenit, est rei æstimatio. Et causa in hoc est,
quod in tali quæstione, numerus qd'qd', prouenit ex multiplicando,
unitate addita, numerus cuborum, ex diuidendo in multiplicandum,
p:4, numerus quadratorum uero, ex sexcuplo quadrati diuidendi,
numerus rerum ex quadruplo cubi diuidendi, numerus æquationis
est qd'qdrati diuidendi. Diuidendum uoco in hac quæstione 6, multi-
plicandum autem 8. Exemplum, qd'qdratum p:6 quadratis p:4, æ-
quatur 3 ½ cubis p:8 rebus, pone primū numerum qdratum, duc in
4, fiunt 4 qdrata, huius rē est 2 res, duc in 6 ex regula, fiunt 12 res,
quas diuide per quadrata, exit quod æquatur 6, igitur 6 quadrata,
æquantur 12 rebus, res igitur est 2. Nos autē in positione posuimus
quadratum, igitur numerus primus seu multiplicandus erit 4, & cum
cæteræ conditiones conueniant, quæ dictæ sunt, erit 2 numerus diui-
dendus, quo diuiso per rē cub. 3 p:1, exhibit æstimatio rei, & de hoc di-
ximus capitulo sexto.

6	
1 pos:	6 m:1 pos:
1 cu. 36 p:1 qd' m:12 pos: 48 m:8 pos:	
48 cub. m:8 qd'qd. æquales 1296. p:1	
qd'qd p:216 qd.m:24 cub.m:864 pos:	
72 cub. p:864 pos: æquales 9 qd'qd. p:	
216 qd. p:1296	
8 cub.p:96 pos: æquales 1 qd'qd. p:24	
qd.p:144.	

De transitu capituli particularis in capitulum particulare.

Caput XXVII.

1^a.



It etiam transitus capituli singularis in singulare, hoc mo-
do, cubus, & 2 quadrata, & 56, æquantur 41 rebus, & rei
æstimatio una est 3 p:rē 2, quæro in eadem æstimatione,
cubus cum 7 quadratis, quot rebus æquabitur? & cū quo
nume

numero: duc differentiam numeri quadratorū, quæ est 5, in duplum partis, quæ est numerus in æstimatione, scilicet in 6, fit 30, cui adde 41 numerum rerum, fit 71, numerus rerum, deinde duc partes æstimationis in se, fiunt 2 & 9, quorū productorum differentiam, quæ est 7, duc in 5, differentiam numeri quadratorum, fit 35, quem adde ad 56, quia 3 est maior $\times 2$, fit numerus æquationis 91, igitur cubus & 7 quadrata & 91, æquantur 71 rebus, æstimatione existente 3 p: $\times 2$, & ubi $\times 2$ fuisset maior numero, detraxisses 35 à 56 & remansisset numerus 21.

cub ⁹ & 2 qd. & 56, æql. 41 reb ⁹	
cubus & 7 qd æstimatio rei	
5	3 p: $\times 2$
6	9 — 2
30	7
41	5
71 res	35
	56
numerus	91

Dico etiam, quod non licet transire à capitulo in capitulum, stante eodem genere denominationum, & quod æstimatio rei sit eadem, & non rationalis, id est, non numerus integer, aut fractus. Exemplum sit cubus p: 3 rebus, æqualis 10, æstimatio rei est $\times 5$: cubica $\times 26$ p: 5 m: $\times 5$: cubica $\times 26$ m: 5, dico quod sub hac æstimatione, non poterit cubus cum aliquibus rebus æquari ulli numero, usq; in infinitū, nam sit (gratia exempli) cubus p: 9 rebus, æqualis 18, quia igitur res est eadem, $\times$ cubica scilicet dicta, erit cubus | cub. p: 3 reb⁹ æql. 10
idem in utroq; permutatim. Igitur ex tertio | cub. p: 9 reb⁹ æq. 18
libro, cub' cub⁹ p: 9 rebus p: 10, æquatur cubo p: 3 rebus p: 18, abijcio communem cubum, fient 9 res p: 10, æquales 3 rebus p: 18, igitur 6 res æquantur 8, igitur æstimatio rei est $1\frac{1}{3}$, numerus rationalis, & nō $\times$ cubica dicta, quod est contra suppositum.

Similiter nec plures cubi cum pluribus rebus, æquabuntur alicui numero, stante eadem æstimatione, patet ex præcedenti, nam diuisis omnibus per numerum cuborum, habebimus, ut prius, cubum & res æquales numero, quod iam ostendi fore impossibile. Eadem ratio igitur militat in omnibus, nam si dixero cubus æquatur 6 rebus p: 2, uel qd' qdratum æquatur 6 rebus p: 2, dicam igitur in eadem æstimatione cubus aut qd' qdratum nullis rebus & numero rationalibus æquari potest, dico rationalibus, quia non prohibet, quod assumptis aut rebus aut numero irrationalibus æquatio non sequatur.

Et ex hoc sequitur etiam, quod in cæteris regula tenet denominationibus, ubi æstimatio rei non sit nec numerus rationalis, nec $\times$ simplex ex genere mediæ denominationis. Exemplum, 2 cubi & 10, N 3 æquan-

æquantur 1 q̄d' q̄drato & rei, æstimatio non est nec numerus, nec r̄ cubica simplex alicuius numeri rationalis, dico quod q̄d' q̄dratum sub eadem æstimatione, nullis cubis ac numero æquari poterit, patet, quia facta transmutatione, & abiecto q̄d' q̄drato, relinquentur cubi æquales numero, igitur æstimatio rei, erit necessario r̄ cubica numeri, uel numerus, quod est contra suppositam.

De operationibus radicum Pronicarum seu mixtarum
& Allellarum. Cap. XXVIII.

- 1  Am ostendimus in superioribus, tres esse species Pronicarum radicum, Minorem, quando radix q̄drata comparatur quadrati sui & suimet aggregato, ipsum autem aggregatum dicitur pronicum minus. Medium, cum cubica radix, comparatur aggregato ex se & suo cubo, ipsum autem aggregatum dicitur Pronicum medium, sed maior radix pronica est, cum radix radicis alicuius numeri, comparatur aggregato ex seipsa & eius numeri, cuius est radix radicis, ipsum autem aggregatum dicitur pronicum maius, ut in exemplo. Pronicum maius 3, est 84, & 3 est radix pronica maior 84. Non contingunt autem his, cum sint uelut anomala uerba in Grammatica, operationes quæ sunt communes, neq̄ possunt multiplicari, uel diuidi, addi uel minui, sed habent propriam quandam operationem, quæ dicitur transitus.
- 2 Cum igitur duxeris pronicum minus, in suam r̄ pronicam, productoque addideris ipsum pronicum, r̄ quadrata aggregati, erit pronicum medium r̄ quadratæ radicis pronicæ minoris, ut in exemplo, duco 3 r̄ pronicam minorem 12, in 12, fit 36, addo ei 12, pronicum minus fit 48, huius r̄ (& est r̄ 48) est pronicum mediū r̄ 3, quæ fuit r̄ pronica minor 12, nam ducta r̄ 3 ad cubum, fit r̄ 27, cui addita ipsa r̄ 3, producit r̄ 48, igitur r̄ 3 est r̄ pronica media r̄ 48, ut propositum est.
- 3 Cum duxeris pronicum medium in suam r̄ pronicam, produci-
tur pronicum minus quadrati radicis pronicæ mediæ. Exemplū, du-
co 3, radicem pronicam mediam 30 in 30 fit 90, pronicum minus 9,
quadrati 3, quod fuit r̄ pronica media ipsius 30.
- 4 Cum pronicum maius in se ducitur, & productum diuiditur per
quadratum radicis suæ pronicæ maioris, quod exit, ad cubum eiusdē
radicis pronicæ, est uelut 1 quadratum p: 2 positionibus p: 1. Exem-
plum, capio 18 pronicum maius, duco in se fit 324, diuido per 4 qua-
dratum

dratum 2, & pronicæ maioris 18, exit 81, quod est 1 quadratum p: 2 positionibus p: 1, respectu 8, cubi 2, eiusdem radices pronicæ.

Allellæ dicuntur radices, cum ex multiplicatione mutua duorum numerorum, in quadratum alterius, duo numeri consurgunt, uelut capio 2 & 3, ipsi dicuntur radices allellæ 12, & 18, nam ex 2 in 9, fit 18, & ex 3 in 4, fit 12, inueniuntur autem radices hoc modo, duc utrumque eorum in se, & diuide productum per reliquum, & ræ cubicæ prouentus sunt allellæ. Exemplū, uolo ræ allellam 4 & 8, duc 8 in se, fit 64, diuide per 4 exit 16, duc etiam 4 in se, fit 16, diuide per 8

exit 2, igitur ræ cubica 16, & ræ cubica 2, sunt allellæ 4, & 8, & ita allellæ 6 & 18 sunt ræ cubica 54, & ræ cubica 2.

$$\begin{array}{r|l} 4 & \times 8 \\ 16 & \times 64 \\ 2 & \text{---} 16 \end{array}$$

Ex quo patet, quod omnes ræ allellæ, sunt ræ cubicæ numerorū, se habentium in triplicata proportionē, in qua se habent sui solidi propositi priores, & hi sunt medij proportionales. Cor.

Operationes igitur in his, ex hoc sunt manifestæ, nam cum inuentæ fuerint, reducentur ad radices cubicas, cum quibus operaberis rursus, perfecta operatione, reduces ad allellas. 6.

De regula Modi.

Caput XXIX.

Hic itur hæc regula (quia modum exhibet fabricandi regulas quotlibet mercaturæ) Modi, utilissima magistris Arithmeticæ, ut facilioribus quibusdam inuentis, artē docerent, cuius etiam auxilio, maximam sexti libri partē con fecimus. Est igitur regula hæc, solue quamuis quæstionem propositam, modo quo potes, seu positione, seu auxilio sexti libri, deinde auferes positionem, & regulas alias, & serua operatiōes, quas quāmpotes maxime, ad breuitatem redige, & habebis regulam de modo pro omni consimili quæstione.

Exemplum, Serici uiridis passus 7, & nigri passus 3, ueneunt denarijs 72, & eodem precio serici uiridis passus 2, & nigri passus 4, ueneunt denarijs 52, quæritur premium. Pones positionem, esse æstimationem unius passus serici uiridis, igitur 7 passus uiridis ueneunt 7 positionibus, quare 3 passus nigri ueneunt 72 de: m: 7 positionibus, & passus ualebit $\frac{1}{3}$ horum, scilicet 24 de: m: $2\frac{1}{3}$ positionibus, & 4 passus nigri, ualebūt 96 de: m: $9\frac{1}{3}$ positionibus, at duo passus uiridis ualent 2 positiones ex supposito, igitur 2 passus serici uiridis & 4 nigri ualent de: 96 m: $7\frac{1}{3}$ positionibus, & hæc eadē æstimabantur 52 de: igitur

HIERONYMI CARDANI

tur de: 96 m: $7\frac{1}{3}$ positiōibus, equantur 52 de:
 quare de: 44, qui sunt differentia 96, & 52,
 æquabuntur $7\frac{1}{3}$ positionibus, igitur pos: ua-
 let 6 denarios, & tantam estimationem passus
 serici uiridis esse conueniet, quare 7 passus ui-
 ridis ueneunt 42 de: & 3 passus nigri reliquis
 de: ad 72, scilicet de: 30, quare passus unus
 de: 10, serici igitur utriusq; precium habes.
 Hucusq; positione operatus es, nunc uenio ad
 regulam, dicoq; in talibus diuide passus nu-
 merosiores, scilicet 7, & numerum de^r: scilicet
 72, per passus pauciores, scilicet 3, & quod
 exit, duc per passus positos in secunda posi-
 tione, correspondentes paucioribus, & à pro-
 ducto numeri passuum, detrahe reliquos pas-

7	3 D 72
2	4 D 52
7 pos:	72 m: 7 pos:
	3
	24 m: $2\frac{1}{3}$ pos:
	4
	96 m: $9\frac{1}{3}$ pos:
	2 pos:
	96 m: $7\frac{1}{3}$ pos:
	52
	44 m: $7\frac{1}{3}$ pos:
	$7\frac{1}{3}$
	6

sus secunde positionis, & cum residuo diuide precij 2 & producti dif-
 ferentiam, exhibit æstimatione passus numerosioris, in prima positione.

Exemplum, diuide 7 & 72 per 3, exit
 $2\frac{1}{3}$, & 24 duc per 4, fiunt $9\frac{1}{3}$, & 96, à $9\frac{1}{3}$
 abijce 2, à 96 abijce 52, relinquuntur $7\frac{1}{3}$,
 & 44, diuide 44 per $7\frac{1}{3}$ exit 6, precium
 passus unius serici uiridis.

uirid.	nigri	precium
pas: 7	pas: 3	de: 72
pas: 2	pas: 4	de: 52
7	3	72
$2\frac{1}{3}$	4	24
$9\frac{1}{3}$		96
2		52
$7\frac{1}{3}$		44
	6	
2	4	52
7	3	72
$9\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	96
$7\frac{1}{3}$	6	44

Inde ex hoc breuior regula emer-
 git, ut in tertia figura, diuide 4 per 3, sci-
 licet numerum passuū eiusdem generis
 serici in duabus petitionibus, exit $1\frac{1}{3}$,
 quem duc in 7, & 72, fiunt $9\frac{1}{3}$, & 96, à
 quibus abijce numeros suprapositos se-
 cundæ positionis, & sunt 2 & 52, directos
 à directis, relinquuntur $7\frac{1}{3}$ & 44, diuide
 numerum denariorum 44 per $7\frac{1}{3}$ nume-
 rum passuum, exit 6, precium passus ui-
 ridis serici, & ita constitues breuissimam
 regulam, ex tam longa positionis operatione, unde merito hæc modi
 regula, mater regularum dici potest.

De regula Aurea.

Caput XXX.

Hæc



Hæc regula rerum, quæ in usum ueniunt, maximam partem amplectitur, nam quæstione ad positionem deducta, perfecta operatione, proximam quærit æstimationem, quæ sic habetur. Primo uenare proximiores integros numeros, maiorem ac minorem, qui æquationi satisfaciunt, quos non difficile erit habere, horum minorem uocabimus primum inuentum, & maiorem secundum inuentum, & differentiam productorum, differentiam maiorem, differentiam uero producti primi & numeri æquationis, differentiam primam, differentiam autem producti secundi & numeri æquationis, secundam differentiam. Diuide igitur differentiam primam, per differentiam maiorem, quod exit, addatur primo inuento, & perficiemus æstimationem imperfectam quam deducemus ad æquationem, scilicet per denominationes æquationis, ut in primo & secundo inuento, & quod producit, subtrahe à producto secundo, deinde subtrahe æstimationem imperfectam, ab inuento secundo, residuum duc in differentiam secundam habitam, & tale productum diuide per differentiam producti æstimationis imperfectæ, & secundi producti, quod exit, detrahe ex inuento secundo, residuum est æstimationis rei ualde proxima, cui per iteratas operationes semper propinquius licet accedere, idem fiet, ubi æquatio sit denominationis alicuius, ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit.

Sit igitur primo, quod quadratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quod si res est 2 quod quadratum, & 3 cubi sunt 40, & si res est 3, erit quod quadratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum est 2, & productum primum 40, & inuentum secundum 3, & productum secundum 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia secunda, & nota, quod inuentum primum semper differt unitate ab inuen-

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \qquad \qquad \qquad 3 \\
 40 \text{ --- } 100 \text{ --- } 162 \\
 \underline{60 \qquad \qquad 62} \\
 122
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \frac{60}{122} \mid \frac{30}{61} \quad 2 \frac{30}{61} \\
 77 \text{ --- } 85 \\
 62 \text{ --- } 100 \quad \rangle 162 \\
 2 \frac{30}{61} \mid 3 \mid \frac{31}{61} \\
 \frac{31}{61} \mid 62 \quad \frac{1922}{61} \quad 77 \\
 \frac{1922}{4697} \mid 3 \mid 2 \frac{2775}{4697}
 \end{array}
 \end{array}$$

to secundo, aliter non recte es operatus, his cognitiss, diuide 60 per 122, exit $\frac{30}{61}$, quod adde ad 2, primum inuentum, fit imperfecta æstimationis $2 \frac{30}{61}$, hanc ducito ad quod quadratum & tres cubos, fit 85 ferè, subtrahe igitur 85 productum æstimationis imperfectæ, à 162, producto secundo, habebis 77, subtrahe etiam $2 \frac{30}{61}$, ex 3 inuento secundo, relinquuntur $\frac{31}{61}$, duc in 62 differentiam secundam, fit $\frac{1922}{61}$, diuide per 77, exit $\frac{1922}{4697}$, detrahe ex 3 inuento secundo, erit æstimationis satis

O

pro

HIERONYMI CARDANI

proxima q̄d' q̄drati p: 3 cubis æqualium 100, hæc, $2\frac{2775}{4697}$, & si uelles, posses alternatis operationibus quantumlibet propius accedere.

Quòd si quadratum & 20, æquantur 10 rebus, tunc si res esset 7, haberemus quadratum p: 20, æquale rebus $9\frac{6}{7}$, & si res esset 8, haberemus quadratum p: 20, æquale rebus $10\frac{1}{2}$, igitur ut prius, inuentum primum est 7, productum primum $9\frac{6}{7}$, inuentum secundum 8, productum secundum $10\frac{1}{2}$, differentia maior $\frac{2}{14}$, differentia prima $\frac{1}{7}$, differentia secunda $\frac{1}{2}$, diuidemus igitur differentiam primam, per maiorem differentiam, exibat $\frac{2}{9}$, & addemus hoc ad 7, inuentum primum, fiet æstimatione imperfecta $7\frac{2}{9}$, cuius quadratum p: 20, est æquale 9 rebus & $\frac{116}{117}$, ideo quia hoc insensibiliter differt ferè, à 10, numero rerum, ideo non utimur alia operatione, sed dicemus æstimationem propinquam esse $7\frac{2}{9}$.

$$\begin{array}{r} 7 \qquad \qquad \qquad 8 \\ 9\frac{6}{7} \quad \text{---} \quad 10 \quad \text{---} \quad 10\frac{1}{2} \\ \quad \quad \quad \frac{1}{7} \qquad \qquad \frac{1}{2} \\ \quad \quad \quad \frac{2}{9} \qquad \frac{2}{9} \qquad \frac{116}{117} \\ 7\frac{2}{9} \quad | \quad 9\frac{116}{117} \end{array}$$

Sit etiam cubus æqualis 6 rebus p: 20, dicemus, si 3 essent res, 6 res & 20 æquarentur $1\frac{11}{27}$ cubi, & si res essent 4, essent 6 res & 20, æq̄les $\frac{11}{16}$ cubi, igitur inuentum primum est 3, & productum primum $1\frac{11}{27}$, inuentum secundum erit 4, productum secundum $\frac{11}{16}$, differentia prima $\frac{11}{27}$, differentia secunda $\frac{5}{16}$, differentia maior $\frac{311}{432}$, cum qua diuide differentiā minorem, exit $\frac{176}{311}$, quam adde ad 3, fiet æstimatione imperfecta $3\frac{176}{311}$, sequere æquationem, scilicet assumendo 6 res p: 20, & erunt $\frac{1245186154}{1363938029}$ sui cubi, hoc autem est proximum ad $\frac{31}{4}$, ab hoc detrahemus productum secundum, & relinquētur $\frac{61}{271}$ & $\frac{5}{16}$, similiter subtrahō $3\frac{176}{311}$, æstimationem imperfectā, à 4 inuento secundo, relinquitur $\frac{135}{311}$, hoc duco in $\frac{5}{16}$ differentiam secundā, ut etiam in primo exemplo, fit $\frac{675}{4976}$, diuide per differentiam producti secundi, & producti æstimationis, & est $\frac{61}{271}$, exit $\frac{182925}{303536}$, detrahe à secundo inuento, ut prius, relinquitur rei æstimatione $3\frac{120611}{303536}$, & hoc est proximum ad $3\frac{201}{506}$, & ideo ad $3\frac{2}{5}$, & 6 res p: 20, sunt $40\frac{2}{5}$, & cubus $3\frac{2}{5}$, est $39\frac{38}{625}$, & si uelles proximius posses operari tertio, sicut primo fecisti, & proculdubio peruenires ad insensibilem differentiam, & ratio hæc uniuersalis est, nec indiget alia regula.

$$\begin{array}{r} 3 \qquad \qquad \qquad 4 \\ 1\frac{11}{27} \quad \text{---} \quad 1 \quad \text{---} \quad \frac{11}{16} \\ \quad \quad \quad \frac{11}{27} \qquad \qquad \frac{5}{16} \\ \quad \quad \quad \frac{311}{432} \\ \frac{176}{311} \qquad \quad 3\frac{176}{311} \\ \frac{61}{271} \quad \text{---} \quad \frac{31}{34} \quad \text{---} \quad \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \quad \text{---} \quad 1 \\ 3\frac{176}{311} \quad | \quad 4 \quad | \quad \frac{135}{311} \quad \frac{5}{16} \\ \frac{675}{4976} \quad \frac{61}{271} \quad \frac{305}{506} \quad 4 \quad | \quad 3\frac{201}{506} \end{array}$$

Et similiter operaberis, ubi essent tres denominationes æquales duabus

duabus alijs, aut tribus, sed cum duplici ingressu, uel triplici, potes etiam deducere ad numeros omnia, ut in primo exemplo, & operationes in eo casu sunt longe faciliores, uelut si dicam q̄d'q̄dratum & 6 q̄drata & 200, æquantur 10 cubis & 12 rebus, erit primū inuentum 9, & productū m: 152, differentia quia 10 cubi & 12 res superant q̄d'q̄dratū 6 q̄d. & 200, & secundum inuentum erit 10, & productum secundum erit 680 p: quo q̄d'q̄dratum & 6 quadrata & 200, superant 10 cubos & 12 res, & tunc differentia prima, æqualis est producto primo, & differentia secunda, producto secundo, & maior differentia est aggregatum ex utroq̄, & tunc sufficiet pro prima operatione, diuidere ut prius, differentiam primā per differentiam maiorē, & quod exit, & est $\frac{12}{104}$, addemus primo inuento, & fiet æstimatio imperfecta $9 \frac{12}{304}$, deinde si uis proximius accedere, produces hanc æstimationem ad suas denominationes utrinq̄, & collige differentiam quæ uocetur A. quam multiplica per differentiam æstimationis imperfectæ & secundi inuenti, & productum diuide denuo per maiorem differentiam, & quod exit, adde aut minue, secundum quod oportet, & habebis intentum, & hoc modo liceret etiam operari in secundo & tertio exemplo, sed nos uoluimus declarare utrumq̄ modum, ad maiorem in occasionibus facilitatem, idem dic de radicibus extrahendis.

$$\begin{array}{r} 9 \quad \quad \quad 10 \\ 152 \text{ m: } \quad p: 680 \\ \hline 152 \quad 832 \\ 832 \quad \quad \quad \end{array}$$

De regula Magna.

Caput XXXI.

HAec regula est pro magnis quæstionibus soluendis, & ex ea inuentæ sunt regulæ auri & argenti consolandi, Acuit ingenium, & fit per demonstrationes, exigitq̄ hominem expertum, doceturq̄ per quæstiones, quoniam est multiformis, Et fundamentum regulæ est commutatio.

QVÆSTIO I.

Fac de 8 duas partes, ex quarum cubis inuicem ductis, fiat 16. Dices igitur, ex una in aliam fiet R̄ cubica 16, diuide 8 in duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat R̄ cubica 16, & erunt 4 p: R̄ v: 16 m: R̄ cubica 16, & 4 m: R̄ v: 16 m: R̄ cubica 16.

QVÆSTIO II.

Fac de 8 tres partes proportionales, quarum quadratum primæ sit æquale reliquis, igitur fient primæ duæ partes, quarum unius quadratum, sit æquale alteri, deinde maiorem diuidemus in duas partes

HIERONYMI CARDANI

existentes in continua proportione cum minore, & erunt.

QVÆSTIO III.

Fac ex 8 tres partes proportionales, quarum quadratum maioris, sit proportionale inter cubū

$$\begin{array}{l} p^2 \text{ R} 8 \frac{1}{4} m : \frac{1}{2} \\ 2^2 \text{ R} v : \text{R} 63 \frac{1}{4} m : 10 \frac{3}{8} p : \frac{1}{4} m : \text{R} 2 \frac{1}{16} \\ 3^2 \text{ R} 8 \frac{3}{4} m : \text{R} 18 \frac{2}{16} m : \text{R} v : 63 \frac{1}{4} m : 10 \frac{3}{8} \end{array}$$

utriusq; partis, dices igitur, cubus minoris est R cubica cubi maioris, & hoc, quia proportio cubi maioris, ad suum quadratum, est ipsa maior, & hæc eadem est quadrati maioris, ad cubum minoris, igitur cubus minoris, est R qdrati maioris, & æqualis ipsi maiori, quare 8 constat ex minore & suo cubo, igitur 1 cub. p: 1 re, æqualis est 8, & estimatio rei est minor pars.

QVÆSTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd septuplum maioris, sit proportionale inter quadratum maioris, & cubum minoris, sit A maior, & C quadratum eius, & B minor, & D cubus eius, sit etiam E septuplum A, cum igitur ex A in A fiat C, & ex A in 7 E, erit A ad 7, ut C ad E, quare ex 11^a 5^a, ut E ad D, igitur ex A in D, fit septuplum E, at E est septuplum A, igitur ex A in D, fit 49 A, igitur D est 49, quadratum 7, quare cubus B minoris est 49, & B est R cubica 49, & A residuum.

QVÆSTIO V.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd septuplum maioris, sit proportionale, inter cubum maioris & quadratum minoris, sit A maior, & C cubus A, & B minor, & D quadratum B, & E productum ex 7 in A, quia igitur ex A in quadratum A, fit C, & in 7, fit E, erit quadrati A ad 7, ut C ad E, quare ut E ad D, proportio autem quadrati A, ad quadratum B, componitur ex proportione quadrati A ad 7, & 7 ad quadratum B, quare ex proportione E ad D, & 7 ad quadratum B, sed D est quadratum B, igitur proportio quadrati A ad quadratum B, componitur ex proportione septupli A, & est E ad D, & 7 ad ipsum D, proportio igitur quadrati A ad D, componitur ex proportione E ad D, & 7 ad D, igitur ex regula sex quantitatum, seu ex proportionū compositione, ex 7 in E, fit quadratum A in D, sed E est septuplum A, igitur ex 49 in A, fit quadratum A in D, igitur ex A in D, seu in quadratum B, fit 49, quare ex capitulo cubi & numeri æqualium quadratis, B est R 7 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & A 7 $\frac{1}{2}$ m: R 7 $\frac{1}{4}$.

QVÆSTIO VI.

Fac ex 8 duas partes, quarū productū totius in minore, sit proportionale inter producta maioris in totum, & maioris in minorem, quia igitur

igitur minor ducitur in maiorem, & totum erit illorum productorum proportio, ut totius ad maiorem, item quia totum ducitur in maiorem & minorem, erit productorum, ut maioris ad minorem, sed producta sunt proportionalia, igitur ex 11^a 5^a elementorum, totius ad maiorem partem, ut maioris ad minorem, igitur 8 diuisum erit secundum proportionem habentem medium & duo extrema, quare partes sunt manifestæ, $R\ 80\ m:4$ & $12\ m:80$.

QVÆSTIO VII.

Fac de 8 duas partes, ita quod productum maioris in minorem, sit proportionale inter quadratum minoris & decuplum eiusdem minoris, dices igitur, quia minor est illa, quæ multiplicatur in se, in maiorem, & in 10, quod maior est proportionalis inter minorem & 10, igitur quadratum maioris, æquatur decuplo minoris, & res nota est, nã maior erit $R\ 105\ m:5$, & minor $13\ m:R\ 105$.

QVÆSTIO VIII.

Fac de 8 duas partes, quarum quadratum maioris sit proportionale inter quadratum minoris, & productum ex toto in maiorem, pone maiorem A, & B minorem, quia igitur quod fit ex 8 in A, proportionale est inter 64 & quadratum A, ex demonstratis in secundo super Euclidem, erit 64 quarta quantitas proportionalis, cum illis tribus productis, quare 64 ad quadratum A, ut quadrati A ad quadratũ B duplicata, igitur 8 ad A, ut A ad B duplicata, ex 17^a 6^a elementorum, nam utraq; est media proportionum suorum quadratorum, quare cubus A æqualis est producto ex 8 in quadratum B, hoc enim in septimo libro demonstratum est, quare ponemus A quadratum, erit cubus eius, cubus quadrati $R\ A$, quæ sit C, igitur quadratum B, est æquale $\frac{1}{8}$ quadrati cubi C, igitur B est, $R\ \frac{1}{8}$ quadrati cubi C, quare cum $R\$ cubi quadrati sit cubus, erit B æqualis cubi C parti $R\ \frac{1}{8}$, & cum A sit quadratum C, erit quadratum p: cub. $R\ \frac{1}{8}$, æquale 8, & ideo multiplicando omnia per $R\ 8$, erit cubus p: qd' $R\ 8$, æqualis $R\ 512$, solue igitur per capitulum 15^m , ut in numeris rationalibus operando per regulas tertij libri.

QVÆSTIO IX.

Fac ex 8 tres partes proportionales, quarum aggregatum primæ & secundæ, & aggregatum secundæ & tertie, & ipsum 8, sint proportionalia, dico, inuenies primo proportionem illarum quantitatum proportionalium, quarum aggregatum secundæ & tertie, est proportionale inter aggregatum primæ & secundæ, & aggregatum omnium, sint igitur tales quantitates A B C, & quia proportio A B C, ad B C, est ut

$$\text{O } 3 \qquad \text{B C,}$$

B C, ad A B, ex supposito quæstionis, & B C ad A B, ut C ad B, ex 1^a 2^a quinti elementorum, erit A B C, ad B C, ut B ad C | A B C D
 ex 1^a 1^a eiusdem, sed ex proportionione in B fit C, igitur ex proportionione in B C, fit, A B C, fit igitur, ut ex proportionione in C fiat D, cum igitur ex proportionione in B fiat C, & ex eadem in C fiat D, igitur ex proportionione in B C fit C D, & ex eadem in B C fiebat etiam A B C, igitur A B C, æquatur C D, abiecto autem C relinquetur A B, æqualis D, est autem D quarta quantitas proportionalis, igitur oportebit inuenire quatuor quantitates, continue proportionales, quarum quarta sit æqualis duabus primis, posita igitur p^a 1, 2^a 1 re, 3^a 1 quadratū, 4^a 1 cub. erit cubus æqualis 1 rei p: 1, & nota est ex capitulo, quantitas rei, quæ est proportio, diuides igitur 8 in quatuor quantitates sub ea proportionione continuatas, ut in sexto libro docetur, soluimus & aliter hanc quæstionem in quarto libro.

QVÆSTIO X.

Fac ex 8 duas partes, quarum septuplum maioris, proportionale sit inter cubum minoris, & productum maioris in minorem. Sit A minor, eius cubus C B autem maior, & productum B in A sit E, & septuplum B sit D, quia igitur ex B in A, sit E, & ex B in 7 sit D, erit A ad 7, ut E ad D, quare A ad 7, ut D ad C, igitur ex A in C, sit septuplum D, sed D est septuplum B, igitur 49 B, æqualia sunt quadrato quadrati A, igitur B est æquale $\frac{1}{49}$ qd' qdrati A, quia igitur A cum B est 8, & B est $\frac{1}{49}$ qd' qdrati A, igitur A cum $\frac{1}{49}$ qd' qdrati sui, æquatur 8, quare res & $\frac{1}{49}$ qd' qdrati æquatur 8, igitur qd' qdratum p: 49 rebus, æquatur 392, & quamuis huius non sit capitulum generale, pulchrum tamen fuerit hucusq; perduxisse quæstionem.

Deprehenditur & quandoq; impossibilitas eodem modo propositarum quæstionum, ut facile est uidere.

De regula æqualis positionis.

Cap. XXXII.

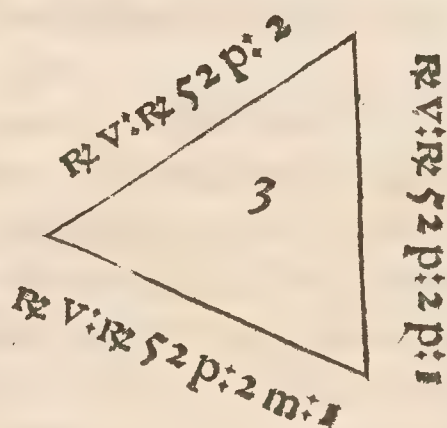


Æc regula, est utilior positione simplici, in omnibus quæstionibus, ubi partes æqualiter multiplicantur, secus ubi inæqualiter, nam in his simplex facilius est, ut si dicam, diuide 8 in duas partes, quarum una ducta in quadratum alterius, uel in cubum, fiat 20, per simplicem positionem peruenies ad 8 quadrata m: 1 cubo, æqualia 20, uel ad 8 cub. m: 1 qd' qdrato, æqualia 20 in secunda quæstione, sed ponendo 4 p: 1 positione, & 4 m: 1 positio

positione, peruenies ad 16 pos: p: 44, æquales 1 cubo p: 4 quadratis, & in secunda quæstione, ad 128 positiones p: 236, equalia 1 qd' qdrato p: 8 cubis, manifestum est igitur, quàm hæc sint prioribus difficiliores. In positione etiam simplici, inuenimus prima operatione, rei æstimationem in æquali differentiam, quæ addita dimidio diuidendi, & detracta, ostendit numeros quæsitos, qui uere sunt æstimatio rei, quanq̃ posuerimus rem esse differentiam, uoco autē positionem simplicem, cum dico, diuide 10 in duas partes, producentes 20, tunc ponimus partem unam rem, aliam 10 m: re, sed equalem, cum pono partem unam 5 p: re, & aliam, 5 m: re, ideo cum simplex iam per se nota sit, de æquali per quæstiones & exempla dicendum erit, cum certe frequentissimus sit eius usus ac utiles.

QVÆSTIO I.

Est trigonus, cuius laterum differentia primi ad secundum, est 1, & iterum secundi ad tertium, est etiam 1, & area est 3, pones secundum igitur positionem, & primum erit positio m: 1, & tertium positio p: 1, sequere trigonorum regulam, datam in libro sequente, & fiet $R: \frac{3}{16} \text{ qd' qdrati } m: \frac{3}{4} \text{ qdrati}$ uniuersaliter sumpta, æqualis 3, quare $\frac{3}{16} \text{ qd' qd'}$ æquabitur $\frac{3}{4} \text{ quadrati } p: 9$, ideoq̃ 1 qd' qdratum, æquatur 4 quadratis p: 48, & res erit per capitulum deriuatiuorum, $R: V: R: 52 p: 2$, & hoc est latus secundum, adde igitur, & minue 1, habes reliqua latera, ut in figura uides.



QVÆSTIO II.

Fac de 10 duas partes, quarum cubi cum quadratis iuncti, faciāt 400, pones primā partem 5 p: 1 positione, & secundam partē 5 m: 1 positione, sequere problema, reducendo partes ad cubum, & ad quadratum, colliges tandem cadentibus uicissim partibus, 32 quadrata p: 300, æqualia 400, quare quadratum æquabitur $3\frac{1}{8}$, & res quæ est differentia, erit $R: 3\frac{1}{8}$, igitur partes sunt 5 p: $R: 3\frac{1}{8}$ & 5 m: $3\frac{1}{8}$.

QVÆ

HIERONYMI CARDANI

QVÆSTIO III.

Fac ex 6 duas partes, quarum quadratorum aggregatum, sit æquale differentiæ cuborum. Pones maiorem 3 p: 1 positione, & minorem 3 m: 1 positione,

3 p: 1 pos:	9 p: 1 q̄d. p: 6 rebus
3 m: 1 pos:	9 p: 1 q̄d. m: 6 rebus
	18 p: 2 q̄d. aggregatum
3 p: 1 pos:	27 p: 9 q̄d. p: 27 pos: p: 1 cub.
3 m: 1 pos:	27 p: 9 q̄d. m: 27 pos: m: 1 cu.
	differentia 54 pos: p: 2 cu.

hæc æquantur inuicem, igitur cubus & 27 positiones æquatur quadrato & 9, sequere capitulum, fiet rei æstimatione, id est differentiæ, & v: cubica & 70 2 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: & v: cubica & 70 2 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ p: $\frac{1}{3}$, quare partes erunt, 3 $\frac{1}{3}$ p: & v: cubica & 70 2 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: & v: & 70 2 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$, & minor, 2 $\frac{2}{3}$ p: & v: cubica & 70 2 $\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ m: & v: cubica & 70 2 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$.

QVÆSTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, quarum productum maioris in minorem, proportionale sit, inter nonuplum maioris, & ipsam minorem. Pone partem primam 4 p: 1 positione, & minorem 4 m: 1 positione, sequere propositū, habebis productum maioris, in 9, esse 36

9		4 m: 1 pos:
4 p: 1 pos:		
36 p: 9 pos:		16 m: 1 q̄. 4 m: 1 pos:
		256 p: 1 q̄d' q̄d m: 32 q̄d
		144 m: 9 q̄d.
		112 p: 1 q̄d' q̄d. æql. 23 q̄d.

ducto 36 p: 9 positionibus, in 4 m: 1 positione, fit quadratū 16 m: 1 quadrato, ducito igitur inuicē 36 p: 9 positionibus, & 4 m: 1 positione, & cadent positiones propter mutuam proportionem, quare producet, 144 m: 9 quadratis, & hoc est æquale quadrato 16 m: 1 quadrato, quod est, 256 p: 1 q̄d' q̄drato m: 32 quadratis, quare reddendo m: parti aduersæ, 112 p: 1 q̄d' q̄drato, æquabuntur 23 quadratis, habebis æstimationem rei, & v: 11 $\frac{1}{2}$ m: & 20 $\frac{1}{4}$, id est & 7, quam adde & minue à 4, erunt partes quæsitæ, 4 p: & 7, & 4 m: & 7, & quamuis potuisses soluere per simplicem, ueniens ad capitulum cubi & rerum, æqualium quadratis & numero, fuisset tamen negocium inexplicabilius, sine ulla comparatione, nam plusq̄ decem alijs indiges operationibus, anteq̄ peruenias ad ueram æstimationem, quæ semper est in natura Binomij, uel recisi ueri, non improprij.

QVÆSTIO V.

Diuide 10 in duas partes, quarum quadrato primæ detracto ex 100, & quadrato secundæ detracto ex 97, residuorum Rz iunctæ, constituent 17. Si libet ad uitandū laborem, primo uidebis uia tentatiua, an casus possibilis sit, hoc igitur cognito, pone primum partem 5 p: 1 positione, & reliquam 5 m: 1 positione, duc partes in se, & quadratū maius detrahe ex 100, & minus ex 97, habebis residua, ut in figura, quorum Rz iunctæ, debent æquari 17, igitur 17 m: una illarum radicum æquatur reliquæ, quare ducemus in se, 17 m: Rz v: 75 m: 1 quadrato m: 10 positionibus, & habebimus 364 m: 1 quadrato m: 10 positionibus m: Rz v: 86700 m: 1156 qdratis m: 11560 rebus, æqualia quadrato alterius radices, scilicet 72 m: 1 quadrato p: 10 rebus, abijce similia ex utraq; parte, & radicē uniuersalē solam ex aduerso omniū colloca, ut in quarto libro docuimus, ac in quinto habebis 292 m: 20 reb⁹, æqualia Rz v: 86700 m: 1156 qdratis m: 11560 rebus, quare ducendo denuo partes in se, habebis 86700 m: 1156 qdratis m: 11560 positionib⁹, æqualia 85264 p: 400 qdratis m: 11680 rebus, duc ad æquationem reducendo ad 1 qdratū habebis rei æstimationē esse Rz $\frac{139876}{151321}$ p: $\frac{15}{389}$, sed Rz $\frac{139876}{151321}$, est $\frac{374}{389}$, igitur additis $\frac{15}{389}$ fient $\frac{389}{389}$, igitur res est 1, & partes 4 & 6.

QVÆSTIO VI.

Est etiam, ubi positio æqualis, non soluit omnino quæstionem, & simplex soluit. Exemplum, fac de 8 duas partes, quarum quadratum maioris, sit proportionale inter productum maioris in minorem, & decuplum totius, ut pote 60, posita itaq; maiore 1 positione, habebis 60 & 1 quadratum & 8 positiones m: 1 quadrato proportionalia, quare ducta media in se

$$\begin{array}{l} 60 \mid 1 \text{ qd.} \mid 8 \text{ pos. m: } 1 \text{ qd.} \\ 1 \text{ qd'q.} \text{ æq. } 480 \text{ pos. m:} \\ 60 \text{ quad.} \end{array}$$

P

ipsam

ipsam, habebimus 1 qd' qdratum, equale 480 positionibus m: 60 qua-
dratis, deprime, & fiet cubus & 60 res, æqualia 480, & ideo res nota
est, per positionem autem equalem, peruenies ad capitulum constans
ex quinq; denominationibus, posset autem solui, & per regulam ma-
gnam, sed hoc ad rem nihil pertinet.

De regula inæqualiter ponendi, seu proportionis.

Caput XXXIII.

HÆc regula nos docet, ut positis numeris inæqualibus, po-
sitiones pariter æquales annectamus, sic ut in multiplica-
tione, uicissim similes excidant partes. Docebo autem hoc
per exempla, quamuis quæstiones quæ per hanc soluuntur,
etiam per regulam retro agendi positionem, de qua in capitulo quin-
to dictum est, dissolui possint.

QVÆSTIO I.

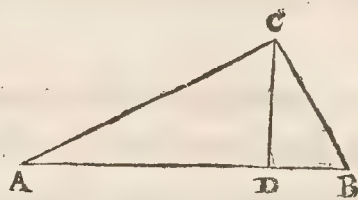
Exemplum. Sunt duo numeri, quorum differentia est 4, & qua-
dratum minoris cum quadrato dimidij maioris, & ræ aggregati ipso-
rum quadratorum, constituit 110, posses hanc retro agendo dicere,
igitur 110 componitur ex aggregato quadratorum, & ræ aggregati,
igitur posito aggregato quadrato, erit 110 æquale quadrato & uni
rei, quare res est 10, aggregatum 100, ideo facies ex 100 duas par-
tes, quarum duplum ræ unius, excedat aliam ræ in 4, & solutio clara est,
uerum hoc modo nos sic ponemus, sit primus numerus minor 2 po-
sitiones, quia pars est $\frac{1}{2}$, erit maior 2 positiones p: 4, inde accipe par-
tem secundi, quæ est in se ducenda, & est $\frac{1}{2}$, erit igitur pars multiplicanda 1 posi-
tio p: 2, & primus numerus ut dictum est, 2 positiones, hoc habito, positum est, nō
permutata quæstionis natura, partes nu-
meri ita aptare cum rebus, ut in quadra-
tis res ex toto excidant, sic igitur facies,
considera secundum numerum in se du-
cendum, qualis pars sit primi, ut in exem-
plo, 1 positio p: 2, quæ pars est 2 positio-
num, inuenies quod est $\frac{1}{2}$ p: 2, duc igitur
denominatorem & numeratorē fracti in se, & producta iunge, & ha-
bebis 5, pro diuifore, deinde duc numeratorem in se, & productum in
numerus differentia, qui est 4, fit etiam 4, pro diuidendo, diuide igi-
tur

$$\begin{array}{l}
 2 \text{ pos.} \quad | \quad 2 \text{ pos. p: 4} \\
 2 \text{ pos.} \quad | \quad 1 \text{ pos. p: 2} \\
 \hline
 \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 5 \\
 \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 5 \\
 \hline
 \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 5 \\
 \hline
 2 \text{ pos. m: } \frac{4}{5} \\
 1 \text{ pos. p: } \frac{8}{5} \\
 \hline
 4 \text{ qd. p: } \frac{16}{5} \text{ m: } \frac{16}{5} \text{ pos.} \\
 1 \text{ qd. p: } 2 \frac{14}{5} \text{ p: } \frac{16}{5} \text{ pos.} \\
 \hline
 5 \text{ qd. p: } 3 \frac{1}{5}
 \end{array}$$

tur 4 per 5, exit $\frac{4}{5}$, hoc auferes ex 2 positionibus, scilicet maiore parte, habebis 2 pos. m: $\frac{4}{5}$, deinde diuide $\frac{4}{5}$ per $\frac{1}{2}$ partem, exit $\frac{8}{5}$, hoc addes ad 1 positionem, habebis 1 pos. p: $\frac{8}{5}$, ecce uides, quoniam habes 2 positiones m: $\frac{4}{5}$, & 1 positionē p: $\frac{8}{5}$, & proportio $\frac{8}{5}$ ad $\frac{4}{5}$, est ut 2 positiones ad 1 positionem, & si sumpseris duplum maioris, scilicet 2 pos. p: $3\frac{1}{5}$, superabit minorem scilicet 2 pos. m: $\frac{4}{5}$, in 4, ad unguem, hoc peracto, ex regula uniuersali, duc partes in se, habebis 4 quadrata p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ positionibus, & 1 qdratum p: $2\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ positionibus, iunge, habebis 5 qdrata p: $3\frac{1}{5}$, hæc cum radice æquantur 110, igitur æquatur 110 m: hoc aggregato, igitur $106\frac{4}{5}$ m: 5 quadratis, æquatur & v: 5 quadratis p: $3\frac{1}{5}$, duc partes in se, habebis 5 quadrata p: $3\frac{1}{5}$, æqualia 11406 $\frac{6}{25}$ p: 25 qd' qdratis m: 1068 qdratis, redde reddenda m: alteri parti, & diuide per numerum qd' qdratorum, qui est 25, habebis 1 qd' qdratum p: $456\frac{76}{625}$, æqualia $42\frac{23}{25}$ qdratis, ideo res ualet & v: $21\frac{23}{50}$ m: & $4\frac{1025}{2500}$, sed & $4\frac{1025}{2500}$ est $2\frac{1}{10}$, igitur res est & $19\frac{36}{100}$, sed hæc est $4\frac{2}{5}$, igitur res fuit $4\frac{2}{5}$, sed prima pars seu maior, fuit 2 positiones m: $\frac{4}{5}$, igitur ipsa fuit 8, & minor fuit 1 positio p: $\frac{8}{5}$, igitur fuit 6, & eius duplum fuit 12, qui excedit 8 in 4, & hoc est quod uoluimus.

QVÆSTIO II.

Est trigonus ABC, cuius basis AB, est 8 p: catheto CD, & AD tripla est DB, & quadratum BC cum latere CB, est 182, posita igitur CD re, & AB, re & 8, seu CD 4 rebus, & AB 4 rebus p: 8, erit BD res p: 2, & proportio $\frac{1}{4}$, ideo ut prius, duc 4 in se, fit 16, duc 1 in se, fit 1, iunge, fit 17, diuisor, inde duc 1 numeratorē $\frac{1}{4}$ in se, fit 1, duc in 8 differentiam, fit 8, diuide per 17, exit $\frac{8}{17}$, pars minuēda ex 4 rebus, inde diuide $\frac{8}{17}$ per proportionem quæ est $\frac{1}{4}$, exit $\frac{32}{17}$, pars addenda uni rei, erit igitur BD 1 positio p: $\frac{32}{17}$, & CD, 4 positiones m: $\frac{8}{17}$, duc partes in se, habebis quadrata CD & BD pariter accepta, & ex consequenti, quadratum BC, esse 17 qdrata p: $3\frac{221}{289}$, sequere ut in præcedente, addendo ei latus BC, erit & v: 17 quadratorum p: $3\frac{221}{289}$ p: 17 qdratis p: $3\frac{221}{289}$ æqualis 182, quare $178\frac{68}{289}$ m: 17 qdratis æquatur & v: 17 qdratorum p: $3\frac{221}{289}$, sequere igitur operationem, ut prius, habebis rei æstimationem esse $3\frac{2}{17}$, cum igitur BD sit 1 positio p: $\frac{32}{17}$, erit BD 5 &



4 pos.	1 pos. p: 2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} \quad 17$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16} \quad 8 \quad \frac{8}{17}$
$\frac{8}{17}$	$\frac{1}{4} \quad \frac{32}{17}$
4 pos. m: $\frac{8}{17}$	1 pos. p: $\frac{32}{17}$
16 qd. p: $\frac{64}{289}$	m: $\frac{64}{17}$ pos.
1 qd. p: $\frac{1024}{289}$	p: $\frac{64}{17}$ pos.
17 qd. p: $3\frac{221}{289}$	

HIERONYMI CARDANI

AB 20, quadrupla BD, quare CD, quæ est 8 m: quàm AB, erit 12.

QVÆSTIO III.

Et similiter, si diceret, sunt duo numeri, quorum differentia est 12, & quadratum minoris cum quadrato $\frac{3}{10}$ maioris, & quadrato aggregati, æquatur 1000, tunc ut prius operaberis, ducendo numeratorem ac denominatorem in se, & iungendo, fit diuisor 109, deinde duc 3 numeratorem in se, & productum in 12, fit 108, diuido per 109, habeo partem minuendam ex 10 positionibus, deinde diuido $\frac{108}{109}$, per $\frac{3}{10}$, exit $\frac{360}{109}$, pars addenda 3 positionibus, si igitur 3 positiones p: $\frac{360}{109}$, ducantur in $\frac{10}{3}$, numerus qui producet, erit 12 p: quàm 10 res m: $\frac{108}{109}$, & talis est proportio $\frac{360}{109}$ ad $\frac{108}{109}$, qualis 10 ad 3, & ideo, quia regula hæc habent infinitos modos, uelut si dicamus, $\frac{1}{2}$ primi & $\frac{1}{3}$ secundi numeri, differentium per 12, in se ducti addita radice, faciunt 100, tunc queres eodem modo suam regulã, per regulam de modo, quia hæc regula est ramus illius, quærendo numeros differentes primo in 12, quorum $\frac{1}{2}$ unius ita diuidatur, in $\frac{1}{2}$ rem & numerum, & reliquus in $\frac{1}{3}$ rei & numerum, ita ut producta rerum sint æqualia. Ponendo unum numerum p: alium m: & inuenitur per capitulum 9^m, cum quantitate furda, ut in talibus, ponam regulam exemplo adiunctam, dico quòd si quis dicat.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 14, & $\frac{1}{3}$ unius in se ductum, cum $\frac{1}{4}$ alterius in se ducto, & cum re aggregati talium productorum, fiat 110, dico primo, duc denominatores in numeratores uicissim, uidelicet 4 in 1, & 3 in 1, & productorum quæ sunt etiam 4, & 3, iunge quadrata, habebis 25 pro diuisore, deinde duc denominatores inuicem, 3 in 4, fit 12, & quod fit in differentiam quæ fuit 14, fit 168, hoc ducito in productum numeratorum, quod fuit 1, fit etiã 168, p diuidendo, diuide igitur 168, per 25, exit $\frac{168}{25}$, hoc multiplica in ipsas partes, uidelicet $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, habebis $2\frac{6}{25}$, addendum, & $1\frac{17}{25}$ minuendum, quia semper ut dictum est, minor pars numeri, minuitur à maiore, & maior additur

$$\begin{array}{r}
 10 \text{ pos.} \qquad \qquad \qquad 3 \text{ pos.} \\
 \frac{3}{10} \frac{9}{100}) 109 \\
 \underline{3} \quad \underline{9} \quad \underline{12} \quad \underline{\frac{108}{109}} \\
 \frac{108}{109} \times \frac{13}{10} \frac{360}{109} \\
 3 \text{ pos. p: } \frac{360}{109} \\
 10 \text{ pos. m: } \frac{108}{109}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{1}{14} \frac{1}{168} \\
 \underline{3} \quad \underline{4} \quad \underline{12} \quad \underline{14} \quad \underline{168} \\
 9 \quad 16 \quad 25 \\
 2 \frac{6}{25} \quad 1 \frac{17}{25} > \frac{168}{25} \\
 1 \frac{17}{25} \\
 \frac{1}{3} \text{ pos. m: } 1 \frac{17}{25} \\
 \frac{1}{4} \text{ pos. p: } 2 \frac{6}{25} \\
 \frac{1}{9} \text{ qd. p: } 2 \frac{504}{625} \text{ m: } 1 \frac{3}{25} \text{ pos.} \\
 \frac{1}{16} \text{ qd. p: } 5 \frac{11}{625} \text{ p: } 1 \frac{3}{25} \text{ pos.} \\
 \frac{25}{144} \text{ qd. p: } 7 \frac{103}{125}
 \end{array}$$

ditur minori, duc igitur $\frac{1}{3}$ positionis m: $1 \frac{17}{25}$ in se, & similiter $\frac{1}{4}$ positionis p: $2 \frac{6}{25}$ in se, & collige pducta, habebis $\frac{25}{144}$ qdrati p: $7 \frac{103}{125}$, absq; rebus, quare sequeris operationem, ut in prioribus. Aliud exemplū, in regula parū difficili, inuenias duos numeros differentes in 4, quorum $\frac{3}{4}$ minoris in se ducta, & $\frac{2}{3}$ maioris in se ducta, & aggregato productorū addita radice, fiat 110, duces igitur in crucem, 3 in 3, & 4 in 2, & fient 9 & 8, quorum quadrata iuncta sunt 145, pro diuifore, similiter duces 3 in 4, denominatores, fit 12, duc in 4, differentiā numerorum, fit 48, duc in 6, productum numeratorum, fit 288, pro diuidendo, inde diuifo 288 per 145, exit $\frac{288}{145}$, duc in $\frac{2}{3}$ & in $\frac{3}{4}$, partes acceptas seorsum, habebis $\frac{192}{145}$ & $\frac{216}{145}$, partes addendas ac minuendas ut prius.

QUESTIO V.

Et similiter dicemus de aggregato, ueluti si dicat, fac ex 10 duas partes, quarum una in se ducta, & alterius dimidio in se ducto, & accepta radice aggregati, totum sit 30, dico operaberis per regulam dictam, in quaestione prima scilicet, quia est de integris ex una parte, inuenies igitur numeros 4 & 2, & à maiore minues 1 positionē, & minori addes 2 positiones, & ideo in hoc differt à regulis numerorum differentiū, cætera paria sunt, & ideo sequendo operationē, habebis rei æstimationē, R: v: $2 \frac{1}{10}$ m: R: $\frac{121}{100}$, quod est dicere 1, ideo numeri sunt 6 & 4.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \text{ — } \frac{1}{4} \text{ — } 5 \\ \frac{1}{2} \text{ — } \frac{1}{4} \text{ — } 10 \text{ — } 10 \\ \hline 10 - 5 - 2 \\ \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} 4 \\ 4 \text{ m: } 1 \text{ pos.} \\ 2 \text{ p: } 2 \text{ pos.} \end{array}$$

De regula medij.

Caput XXXIII.



Æc sic uocata à me est, quia medium inquiritur, scilicet proportio, & quia ad unitatis confusionem uitandam, ponimus partem unam, dimidium unitatis, & est eius usus solum ad quærendum quantitates, quæ æqualiter multiplicantur, & proportionem seruant, cum autem eam non seruauerint, usus regulæ non est utilis, uerum in duabus quantitatibus solum explicatur, de pluribus autem in capitulo 39^o dicemus. Patet aut, quod si quis dicat, inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & cubi iuncti sint 30, quod regula hæc non seruiet, quia proportio 30 ad 10, quæ est tripla, non seruatur inter cubos & quadratos,

uariata quantitate, at regulam ipsam ostendere quemadmodum & alias per exempla utile fuerit.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum differentia ducta in quadrato-
rum differentiam faciat 10, & aggregatum illorum in quadratorum
aggregatum, faciat 20. Pones igitur ut dictum est unum illorum, po-

sitionem, alium $\frac{1}{2}$

deinde inuenies

differentiam, &

aggregatum, &

quadrata partiū,

& differentiā qua-

dratorum, & ag-

gregatum, ut in

marginē, inde du-

cito differentiam

partium in diffe-

rentiam quadra-

torum, & habes

bis $\frac{1}{8} p: 1$ cubo

m: $\frac{1}{2}$ quadrato m: $\frac{1}{4}$ positionis, & hoc debet esse dimidium producti

aggregatorum numerorum scilicet ac quadratorum, quia 10 est dimi-

dium 20, igitur erit dimidium $\frac{1}{8} p: 1$ cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ positio-

nis, quare $\frac{1}{4} p: 2$ cubis m: 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ positione, æquatur $\frac{1}{8} p: 1$ cu-

bo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ positionis, igitur reddendo partes m: ad p: erit

ut $\frac{1}{8} p: 1$ cubo, æquetur $1 \frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{3}{4}$ positionis, quare diuisis par-

tibus, ad faciliorem operationem, quæ semper poterunt diuidi, habes

bimus $1 \frac{1}{4}$ positionis, æqualem 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ positione p: $\frac{1}{4}$, diui-

for, namq; cōponitur ex partibus ab initio sumptis, scilicet 1 positio-

ne & $\frac{1}{2}$, quare 1 quadratum p: $\frac{1}{4}$, æquabitur 2 positionibus, & res erit

$1 p: \frac{3}{4}$, sunt igitur quantitates in proportionē $1 p: \frac{3}{4}$, & $\frac{1}{2}$, quare

in proportionē $2 p: 3$, & 1. Iterum igitur quæramus duas quantita-

tes in hac proportionē, quarum aggregatum in aggregatum quadra-

torum ductum, faciat 20, nam ta-

les necessario habebunt etiam reli-

quam conditionem, ponemus igitur

unam illarum rem, aliam res 2

p: 3, & quæremus sua quadrata,

quæ iungemus, & erunt qdrata 8

Numeri

Differentia numerorum

Aggrega. numerorum

Quadrata

Differentia qdratorum

Aggregatum qdrat.

1 pos. $\frac{1}{2}$

1 pos. m: $\frac{1}{2}$

1 pos. p: $\frac{1}{2}$

1 qd. $\frac{1}{4}$

1 qd. m: $\frac{1}{4}$

1 qd. p: $\frac{1}{4}$

productū differen^{te} $\frac{1}{8} p: 1$ cu. m: $\frac{1}{2}$ qd. m: $\frac{1}{4}$ pos.

productum qdrat $\frac{1}{8} p: 1$ cub. p: $\frac{1}{2}$ qd. p: $\frac{1}{4}$ pos.

$\frac{1}{4} p: 2$ cub. m: 1 qd. m: $\frac{1}{2}$ pos.

$\frac{1}{8} p: 1$ cub. p: $\frac{1}{2}$ qd. p: $\frac{1}{4}$ pos.

$\frac{1}{8} p: 1$ cub. æquatur $1 \frac{1}{2}$ qd. p: $\frac{3}{4}$ pos.

1 pos. p: $\frac{1}{2}$

1 qd. m: $\frac{1}{2}$ pos. p: $\frac{1}{4}$

1 pos. p: $\frac{1}{2}$

1 $\frac{1}{2}$ pos.

Numeri res 1 res 2 p: 3

Quadrata qd. 1 qd. 7 p: 48

Aggreg. numero. res 3 p: 3

Aggreg. qd. qd. 8 p: 48

Productum cubi 36 p: 1200

p: 3

p: r 48, & ducemus in aggregatum numerorum, scilicet res 3 p: r 3, & fiunt cubi 36 p: r 1200, diuidemus igitur 20 per r 1200 p: 36, & exhibet $7\frac{1}{2}$ m: r $52\frac{1}{12}$, cuius r cubica erit numerus minor quæsitus, maior autem habebitur, ducto minore in 2 p: r 3, quare numeri quæsitæ erunt,

Primus r v: cubica $7\frac{1}{2}$ m: r $52\frac{1}{12}$

Secundus r v: cubica 195 m: r $35437\frac{1}{2}$ p: r 33075 m: r 35490

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, quorū differentia ducta in differentiam cuborum, producat 10, & aggregatum in aggregatum cuborum constituat 30, hac in quæstione, procedes ut in præcedenti, uerum pones partes 1 positionem & 1, ad facilitatem maiorem, & sequeris ut in præcedenti, donec ueneris ad 1 qd' qdratum p: 1, æquale 2 cubis p: 2 positionibus, igitur habeo quinque quantitates continue proportionales, quarum aggregatum primæ & quintæ, est duplum aggregato secundæ & quartæ, igitur per capitulum quinque quantitatū continue proportionalium,

Numeri	1 pos.	1
Differentia numer	1 pos. m:	1
Aggregatū numero.	1 pos. p:	1
Cubi	1 cub.	1
Differentia cuborum	1 cub. m:	1
Aggregatum cuborū	1 cub. p:	1
Produc. aggregatorum		
1 qd' qd. p: 1 cub. p: 1 pos. p:	1	1
Productum differentiarum		
1 qd' qd. m: 1 cub. m: 1 pos. p:	1	1
3 qd' qd. m: 3 cub. m: 3 pos. p:	3	3
1 qd' qd. p: 1 cub. p: 1 pos. p:	1	1
2 qd' qd. p: 2 4 cub. p: 4 pos.	2	4
1 qd' qd. p: 1 2 cub. p: 2 pos.	1	2

quæro proportionem, assumendo puta 2 & 4, quorum 4 est duplus alteri, & faciendo de 4 primam & quintam, & de 2 secundam & quartam, igitur talis proportio erit ut $\frac{1}{2}$ p: r $\frac{3}{4}$ p: r v: r $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: r v: r $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, ad unitatem, pones igitur denuo res sub his numeris, uidelicet 1 rem, & res $\frac{1}{2}$ p: r $\frac{3}{4}$ p: r v: r $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: r v: r $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, inde ducito ad cubum partes per regulas tertij libri, quod non difficile fiet, inde duceres res r $\frac{3}{4}$ p: r v: r $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: r v: r $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, differentiam scilicet numerorum, in differentiam cuborum, quæ habetur detracto 1 cubo, ex cubo dicti iam compositi ex quatuor nominibus, & productū æquabitur 10, diuides 10 per tale productum & eius quod exit r: r, erit æstimatio primæ quantitatis, qua ducta in $\frac{1}{2}$ p: r $\frac{3}{4}$ p: r v: r $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: r v: r $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, confurget secunda quantitas, seu secundus numerus.

QVÆSTIO III.

Inuenias duos numeros quorum relati primi iuncti faciant 20, & aggrega

HIERONYMI CARDANI

aggregatum cuborum in aggregatum quadratorum ductum , faciat

25, pones ut in præcedente, partes, 1 positionem

& 1, & relati primi earum, sunt 1 $P^m R^m$ & 1, &

productum aggregati quadratorum in aggrega-

gatum cuborum est, $\text{I P}^{\text{m}} \text{R}^{\text{m}} \text{p}:$ I cubo $\text{p}:$ I qua

drato p:1, & hoc se habet ad 1 p^m R^m p:1. ut 25

ad 20, & ut 5 ad 4, igitur per regulam quantita-

tum proportionaliū, ducto i p° r°

p: 1 cubo p: 1 qdrato p: 1, per 4, fa

ciemus quantum ducto $1 \text{ P}^{\circ} \text{ R}^{\circ} \text{ p}^{\circ} 1$,

per 5, igitur 4 Pⁱ Rⁱ p:4 cubis, p:4 q̄=

dratis p:4, æquantur 5 P^{is} R^{is} p:5, q:

re tandem habebimus | $P^m R^m$

p: 1, facta detractiōe, æqua

le 4 cubis p:4 quadratis, diui-

de partes per positionem p: 1

qd' qdrato m: i cubo p: i qua-

drato m: i positione p: i, æqualia 4 quadratis, igitur i qd' qdratum p:

1, æquatur 1 cubo p; 3 qdratis p: 1 positione, sunt igitur quinque quan

titates continue proportionales, quarum aggregatum primæ & quin

tæ, est gratia exempli 10, & aggregatum secundæ & quartæ cum tri-

plo tertiæ etiam 10, igitur nota erit proportio, per capitulũ 5 quan-

titatum continue proportionaliũ, & erit $R_2 : \frac{6}{7}m : p : R_2 v : R_2 : \frac{5}{7}m : \frac{6}{7}$, & hæc

$$2 \text{ m:Rz} \mid \frac{5}{7}$$

est proportio illarum quantitatum, in secunda igitur positio

ne, pones 1 rem, & res in numero lupradicto leu proportionē, uel res

ductam proportionem, ut in præcedente quaestione, facta diuisione

per numeratorem, ad relatum ducito, per tuam regulam, cui adde 1,

relatum primum de 1, & cu aggregato diuide 20, & R₂ relata prima,

proventus est numerus minor, inde multiplica ipsum in proportio-

nem, & proueniet maior, & perficere talem operationem est res qua-

li lupra humanum laborem, & nili essent regulæ tertij libri, uix omni

no possibile foret.

De regula aggregati.

Caput XXXV.

REGVLA I.

A decorative initial letter 'S' in a square frame. The letter is large and stylized, with a figure of a person in a long, flowing robe draped over it. The background is filled with intricate floral and foliate patterns. The entire design is enclosed in a square border with a decorative inner line.

Icut ex præcedente, & regula iterata, proportio ipsa quæ-
ritur, sic per hanc habemus aggregatum, Est autem utilis
ualde, ubi inter partes nulla supponitur proportio. Nam
medi-

medi-

medium ad quærendum plures numeros simul, est uel proportio, uel aggregatum, aut differentia, cum igitur ex præcedente & regula iterata proportio habeatur, cum hac autem & aggregatū & differentia, satis cōstat, quanto hæc illas antecedit interuallo. Vocauimus & hanc regulam dupli, quòd duas contineat partes, seu duos numeros quæsitos, ratio uero eius, ut reliquarum, per exempla patet.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 20, & productum unius in alterum, cum ipsis numeris, sit 10, dico (quamuis ex sexto libro solui possit) sic per regulam faciemus. Pone aggregatū 1 positionem, seu rem, & quia ex uno in alterum sit 10, minus aggregato, igitur ex uno in alterū fiet 10 m: re, fac igitur ex positioe duas partes, producentes 10 m: 1 positione, & erunt ex regula capituli de operationibus in sexto libro posita,

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ pos. p: } R: V: \frac{1}{4} \text{ qd. p: } 1 \text{ pos. m: } 10 \\ \frac{1}{2} \text{ pos. p: } R: V: \frac{1}{4} \text{ qd. p: } 1 \text{ pos. m: } 10 \\ \hline \frac{1}{4} \text{ qd. p: } \frac{1}{4} \text{ qd. p: } 1 \text{ pos. m: } 10 \\ \frac{1}{2} \text{ pos. m: } R: V: \frac{1}{4} \text{ qd. p: } 1 \text{ pos. m: } 10 \\ \frac{1}{2} \text{ pos. m: } R: V: \frac{1}{4} \text{ qd. p: } 1 \text{ pos. m: } 10 \\ \hline \frac{1}{4} \text{ qd. p: } \frac{1}{4} \text{ qd. p: } 1 \text{ pos. m: } 10 \\ \hline 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos. m: } 20 \end{array}$$

sufficiet ducere partes in se, non unam in aliam, ut in libris 3^o 4^o & 5^o docuimus, ideo ducta $\frac{1}{2}$ positio in se, fit $\frac{1}{4}$ quadrati, & ducta $R: V: \frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, in se fit $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, & tantundem ex alia parte, ut in figura, quare quadrata Binomij & reciproci iuncta, sunt 1 quadratum p: 2 positionibus m: 20, & hoc æquatur 20, ut dictum est, igitur 1 qd. p: 2 positionibus æquatur 40, & rei estimatio erit $R: 41$ m: 1, fac ex $R: 41$ m: 1 duas partes, quarum qdrata iuncta sint 20, & erūt per nouam positionem, uel per regulas capituli de operationibus in sexto libro partes quas à latere uides.

$$\begin{array}{l} p^2 R: 10 \frac{1}{4} m: \frac{1}{2} p: R: V: 10 \frac{1}{4} m: \frac{1}{2} \\ 2^2 R: 10 \frac{1}{4} m: \frac{1}{2} m: R: V: 10 \frac{1}{4} m: \frac{1}{2} \end{array}$$

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, qui iuncti faciant tantum, quantum inuicem ducti, & eorum quadrata iuncta sint 20, si igitur aggregatum est 1 positio, productum etiam unius in alterum est 1 positio, fac ex 1 positione duas partes, producentes 1 positionem, per regulas capituli de operationibus in sexto libro positas, seu per quintam secundi elementorum, & erunt partes quas à latere posui, harum igitur quadra-

Q

ta iun-

HIERONYMI CARDANI

ta iuncta sunt 20, quare cum habeant
ut in præcedenti rationem Binomij
& recisi, sufficiet ducere partes unius
eorum in se, & duplicare. igitur habe
bimus pro aggregato quadratorum
1 quadratum m: 2 positionibus, æ
qualia 20, quare res erit R: 21 p: 1,
ideo faciemus ex ipsa partes, ut propositum est, & erunt ut uides.

QVÆSTIO III.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producat
aggregatum, & quadrata ipsorum cum ipsis numeris faciant 20, fac
ut in præcedenti, & habebis aggregatum R: 20 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, quod est 5, &
quia quadrata partium cum ipsis numeris debent æquari 20, igitur
quadrata ipsa sola absq; numeris erunt 15, fac igitur ex 5 duas par
tes, quarum quadrata iuncta sint 15, & habebis numeros quos uides
memineris autem, quod in prima operatione, quando
perueneris ad 1 quadratum m: 2 positionibus, pro ag
gregato quadratorum, ut addas 1 positionem, quod
est aggregatum numerorum, & peruenies ad 1 quadratum m: 1 posi
tione, æqualia 20.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias duos numeros, qui inuicem ducti producant aggrega
tum, & diuiso 12 per utrumq; quadrata prouenientium iuncta cum
aggregato diuidentium faciant 80, hæc cū præcedentibus est fratris
Lucæ, in quodam scripto quod perierat. Pone aggregatum rem unam
eam diuide in partes, producentes rem unam, & habebis partes, ut ui
des, cum quibus diuide 12, ut in figura.

$\text{Partes} \left \frac{12}{\frac{1}{2} \text{ pos. p: R: } \frac{1}{4} \text{ qd. m: 1 pos.}} \right.$	$\frac{12}{\frac{1}{2} \text{ pos. m: R: } \frac{1}{4} \text{ qd. m: 1 pos.}}$
$\frac{144}{\frac{1}{2} \text{ qd. m: 1 pos. p: R: } \frac{1}{4} \text{ qd' qd. m: 1 cub. } \times}$	
$\begin{array}{l} \text{qd. rta} \\ \text{partiū} \end{array} \left \right.$	$\begin{array}{l} \times \frac{1}{2} \text{ qd. m: 1 pos. p: R: } \frac{1}{4} \text{ qd' qd. m: 1 cub.} \\ \hline 144 \text{ qd. m: 288 pos.} \\ \hline 1 \text{ quad.} \end{array}$

Aggregatum qdratorum

Igitur ex partibus ipsis factis quadratis, iunctisq; ut in quinto li
bro docui te, habebis aggregatum quadratorum, cui adde aggrega
tum diuidentium, siquidem rem unam habebis, $\frac{144 \text{ qd. m: 288 positionib9}}{1 \text{ quad.}}$

p: 1 positione, æqualia 80, multiplica omnia per positionem, fient 144 positiones m: 288 p: 1 quadrato, æqualia 80 positionibus, quare q̄dratum & 64 positiones, æquantur 288, res igitur est R: 1312 m: 32, fac igitur ex R: 1312 m: 32, duas partes, producentes R: 1312 m: 32, & illæ erunt numeri quæsitæ.

QVÆSTIO V.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 20, & productum unius in alterum, æquale sit q̄drato differentię, hæc quamq̄ clara sit, quoniam necessarie sit eos numeros esse in proportionem, quę dicitur habere medium & duo extrema. Possit etiam solui ex regula positionis æqualis, nam plures quæstiones, multis ac diuersis regulis solui possunt. Sic tamen ex hac regula faciemus, posito aggregato re,

diuidemus eam in partes, quarū quadrata iuncta sint 20, & erūt ut uides, igitur quadratum differentię est 40, m: 1 quadrato, & hoc æquatur producto partium inuicem, quod est $\frac{1}{2}$ quadratum m: 10, quare $1\frac{1}{2}$ quadratum,

$\frac{1}{2}$ pos. p: R: v: 10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
$\frac{1}{2}$ pos. m: R: v: 10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
Differentia R: v: 40 m: 1 q̄d.
Quad. differentię 40 m: 1 q̄d.
productum $\frac{1}{2}$ quad. m: 10

æquatur 50, igitur res est R: 33 $\frac{1}{3}$, ex hoc fac duas partes, quarum q̄drata iuncta sint 20, & erunt R: 8 $\frac{1}{3}$, p: R: 1 $\frac{2}{3}$, & R: 8 $\frac{1}{3}$ m: R: 1 $\frac{2}{3}$. Et ex hac regula deducuntur octo quæstiones, quas ego ob uchementem similitudinem Sorores appellauī, ad capitula melius, quàm alia.

Sequuntur octo quæstiones, quæ uocantur Sorores, q̄rū ultima sola pro aliarum exemplo declaratur.

QVÆSTIO VI.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & cubi sint 30, pones aggregatum numerorum positionem, & facies partes ex ea, quarum quadrata iuncta sint 10, inde iunge cubos illarum partium, & habebis cubum p: 60, æqualia 30 rebus.

QVÆSTIO VII.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & differentia cuborum illorum sit 15, pone aggregatum eorum ut prius, rem, & habebis 1 cub' q̄dratum, æq̄le 300 q̄dratis p: 1100.

QVÆSTIO VIII.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & ex ductu cuiuslibet eorum in quadratum alterius, producta iuncta faciant 20, pones eodem modo aggregatum numerorum, rem, & habebis 1 cub' q̄dratum p: 300 quadratis p: 800 positionibus, æqualia 40 q̄d' q̄dratis p: 1600.

QVÆSTIO IX.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & producta unius in alterius quadratum mutuo, differant per 4. Pones ut prius aggregatum, rem, & habebis 1 cub' qdratum p: 500 quadratis æqualia 40 qd' qdratis p: 1936.

QVÆSTIO X.

Inuenias duos numeros, quorum differentia quadratorum sit 10, & cuborum aggregatum sit 100. Pones aggregatum numerorum, rem, & facies ex ea partes, quarū quadrata differant in 10, & eas duces ad cubū, & habebis 1 qd' qdratum p: 300, æqlia 400 positionib'.

QVÆSTIO XI.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & cuborum differentia sit 100. Pones ut prius, aggregatum numerorum, rem, & habebis 1 qd' qdratum p: 33 $\frac{1}{3}$, æqualia 13 $\frac{1}{3}$ cubis.

QVÆSTIO XII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorū differentia sit 10, & aggregatum productorum unius in quadratum alterius mutuo, sit 100. Pones ut prius aggregatum illorum, rem, & habebis 1 qd' qdratum æquale 400 rebus p: 100.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & differentia productorum unius in alterius quadratorum, sit 100, hanc explicabo diligenter, ut sit forma operandi, atq; exemplar in reliquis, non solum septem procedentibus, sed & alijs multis, quæ formari possunt in hoc genere. Ponam igitur illorum aggregatum, rem, & per regulam de modo, uel capituli operationū in sexto libro, faciam ex ea duas partes, quarum quadratorū differentia sit 10, & est, ut diuidas illam differentiā scilicet 10, per duplum diuidendi, quod est 2 positiones, existens quod est $\frac{5}{1 \text{ pos.}}$, addes & minues dimidio diuidendi, quod est $\frac{1}{2}$ positio, habebis partes, & quadrata illarum, quæ suppone permutato ordine suis radicibus, ut in figura patet, duces igitur inferiora in sua superiora, sufficitq; in his, quorū uolumus differentiā multiplicare, partes dissimiles, id est quæ in uno pducāt p: in alio m: sicut in aggregandis sufficit multiplicare partes similes, nam reliquæ per se cadunt, duc

$\frac{1}{2} \text{ pos. p: } \frac{5}{1 \text{ pos.}}$	$\frac{1}{2} \text{ pos. m: } \frac{5}{1 \text{ pos.}}$
$\frac{1}{4} \text{ qd. p: } \frac{25}{1 \text{ qd.}}$	$\frac{1}{4} \text{ qd. p: } \frac{25}{1 \text{ qd.}}$
$2 \frac{1}{2} \text{ pos. m: } 1 \frac{1}{4}$	$1 \frac{1}{4} \text{ pos. m: } 2 \frac{1}{2}$
$\text{pos. m: } \frac{125}{1 \text{ cu.}}$	$\text{pos. p: } \frac{125}{1 \text{ cu.}}$
Differentia $2 \frac{1}{2} \text{ pos. m: } \frac{250}{1 \text{ cu.}}$ æqlia 100	
1 qd' qd. æquale 40 cub. p: 100	

igitur

igitur $\frac{1}{2}$ positiōe in m: 5, & $\frac{5}{1}$ pol. in $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{25}{1}$ qd., qā ubi una pro-
 ducit p: alia producit m: & detrahe m: à p: & hoc non est aliud, quā
 duplicare unum illorum productorum, habebis differentiam uni-
 us producti ab altero, $2\frac{1}{2}$ positiones m: $\frac{250}{1}$ cu., igitur hoc æq̃tur 100,
 diuide omnia per $2\frac{1}{2}$, & multiplica per 1 cubū, habebis 1 qd' qdratū
 æquale 40 cubis p: 100, & ita in alijs, & posses super hoc statuere re-
 gulam de modo, dicendo, cū duo numeri, quorum quadratorū diffe-
 rentia est constituta ex multiplicatione uicissim in qdrata, debent pro-
 ducere aliquam differentiam inter ipsa producta, tunc erit qd' qdratū
 æquale qdrato differentiae qdratorum, & totidem cubis, quotus est
 numerus, qui prouenit, diuiso numero differentiae productorum per
 quartam partem differentiae qdratorum, uelut si dicā, inuenias duos
 numeros quorum quadratorum differentia sit 6, & productorum uni-
 us in quadratum alterius differentia sit 60, dicemus igitur 1 qd' qdra-
 tum æquabitur 40 cubis p: 36, & ita de alijs.

REGULA II.

Est & alius modus regulæ aggregati, longe subtilior præcedente, 2
 & facit duas positiōes simul & duas conuersiones, & nihil est subtilius
 his in regulis, & inueni ipsum in quodā fragmento fratris Luce, & tan-
 dem reduxi ipsum post multos labores, quia uix poterat legi in hac
 parte, uel percipi imago huius regulæ, & ego explicabo eam faciliter,
 & nisi esset, quod non est multum generalis hic modus, quantum ad
 ostendendam æstimationē rei, licet quo ad positionē sit amplissimus,
 nihil aliud posset excogitari præstantius, & exemplū ac regula erit in
 quæstionibus.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias duos numeros, ex quorū ductu unius in alterū produca-
 tur 8, & qdrata iuncta cū ipsis numeris, faciant 40. Pones aggregatū
 illorum numerorum $\frac{1}{2}$ quantitatem, & alterum ex illis 1 positionem,
 reliquus igitur est $\frac{1}{2}$ quantit. m: 1 positione, duc inuicē, fiunt $\frac{1}{2}$ quan-
 pos. m: 1 qdrato, & hoc æq̃tur 8, igitur habes qdratū p: 8, æq̃le quan-
 titati, cuidam rerum. Sequere igitur capitulum, accipe dimidiū nume-
 ri rerum, id est $\frac{1}{4}$ quantitatis, ut in capitulo quinto doceris, quando q-
 dratū & numerus equantur rebus, duc igitur $\frac{1}{4}$ quantitatis in se, fit $\frac{1}{16}$
 qd' quan: abijce 8, numerū æq̃tionis, fit $\frac{1}{16}$ qd' quan: m: 8, accipe r: v:
 quam adde, ac minue, ad $\frac{1}{4}$ quantitatis, dimidiū numeri rerum,
 fiet rei æstimatio, seu numeri quæsitī, quorum unus est, $\frac{1}{4}$ quantita-
 tis p: r: v: $\frac{1}{16}$ quad' quan' m: 8, & alter, $\frac{1}{4}$ quantitatis m: r: v: $\frac{1}{16}$
 quad' quan' m: 8, horum igitur quadrata, addito aggregato nu-

merorum, id est $\frac{1}{2}$ quantitatis, æquantur 40, quadrata igitur partium, cadentibus uicissim multiplicationibus $\frac{1}{4}$ quantitatis in R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd' quan: m: 8, quia sunt æqualia, m: & p: erunt $\frac{1}{8}$ qd' quan: m: 8, & $\frac{1}{8}$ qd' quan: m: 8, iuncta igitur $\frac{1}{4}$ qd' quan: m: 16, æqualia cum $\frac{1}{2}$ quantitatis, aggregato numerorū ad 40, pone igitur pro quantitate rem, erit $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{1}{2}$ positione, æquale 56, igitur 1 quadratum p: 2 positionibus, æquatur 224, quare res ualet R $\times$ 225 m: 1, id est 14, & tantundē ualet quantitas, sed nos posuimus dimidiū quantitatis aggregatum, igitur aggregatum numerorū est 7, fac ex 7 duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat 8, & erunt 3 $\frac{1}{2}$ p: R $\times$ 4 $\frac{1}{4}$, & 3 $\frac{1}{2}$ m: R $\times$ 4 $\frac{1}{4}$, numeri quæsitī, quorum quadrata numeris ipsis sunt 40.

Not^m. Et si quis quærat, quid proffit hæc regula, cuiq; possit opitulari præter primam? Respondeo, Prima indiget regula particulari sexti libri in operando, hæc autem libere usq; in finem agit, deducēdo, quod quàm pulcherrimum ultra id quod utilissimum est, nullo alieno indigere præsidio. Est & aliud exemplum.

QVÆSTIO XV.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producat 6, & quorum cubi iuncti faciant 100. Ponemus $\frac{1}{2}$ quantitatem pro aggregato, & partem unam rem, alia erit $\frac{1}{2}$ quantitatis m: re, duc partes inuicem, habebis $\frac{1}{2}$ quan' pos: m: 1 quadrato, æqualia 6, sequere equationem tanq̃ $\frac{1}{2}$ quantitas esset aliquis numerus, & habebis æstimationem, duas æstimationes

pos. scilicet, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd' quan: m: 6, & $\frac{1}{4}$ quantitatis m: R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd' quan: m: 6, horum cubi debent æq̃ari 100, duc ad cubum, dimittendo partes, quæ in

uno sunt p: in alio m: habebis $\frac{1}{16}$ cub' quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quantitibus pro

	$\frac{1}{2}$ quan:
1 pos. $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 pos.	
$\frac{1}{2}$ quan: pos: m: 1 qd.	
æqualis 8	
$\frac{1}{4}$ quan:	
$\frac{1}{16}$ qd. quan: m: 8	
$\frac{1}{4}$ qn: p. R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd: qn: m: 8	
$\frac{1}{4}$ qn: m: R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd. qn: m: 8	
$\frac{1}{8}$ qd. quan: m: 8	
$\frac{1}{8}$ qd quan: m: 8	
	$\frac{1}{2}$ quan:
$\frac{1}{4}$ qd. qn. m: 16 p: $\frac{1}{2}$ quan:	
æqualis 40	
1 qd. quan. p: 2 quan: æq̃	
lis 224	
æstimatio rei R $\times$ 225 m: 1	

	$\frac{1}{2}$ quan:
1 pos. $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 pos.	
$\frac{1}{2}$ quan: pos: m: 1 qd.	
æqualis 6	
$\frac{1}{4}$ quan: p: R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd. quan: m: 6	pos.
$\frac{1}{4}$ quan: m: R $\times$ V: $\frac{1}{16}$ qd. quan: m: 6	pos.
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quan:	cubus
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ quan:	cubus
$\frac{1}{8}$ cub. quan: m: 9 quan: æq̃lia 100	
1 cub. æqualis 72 res p: 800	

singulis partibus, quare in totū $\frac{1}{8}$ cub' quan: m: 9 quantitibus, æqualia 100, permuta cub' quan: in cubum rei, & quantitatem in rem, & reduces ad 1 cubum, habebis cubum, æqualem 72 rebus p: 800, & rei æstimatio erit æstimatio quantitatis, scilicet R: v: cubica 400 p: R: 146176 p: R: v: cubica 400 m: R: 146176, huius igitur dimidium, quod est R: v: cubica 50 p: R: 2284 p: R: v: cubica 50 m: R: 2284 est aggregatum quæditorum numerorum, & partes sunt, R: v: cubicæ quæsitæ, sed hoc apparet alia operatione.

QVÆSTIO XVI.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & ex maiore illorum iuncto cum suis quadratis, fiat 40. Pones aggregatum numerorum rem, & unam partem $\frac{1}{2}$ quantitatem, reliqua erit:

res m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, duc in se partes,	1 pos.
habebis $\frac{1}{4}$ qd' quan: & 1 qdratum p: $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ quan: 1 pos. m: $\frac{1}{2}$ quan:
qd' quan: m: 1 quan' pos. sume differen-	$\frac{1}{4}$ qd' quan: 1 qd. p: $\frac{1}{4}$
tiam, quæ erit 1 quan' pos. m: 1 qd. &	qd. quan: m: 1 quan: pos.
hoc æq'tur 10, igitur rei æsti-	$\frac{1}{2}$ quan: p: R: v: $\frac{1}{4}$ qd' qn: m: 10 pos.
matio est $\frac{1}{2}$ quantitas p: R: v:	$\frac{1}{2}$ quan: m: R: v: $\frac{1}{4}$ qd' qn: m: 10 pos.
$\frac{1}{4}$ qd' quan: m: 10, & $\frac{1}{2}$ quanti-	$\frac{1}{4}$ qd' quan: $\frac{1}{4}$ qd' qn: m: 10 $\frac{1}{2}$ quan:
tas m: R: v: $\frac{1}{4}$ qd' quan: m: 10,	1 qd' quan: p: 1 quan: æquantur 100

horū quoduis æquatur 1 positioni, & iam positio diuisa fuit in $\frac{1}{2}$ quantitatem, & positionem m: $\frac{1}{2}$ quantitate, igitur cum $\frac{1}{2}$ quantitas sit communis utrobique, erit R: v: $\frac{1}{4}$ qd' quan: m: 10, æqualis 1 positione m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, igitur quadrata partium, quæ sunt $\frac{1}{4}$ qd' quan: & $\frac{1}{4}$ qd' quan: m: 10, cum una partium, scilicet $\frac{1}{2}$ quantitate, æquantur 40, quare 1 qd' quan: p: 1 quantitate, æquatur 100, res igitur quæ est quantitas, est R: 100 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & quia nos posuimus $\frac{1}{2}$ quantitatis, erit una pars, R: 25 $\frac{1}{16}$ m: $\frac{1}{4}$, dimidium scilicet R: 100 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & minor erit R: v: 15 $\frac{1}{8}$ m: R: 6 $\frac{1}{64}$. Et generaliter in hac regula, qui plus ualet ingenio, plus ualet in operatione, nam modi sunt complures, & de omnibus dicere longū foret, ista igitur sufficiant, & ad exempla primæ regulæ denuo transeamus, Quærentes hoc modo.

QVÆSTIO XVII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratum secundū, æquale sit ductui primi in aggregatum, & quadrata illorum iuncta sint 10, uides manifeste, quod si ponatur aggregatum illorum res, ipsa erit diuidenda secundum proportionem habentem medium & duo extrema, eruntque partes, R: v: $\frac{5}{4}$ quadrati m: $\frac{1}{2}$ positionis, & 1 $\frac{1}{2}$ positiones m: R: v: $\frac{5}{4}$ quadrati, harum igitur quadrata erunt 5 quadrata m: R:

HIERONYMI CARDANI

20 qd' qdratorum, & erunt æqualia 10, igitur ex capitulo argumentandi p: & m: 5 quadrata m: 10, æquantur & 20 qd' qdratorum, quare partes erunt ut uides.

$$\begin{array}{l} R: V: 2 \frac{1}{2} p: R: 5 p: R: V: 2 \frac{1}{2} m: R: 5 \\ R: V: 2 \frac{1}{2} p: R: 5 m: R: V: 2 \frac{1}{2} m: R: 5 \end{array}$$

QVÆSTIO XVIII.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum primus & secundus æquantur tertio, & quadrata primi & secundi iuncta, sint 10. Pones tertiū 1 positionem, fac de 1 positione duas partes, quarum quadrata iuncta sint 10, & erunt $\frac{1}{2}$ positionis p: R: V: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ positio m: R: V: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, duc 1 positionem in minorem, & producet quadratum maioris, aliter diuides 1 positionem secundum proportionem habentem medium & duo extrema, inde duces partes ad quadratum, & quadrata iuncta erūt 10, partes igitur erunt.

$$\begin{array}{l} p^2 | R: V: 22 \frac{1}{2} p: R: 405 m: R: V: 12 \frac{1}{2} p: R: 125 \\ 2^2 | R: V: 12 \frac{1}{2} p: R: 125 m: R: V: 2 \frac{1}{2} p: R: 5 \\ 3^2 | R: V: 10 p: R: 80. \end{array}$$

QVÆSTIO XIX.

Similiter, si quis dicat, inuenias tres numeros, proportionales, ex quorū ductu primi in secundum fiat 10, & primus cum secundo æquantur tertio, eodem modo procedendo habebis quantitates.

$$\begin{array}{l} p^2 | R: V: R: 31 \frac{1}{4} p: 5 m: R: V: R: 31 \frac{1}{4} m: 5 \\ 2^2 | R: V: R: 31 \frac{1}{4} p: 5 p: R: V: R: 31 \frac{1}{4} m: 5 \\ 3^2 | R: V: R: 500 p: 20 \end{array}$$

De regula liberæ positionis. Caput XXXVI.



St regula pro quæstionibus, quæ consequuntur proprietates numerorum uniuersales, quas homo ignorat, inde quærens per alias regulas, laborat inaniter, non enim proportionem exigunt, nec tamen in omnibus quantitatibus inueniri queunt, tales autem sunt.

QVÆSTIO I.

Inuenias quinque quantitates, quarum secundæ qdratum, æquale sit aggregato earum, cum quadrato primæ, sintque hæ quantitates continue proportionales, ponam igitur in quacunque uoluerō proportionē, ab una positione inchoando, uelut in figura uides, eritque in dupla (exempli gratia) quadratum secundæ, 4 quadrata, & hoc æquatur 1 quadrato quod est qua-

$$\begin{array}{l} 1 \text{ qd. } 1 \text{ pos.} \\ 4 \text{ qd. } 2 \text{ pos.} \\ \quad 4 \text{ pos.} \\ \quad 8 \text{ pos.} \\ \quad 16 \text{ pos.} \\ \hline 3 \text{ qd. } \text{æq} \text{lia} \\ 31 \text{ pos.} \end{array}$$

dra

dratū primæ & 31 rebus, igitur 3 qdrata æqntur 31 rebus, & res erit $10\frac{1}{3}$, & reliquæ secundū duplam proportionē, ut uides, $10\frac{1}{3}$, $20\frac{2}{3}$, $41\frac{1}{3}$, $82\frac{2}{3}$, $165\frac{1}{3}$.

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, in proportionē dupla, quorum quadrata, uel cubi, uel relati, sint æqualia ipsis, & sit exemplum de relatis, tanquam magis admirandis. Ponemus igitur in pportione dupla, 1 positionem & 2 positiones, quorum relata erunt, 32 relata prima, & 1 relatum primū, iunge, fient 33 relata prima, æqualia 3 rebus, igitur per capitulum simplex, res erit $R:R\frac{1}{11}$, diuiso 3 per 33, reliqua quantitas igitur erit $R:R\frac{1}{11}$, scilicet duplum $R:R\frac{1}{11}$.

QVÆSTIO III.

Inuenias tres quantitates proportionales, quarum proportio sit tripla, & $\frac{1}{4}$ aggregati, in se ductum, producat $\frac{1}{7}$ secundæ quantitatē. Ponemus igitur quantitates, 1 positionē, 3 pos., 9 pos. harum aggregatum est 13 positiones, cuius $\frac{1}{4}$ est $3\frac{1}{4}$ positiones, & quadratum est $10\frac{9}{16}$, & hoc est $\frac{1}{7}$ de 3 positionibus, igitur $73\frac{15}{16}$ quadrata, equantur 3 positionibus, quare positio est $\frac{48}{1183}$, & quantitas secūda erit $\frac{144}{1183}$ & tertia erit $\frac{432}{1183}$.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum secundus sit 10, & $\frac{1}{20}$ aggregati omnium in se ductum, producat septuplum secundi, ponemus primum rem, igitur tertius erit $\frac{100}{1\text{ pol.}}$, & quia $\frac{1}{20}$ aggregati in se ductū, producit septuplum secundi, igitur producit 70, & $R:70$, est $\frac{1}{20}$ aggregati, igitur aggregatum est $R:28000$, & ideo prima & tertia, erunt $R:28000\text{ m}:10$, & hoc æquale est 1 positioni $p:\frac{100}{1\text{ pol.}}$, igitur 1 qdratum $p:100$, æquatur positionibus $R:28000\text{ m}:10$, igitur prima quantitas fuit $R:7000\text{ m}:5\text{ m}:R:V:6925\text{ m}:R:700000$, & tertia quantitas erit $R:7000\text{ m}:5\text{ p}:R:V:6925\text{ m}:R:700000$, posset etiam breuius fieri, sed absq; positione.

De regula falsum ponendi.

Cap. XXXVII.

REGULA I.



Ac regula triplex est, aut em̄ ponit m: aut querit R: m: aut querit quod nō est. Primo igitur querimus quæstionū solutiones, quæ per p: uerificari minime possunt, uelut si quis dicat, qdratū æqntur 4 rebus p: 32, & in eadē æstimatione, qdratū æqntur 1 rei p: 20, tunc si uelles sequi æstimationē uerā, in prima res esset 8, in secunda autem quæstione 5, sed si dicas conuertendo igitur quadratum p: 4 rebus, æquatur 32, & res erit 4, & in hoc

R

etiam

etiam uerum erit, quod quadratum & res, æquantur 20, dic igitur, si 4 p: seruit his quæsitis, igitur 4 m: est æstimatione 1 qdrati, æqualis 4 rebus p: 32, & 1 quadratum æquale 1 rei p: 20, ideo conuertes capitula, ut in primo capitulo diximus, & si casus est impossibilis, in utroq; quæstio falsa est, per p: & per m: & si uera est, per p: in uno, erit uera per m: in alio, & eiusmodi generis est quæstio hæc.

QVÆSTIO I.

Dos uxoris Francisci, est aurei 100 plusq; Francisci peculium, & dos uxoris eius in se ducta, est aurei 400 plus peculio Francisci in se ducto, quæritur dos, & peculium. Ponemus Franciscum habere rem unam m: igitur dos uxoris est aurei 100 m: 1 re, duc partes in se, fient 1 qdratum & 10000, p: 1 quadrato m: 200 positionibus, horum differentia est 400 aurei, igitur 1 quadratum p: 400 p: 200 positionibus, æq̃tur 10000 p: 1 quadrato, abijce communia, habebis 9600, æqualia 200 positionibus, igitur res est 48, & tantum habuit m: id est debiti, & dos erit residuum ad 100, scilicet 52,

m: 1 pos.		100 m: 1 pos.
1 qd.		10000 p: 1 qd.
		m: 200 pos.
differentia 10000 m: 200		
pos. æqualis 400		

igitur Franciscus habuit 48 aureos debiti, sine ullo capitali uel peculio, & dos eius uxoris fuit 52 aureorum, & secus operando peruenires ad quæstiones difficillimas, ac inextricabiles. Talismodi etiã hæc est.

QVÆSTIO II.

Ego habeo aureos 12 plus Francisco, & cubus meorum est, 1161 aurei plus cubo Francisci, ponatur 1 res m: Francisco, ego habeo 12 aureos m: 1 positione, duc ad cubum partes, fient 1 cubus m: & 1728 p: 36 qdratis m: 432 rebus m: 1 cubo, & horum differentia, est 1161, igitur 1 cubus m: p: 432 rebus p: 1161, equabitur 1728 p: 36 quadratis m: 1 cubo, abijce m: 1 cubum & 1161 ex utraq; parte, fient 432 res æq̃les 36 qdratis p: 567, quare 1 qdratū p: $15\frac{3}{4}$, æq̃lia 12 rebus, igitur res est $1\frac{1}{2}$, & hoc habuit m: Franciscus, & ego $10\frac{1}{2}$ p: & tot sunt aurei q̃siti.

QVÆSTIO III.

Et eodem modo, si dicam etiam sic, aurei mei sunt 12 p: quàm illi Francisci. Et qdratum meorum est 128 p: cubo aureorum Francisci, dabimus rem unam m: Francisco, ego uero habeo 12 aureos m: 1 re, & quadratum meorum erit 144 p: 1 quadrato m: 24 rebus, & hoc æquale est m: 1 cubo p: 128, igitur 16 p: 1 quadrato p: 1 cubo, æquatur 24 rebus, Et res erit 4 m: & tantum habet Franciscus debiti, ego uero aureos 8 peculij.

REGULA II.

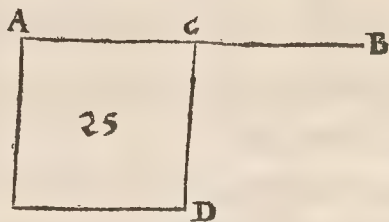
Secundum genus positionis falsæ, est per radicem m: Et dabo exemplum,

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producat 30, aut 40, manifestum est, quod casus seu quaestio est impossibilis, sic tamē operabimur, diuidemus 10 per aequalia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25, ipsum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in sexto libro, fiet residuum m: 15, cuius R addita & detracta à 5, ostendit partes, quae inuicem ductae producant 40, erunt igitur hae, 5 p: R m: 15, & 5 m: R m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulae uerus pateat intellectus, sit AB linea, quae dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarum rectangulum debeat esse 40, est aut 40 quadruplū ad 10, quare nos uolumus

quadruplum totius AB, igitur fiat AD, quadratum AC, dimidij AB, & ex AD auferatur quadruplum AB, absq; numero, R igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex AC, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis R m: 15, id est differentiae AD, &



quadrupli AB, quam adde & minue ex AC, & habebis quaesitum, scilicet 5 p: R V: 25 m: 40, & 5 m: R V: 25 m: 40, seu 5 p: R m: 15, & 5 m: R m: 15, duc 5 p: R m: 15 in 5 m: R m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē AD, non est eadem cū natura 40, nec

remota à natura numeri, & lineae, proximius tamē huic quantitati, quae uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari

quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à R aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius R minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, R 65 p: 5 & R 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed R 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.

QUESTIO IIII.

Fac de 6 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, haec soluitur per primam, non per secundam regulam, est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se, fit 9, minue ex dimidio 50, quod est 25, fit re-

R 2

siduum

fiduum 16, cuius $\times 4$, adde & minue à 3, dimidio 6, fiunt partes 7, & 1 m: harum quadrata iuncta sunt 50, & aggregatum est 6.

QVÆSTIO V.

Per idem soluitur quæstio hæc, fac ex 6 duas partes, quarum una in reliquam ducta, producat m: 40, duc 3, dimidium 6, in se, fit 9, adde ad 40, fit 49, huius $\times$ quæ est 7, adde ad 3, dimidium 6, & minue, habebis 10 p: & 4 m: quæ ducta inuicem, producant 40 m: & iuncta, faciunt 6, & ita 10, m: & 4 p: producant 40 m: & iuncta, faciunt 6 m: ideo etiam hæc quæstio, est de puro m: & pertinet ad primam regulam.

Cor^m. Ex hoc patet, quod si quis dicat, fac de 6 duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem, producat 40, quæstio est de m: sophistico, & pertinet ad secundam regulam. Et si dicat, fac de 6 duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem producat 40 m: uel ex 6 m: fiant duæ partes producentes m: 40, utroq; modo erit quæstio de m: puro, & pertinebit ad primam regulam, & tales partes erunt quæ dicte sunt, & si dicat, quod ex 6 m: fiant duæ partes, quarum productum sit 40 p: quæstio erit de m: sophistico, & pertinebit ad secundam regulam, & erunt partes m: 3 p: $\times$ m: 15, & m: 3 m: $\times$ m: 15.

REGULA III.

Possumus uero uenari genus m: aliud, quod neq; est purum m: neq; $\times$ m: sed res omnino falsa, & cõponitur hæc regula quasi ex ambobus, & dabo huius unum exemplum, quod est hoc.

QVÆSTIO VI.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum $\times$ primi detrahe à primo, faciat secundum, & $\times$ secundi, detracta à secundo, faciat tertium. Ponemus igitur primum, 1 quadratū, & secundus erit 1 qd. m: 1 positione, & tertius erit 1 qd. m: 1 positione m: $\times$ v: 1 quadrati m: 1 positione, duc primum in tertium, & secundum in se, habebis quantitates ipsas, operando ut uides, & productum primi in tertium, est m: $\frac{1}{16}$ p: $\left| \frac{1}{4} \right| m: \frac{1}{4} \left| m: \frac{1}{4} m: \times m: \frac{1}{4} \right|$ $\times \frac{1}{64}$, quod est $\frac{1}{8} m: \frac{1}{16}$, & tantum fit ducto secundo numero in se.

Quomodo excidant partes & denominationes multiplicando. Cap. XXXVIII.

REGULA I.



Si hoc & generale sit, & abunde in libro quarto & quinto demonstratum, nihilominus denuo ad facilitatem & utilitatem repetendum erit, sit autem hoc duobus modis, totidemq;

eademq; regulis indigemus, quarum prima particularis est, & inuenta causa capitulorum illorum, quæ postmodum Geometrica ratione, in quatuor denominationibus superius à nobis sunt demonstrata, nunc inuentis illis, eius utilitas magna ex parte extincta est, docebimus tamē eam ob artis locupletationem, & ingenij eius admirationem, cum etiam ad alia utilis sit, ad quæ transferri commode potest, quanq; nullo usui generali possit cōuenire. Igitur eius regula hæc est, Vel uis numeros differentes, quorum quadratum unius, cū cubo alterius faciant iuncti, numerū, tunc diuides differentiam illam in duas partes, quarum triplum quadrati unius, sit æquale duplo alterius, per positionem, inde inuentis partibus, pones rem, p: parte, cuius sumitur triplum quadrati, pro parte cubanda, & partem quadrandam, rem m: parte, cuius sumitur duplum, inde peracta operatione, peruenies ad cubum, ac quadrata æqualia numero, excidentibus rebus.

QVÆSTIO I.

Exemplum. Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 8, & cubus unius, cum alterius qdrato iunctus, faciat 100, fac p^o per positionē duas partes, quarū triplum qdrati unius, sit æqle duplo alterius, quas inuenies esse, 2 & 6, nam triplum 4, qdrati 2, est 12, quod est duplum 6 residui, igitur pones partem cubandā positionē p: 2, & qdrandam positionem m: 6, iunge cubū 1 positionis, p: 2, cum qdrato 1 positionis m: 6, habes 1 cub. p: 7 qdratis p: 44, æqlia 100, igitur 1 cub. p: 7 qdratis, æqitur 56, & rei æstimatio, erit

R: v: cubica 15 $\frac{8}{27}$ p: R: 72 $\frac{16}{27}$ p: R: v: cubica 15 $\frac{8}{27}$ m: R: 72 $\frac{16}{27}$ m: 2 $\frac{1}{3}$, & quia partes fuerūt, res p: 2, & res m: 6, ideo huic adde 2, & minue 6, habebis partes, ut ui des à latere. Est aut manifestum, quod una illarum est m: purum, & si uoluisses ut essent ambę p: oportuisset ponere, quod cubus & qdratum talium numerorum æquarentur numero maiori, ut puta 1000, loco 100.	pos. p: 2 pos. m: 6 cub. p: 12 pos. p: 6 qd. p: 8 m: 12 pos. p: 1 qd. p: 36 cub. p: 7 qd. p: 44 æqualis 100
--	--

R: v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ p: R: 72 $\frac{16}{27}$ p: R: v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ m: R: 72 $\frac{16}{27}$ m: $\frac{1}{3}$
 R: v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ p: R: 72 $\frac{16}{27}$ p: R: v: cub. 15 $\frac{8}{27}$ m: R: 72 $\frac{16}{27}$ m: 8 $\frac{1}{3}$

Et eodem modo facies, si uolueris, quod numerorum differentiū in aliquo numero, cubus & quadratum differant in assignato numero, eadem regula inuenies partes differentię, quibus inuentis, pones econtra, scilicet positionem m: numero, cuius sumitur triplum qdrati, & positionem p: numero, cuius sumitur duplum, inde sequeris operationem, ut in exemplo.

HIERONYMI CARDANI

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, quorū differētia sit 8, & differētia cubi unius, à q̄drato alterius, sit 100, facies ex 8 duas partes, ut dictū est, & erūt 2, & 6, pones igit̄ rem m: 2, & rē p: 6, cuba rem m: 2, & q̄drata rem p: 6, & fume differentiam habebis cubū m: 7 quadratis m: 44, æqualem 100, quare cubus æquabitur 7 quadratis p: 144, & rei æstimatio erit R: v: cubica $84\frac{12}{27}$ p: R: 7013 $\frac{1}{3}$ p: R: v: cubica $84\frac{12}{27}$ m: R: 7013 $\frac{1}{3}$ p: 2 $\frac{1}{3}$, & quia nos posuimus partes, rem m: 2, & rem p: 6, erūt numeri quæsitī, ut uides.

pos. m: 2	
pos. p: 6	
cub. p: 12	pos. m: 6 q̄d. m: 8
p: 12	pos. p: 1 q̄d. p: 36
cub. m: 7	q̄d. m: 44
æqualis 100	

Et similiter, si dicat, duas fac partes ex aliquo numero, quorum quadratum unius, cum cubo alterius iunctum, faciat aliquem numerum, facies enim duas partes ex numero diuidendo, ut supra, quarum uni, scilicet cuius sumitur triplum quadrati, addes rem, alteri cuius sumitur duplum ipsius, detrahes rem, inde perficies operationem, ut in exemplo.

R: v: cu. $84\frac{12}{27}$ p: R: 7013 $\frac{1}{3}$ p: R: v: cu. $84\frac{12}{27}$ m: R: 7013 $\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{3}$
R: v: cu. $84\frac{12}{27}$ p: R: 7013 $\frac{1}{3}$ p: R: v: cu. $84\frac{12}{27}$ m: R: 7013 $\frac{1}{3}$ p: $8\frac{1}{3}$

QVÆSTIO III.

Fac ex 8 duas partes, quarum cubus unius, cum quadrato alterius, faciat 400, facies ex 8 duas partes, ut prius, quæ erunt 6 & 2, & pones 2 p: re, & 6 m: re, duces 2 p: 1 positione ad cubum, & 6 m: 1 positione ad quadratum, habebis iungendo 1 cub. p: 7 quadratis p: 44, æqualia 400, igitur 1 cub. p: 7 quadratis, æquatur 356, quare rei æstimatio, est R: v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: R: 27161 $\frac{13}{27}$ p: R: v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: R: 27161 $\frac{13}{27}$ m: 2 $\frac{1}{3}$, quare cum partes sint 2 p: 1 positione, & 6 m: 1 positione, ipsæ erunt quales uides, $8\frac{1}{3}$ m: R: v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: R: 27161 $\frac{13}{27}$ m: R: v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: R: 27161 $\frac{13}{27}$ R: v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: R: 27161 $\frac{13}{27}$ p: R: v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: R: 27161 $\frac{13}{27}$ m: $\frac{1}{3}$.

2	p:	1 pos.
6	m:	1 pos.
8	p: 6 q̄d. p: 12	pos. p: 1 cub.
36	p: 1 q̄d. m: 12	pos.
44	p: 7 q̄d. p: 1	cub.
æqualia 400		
1 cub. p: 7	q̄d. æqual.	356

Et si dicat de diuisione numeri assignati, in duas partes, quarum differentia cubi unius à quadrato alterius, sit numero dato æqualis, tunc semper pones $\frac{1}{3}$ p: 1 positione, pro parte quæ cubari debet, & residuum numeri diuidendi, detracto $\frac{1}{3}$ m: 1 positione, pro numero in se

se ducendo, inde facta detractiōe, habebis cubum & res æquales numero, quare erit cognita utraq; pars confestim.

QVÆSTIO IIII.

Exemplum, Diuide 8 in duas partes, quarum cubus unius, excedat quadratum alterius, in 10. Ponemus itaq; partem primam $\frac{1}{3}$, & secundam $7\frac{2}{3}$, & addemus ad $\frac{1}{3}$, rem, & fiet $\frac{1}{3}p$: 1 positione, & minuemus rem ex $7\frac{2}{3}$, & fiet $7\frac{2}{3}m$: re, inde sequemur operationem, & habebimus pro cubo, $\frac{1}{3}p$: 1 positione, hoc,

$\frac{1}{3}$	p:	1 pos.
$7\frac{2}{3}$	m:	1 pos.

$\frac{1}{27}$, & pro quadrato, 1 quad. m: $15\frac{1}{3}$ positionibus p: $58\frac{7}{9}$, horum differentia erit 1 cubus p: $15\frac{2}{3}$ positionib⁹ m: $58\frac{20}{27}$ & hoc æquatur 10, igitur cubus & $15\frac{2}{3}$ positiones, æquatur $68\frac{20}{27}$, & rei æstimatio cognita est, cui addemus $\frac{1}{3}$ pro prima parte, & minuemus eam à $7\frac{2}{3}$, pro secunda parte, & si uoluissēmus, quod quadratum superasset cubum, detraxissemus 10 numerum æquationis, ex $58\frac{20}{27}$, & haberemus 1 cubū p: $15\frac{2}{3}$ positionibus, æqualem $48\frac{20}{27}$, & modi huius primę regulę sunt innumerabiles, & sunt quasi pars regulę de modo.

REGULA II.

Verum alia regula quę multum apud nos in usu est, & facilior, talis est, & etiam exemplis ut reliquę facilius explicabitur.

QVÆSTIO V.

Fac igitur ex 8 duas partes, quarum assumptis quadratis simul, item cubis simul, ductoq; uno aggregato per alterum, fiat numerus perfectus, possem dicere, quod faceret etiam numerum terminatum, ut 10000, uel alium, datur etiam maximus quem potest producere, & est 32768, & producit ex cubo totius, in quadratum totius, datur etiam minimus quo minorem producere non potest, & est 4096. Videndum est igitur primo, an inter hos duos numeros, cadat numerus perfectus, & est 8128, qui si non caderet, esset quæstio impossibilis, pone igitur unam partem 4 m: 1 positione, aliam 4 p: 1 positione, & fient quadrata, 16 p: 8 positionibus p: 1 quadrato, & 16 m: 8 positionibus p: 1 quadrato, quę iuncta erunt 32 p: 2 quadratis, excidentibus rebus, cubi etiam erunt, 64 p: 12 quadratis p: 48 positionibus p: 1 cubo, & 64 p: 12 qdratis m: 48 positionibus m: 1 cubo, qui iuncti, sunt 128 p: 24 quadratis, quare ducemus 32 p: 2 quadratis, in 128 p: 24 quadratis, & fient 4096 p: 1024 quadratis p: 48 qd' qdratis, & hæc sunt æqualia 8128, igitur habebimus, facta detractiōe & diuisione,

1 qd' qd^m

1 qd' qdratum p: 21 $\frac{1}{3}$ qdratis, æqualia 84, quare res est R: V: R: 197 $\frac{7}{9}$ m: 10 $\frac{2}{3}$, partes igitur sunt 4 p: dicta radice & 4 m: dicta radice.

QVÆSTIO VI.

Fac de 10 duas partes, quarum radices quadratæ cubicatæ faciāt 26, pone quod tales R: sint 1 positio, fac ex 1 positione duas partes, quarum quadrata iuncta sint 10, eo quod radices talium partium debent aggregare 1 positionem, ex regulis igitur sexti libri, uel ex Euclide, habebis partes, ut uides, id est, $\frac{1}{2}$ positionem p: R: V: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ positionis m: R: V: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, istæ reducendæ sunt ad cubum, & quia in cubando Binomium, oportet ducere quamlibet partium in se, & triplare, & addere quadrato alterius partis, & productum ducere in illam alteram partem, ideo cum talia producta assimilentur, & sint æqualia, & unum sit p: aliud m: quando ducemus triplum quadrati primæ partis cum quadrato secundæ in secundam, ideo sufficiet ducere, triplum quadrati secundæ partis, quod est 15 m: $\frac{3}{4}$ quadrati cum quadrato primæ partis, quod est $\frac{1}{4}$ quadrati, & fiet totum 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in primam partem quæ est $\frac{1}{2}$ positio, sed quia hæc operatio geminanda est, propter duas partes, habebimus multiplicationem 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in 1 positionem, quæ est duplum $\frac{1}{2}$ positionis primæ partis, igitur tandem producentur 15 positiones m: $\frac{1}{2}$ cubi, æqualis 26, quare 1 cubus p: 52, æquabitur 30 positionibus, & rei æstimatio erit ex capitulo suo, R: 27 m: 1, inde habebis partes, ut uides, & in uerificatione operationis, multo magis hac regula indiges ad facilitatem, uerum de hoc diximus in tertio libro suo loco.

QVÆSTIO VII.

Et ad hanc reducitur quæstio illa, quidam emit Croci lib. 1. Cinamoni lib. 2. Piperis lib. 5, precijs proportionalibus, sic, ut se habuit precium totius piperis, ad precium cinamomi, sic precium cinamomi, ad precium croci, ita quod precium croci fuit minimum, & piperis maximum, & cinamomi medium, & hæc tria precia, iuncta simul, fuerunt 6 aurei. Denuo sub eisdem precijs emit croci lib. 30, cinamomi lib. 50, piperis lib. 40, aureis 100, quæritur singulorum precia. Hæc quæstio, à fratre Luca posita est, sed in numeris proportionalibus, nam sic existimat eam admodum difficilem, sed non est, nam cum precia hæc, 5 librarum piperis, & 2 cinamomi, & 1 croci sint proportionalia, ipsa manebunt etiam proportionalia, in suis aggregatis, diuidemus

mus igitur 30 lib. croci per 1,
& est secunda quantitas per
primam, & ita 50 cinamomi
per 2, & 40 piperis per 5, & ex
ibunt numeri in margine, id

Crocus	Cinamomū	Piper	Aurei
30	50	40	100
1	2	5	6
30	25	8	100

est 30, pro croco, 25 pro cinamomo, & 8 pro pipere, manifestum est
igitur quod hi sunt numeri trium quantitatum proportionalium, quæ
sunt precia 1 lib. croci, 2 cinamomi, & 5 piperis, & quod prima quan-
titas seu precium, sumptum 30 uicibus, & secundum 25 uicibus, & ter-
tium 8 uicibus, faciunt 100 aureos, at uero istæ quantitates, ut dictū
est, sunt 6 aurei, simpliciter sumptæ, fac igitur ex 6 tres quantitates
proportionales, quarum prima ducta per 30, secunda per 25, tertia
per 8, faciant 100. Ponemus igitur, mediam 2 positiones, relinquen-
tur reliquæ, 3 m: 1 positione p: R: v: 9 m: 3 quadratis m: 6 positioni-
bus, & 3 m: 1 positione m: R: v: 9 m: 3 quadratis m: 6 positionibus,

ducendæ igitur sunt sin-
gulæ per suos numeros,
quia igitur primæ partes
Binomiorum sunt æqua-
les, & ambæ p: tantum
erit ducere eas per 30, &
per 8, quantum per 38,
& similiter, quia radicū
uniuersalium una est m:
ducenda per 30, alia p:
ducenda per 8, tantum
erit, cum sint æquales,
quantum, si ducant per
22, differentiam 30 & 8,
& producentur partes,

3 m: 1 pos. p: R: v: 9 m: 3 qd. m: 6 pos.	8
3 m: 1 pos. m: R: v: 9 m: 3 qd. m: 6 pos.	30
2 pos. ——— 25 ——— 50 pos.	
p: 3 m: 1 pos. m: R: v: 9 m: 3 qd m: 6 pos.	38 22
114 m: 38 pos. m: R: v: 4356 m: R: 1452	quad. m: 2904 pos.
114 m: 38 pos.	50 pos.
m: R: v: 4356 m: 1452 qd. m: 2904	pos. æqualia 100

quas uides à latere, & ipsæ erunt æquales 100, iunge & detrahe simi-
lia, habebis 14 p: 12 positionibus, æqualia R: v: illi, quæ est m: & ideo
quadratum quadrato, id est 196 p: 336 positionibus p: 144 quadra-
tis, æqualia 4356 m: 1452 quadratis m: 2904 positionibus, æq̃lia
partes, habebis 4160 æqualia 1596 quadratis p: 3240 positionibus,
quare 1 qd. p: 2 $\frac{4}{133}$, æq̃tur 2 $\frac{242}{399}$, est igit rei æstimatio R: 3 $\frac{4494602}{7057911}$
m: 1 $\frac{2}{133}$, precium igitur unius libræ croci, est aurei 4 $\frac{2}{133}$ m: R:
3 $\frac{4494602}{7057911}$, & precium duarū librarum cinamomi, est R: 14 $\frac{3862586}{7057911}$
m: 2 $\frac{4}{133}$, & precium quinq; librarū piperis, est R: 3 $\frac{4494602}{7057911}$ p: 1 $\frac{131}{133}$

S

si igitur

HIERONYMI CARDANI

si igitur diuiferis hæc precia proportionalia, per suarum librarum numerum, referendo singula singulis, primum per 1, secundum per 2, tertium per 5, habebis precia librarum singularum, uniuscuiusque generis, & si duxeris ea per duos numeros, in secunda emptione, precium croci per 30, cinamomi per 50, piperis per 40, habebis quantum pecuniarum singulis impenderit.

QVÆSTIO VIII.

Eodem modo soluitur quæstio hæc, fac ex 14 tres partes proportionales, quarum maior ducta per 2, media per 3, minor per 4, producta hæc iuncta, faciant 36, peruenies enim per modum superioris, ad 1 quadratum $p:9\frac{1}{3}$ positionibus, æqualia $53\frac{1}{3}$, quare res est $\Re 75\frac{1}{3}$ $m:4\frac{2}{3}$, & est 4, media quantitas, posita media quantitate 1 positione, non ut in priore, 2 positionibus.

QVÆSTIO IX.

Diuide 14 in tres partes proportionales, ut ducta prima per 2, secunda per 3, talia producta æquetur tertiæ multiplicatæ per 7. Pones secundam, esse 2 positiones, reliquæ erunt ut uides, ducta secunda per 3, fiunt 6 positiones, modo prima habet multiplicari p

2^2	2 pos.
p^2	7 m: 1 pos. p: $\Re v: 49$ m: 14 pos. m: 3 qd.
3^2	7 m: 1 pos. m: $\Re v: 49$ m: 14 pos. m: 3 qd.

2, & tertia per 7, & ha-

bent detrahi, igitur cum ambæ partes sint similes, & prima in ambabus sit p: & secunda in prima sit p: in tertia m: ideo primam partem sufficit multiplicare p differentiam 7 & 2, quæ est 5, & producentur pro tertia parte, 35 m: 5 positionibus, quibus demptis 6 positionibus producto secundæ partis, habebimus 35 m: 11 positionibus, pro differentia tertij & secundi producti, primum autem producet, ducto 9 aggregato primi & tertij, in radicem uniuersalem, & fit $\Re v: 3969$ m: 1134 positionibus m: 243 quadratis, hæc igitur æquatur 35 m: 11 positionibus, quare quadratum quadrato, igitur 1225 m: 770 positionibus p: 121 quadratis, æquantur 3969 m: 1134 positionibus m: 243 quadratis, æqua partes, habebis 2744 æqualia 364 positionibus p: 64 quadratis, quare 1 qd. p: una positione æquantur $7\frac{7}{13}$, quare rei æstimatio est cognita, et eius duplum est pars secunda, scilicet $\Re 31\frac{2}{3}$ m: 1.

QVÆSTIO X.

Fac de 8 tres partes proportionales, ut aggregatum quadratorum primæ & secundæ, triplum sit quadrato secundæ, pones quantitatem mediam 2 positiones, eius quadratum est 4 quadrata, cuius triplum est aggregatum quadratorum primæ & tertiæ, est autem prima 4 m: 1 pos.

1 positione p: r: v: 16 m: 8 positionibus m: 3 quadratis, & tertia est 4 m: 1 positione m: r: v: 16 m: 8 positionibus m: 3 quadratis, deducendo igitur hæc ad quadrata, uides quod oportet multiplicare r: v: in se semel, & partē

primā in se semel, & omnia sunt p: quare sufficit talia producta duplicare, deinde oportet ducere r: v: in primā par-

$$\begin{array}{r}
 4\text{ m: } 1\text{ pos.} \mid p: r: v: 16\text{ m: } 8\text{ pos. m: } 3\text{ qd.} \\
 \times \\
 4\text{ m: } 1\text{ pos.} \mid p: r: v: 16\text{ m: } 8\text{ pos. m: } 3\text{ qd.} \\
 \hline
 4\text{ m: } 1\text{ pos.} \mid m: r: v: 16\text{ m: } 8\text{ pos. m: } 3\text{ qd.} \\
 \times \\
 4\text{ m: } 1\text{ pos.} \mid m: r: v: 16\text{ m: } 8\text{ pos. m: } 3\text{ qd.} \\
 \hline
 32\text{ m: } 16\text{ pos. p: } 2\text{ qd.} \mid p: 32\text{ m: } 16\text{ pos. m: } 6\text{ qd.}
 \end{array}$$

tem bis, quare cum in una pducatur p: in alia m: suppositis, partibus æqualibus, nihil producet, igitur habebimus aggregatum quadratorum 64 m: 32 positionibus m: 4 qdratis, & hoc est æquale 12 quadratis, triplo quadrati secundæ, igitur 1 qdratum p: 2 positionibus equatur 4, & res est r: 5 m: 1, & duplum eius, est quantitas media scilicet r: 20 m: 2, & reliquæ, ut uides, quadratum secundæ est 24 m: r: 320, quadrata autem primæ & tertiæ, 72 m: r: 2880 probata est. Sed si diceret, quod quadrata primæ & tertiæ, tripla essent quadratis secundæ & tertiæ, tunc difficulter per hanc regulam soluitur, uerum facilius longe, per primam regulam 39ⁱ capituli, ponendo quantitates 1, 1 positio, & 1 quadratum, habebis 1 qd, qdratum p: triplum de 1 quadrato p: 1, quare res nota est.

QVÆSTIO XI.

Si dicas, fac ex 8 duas partes, quæ uicissim diuisæ per alterius quadratum, producant iuncta prouenientia 10, pones partēs 4 p: 1 positione & 4 m: 1 positione, & per hanc regulam, peruenies ad capitulum deriuatiuum, qd' qdrati & qdrati & numeri, & est facilis.

QVÆSTIO XII.

Inuenias quatuor numeros continue proportionales, quorum aggregatum, primi secundi & quarti, sit 15, & aggregatum primi & tertij & quarti sit 17, tunc dices, igitur cum hæc aggregata differant, per differentiam secundæ & tertiæ, igitur tertia est 2 p: quàm secunda, ponam igitur secundam, 1 positionem m: 1, & tertiam 1 positionem p: 1 nam sic differentia illarum erit 2, relinquetur igitur aggregatum primæ & quartæ 16 m: 1 positione, duc secundam in tertiam, sit 1 qd. m: 1, fac ex 16 m: 1 positione duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem, producantur 1 quadratū m: 1, & erunt partes ut uides, quia

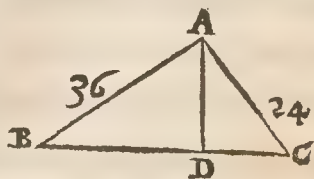
igitur pportio quar-
tæ ad tertiam, est ut
secundæ ad primam,
ex constituo, quia p-
ductum secundæ in
tertiã, æquale est pro-

$$\begin{array}{l} 8 m : \frac{1}{2} \text{ pos. } p : r : v : 65 m : 8 \text{ pos. } m : \frac{3}{4} \text{ qd. } | 4^a \\ 8 m : \frac{1}{2} \text{ pos. } m : r : v : 65 m : 8 \text{ pos. } m : \frac{3}{4} \text{ qd. } | p^a \\ 1 \text{ pos. } p : 1 \quad 3^a \\ 1 \text{ pos. } m : 1 \quad 2^a \\ \hline 2 \text{ cub. } p : 6 \text{ pos.} \end{array}$$

ducto primæ in quartam, sufficiet ad demonstrandum, quod sint con-
tinue proportionales, quod cubi secundæ & tertiæ iuncti æquales
sint, productis quantitatuum quartæ & primæ, in sua quadrata mu-
tuo, at tales cubi, fiunt solum ex multiplicatione tripli quadrati se-
cundæ partis, cum quadrato primæ, in ipsam primam, eo quod reli-
qua multiplicatio tripli quadrati primæ partis, cum quadrato secun-
dæ in ipsam secundam, excidit, eo quod in una est p: in alia m: igitur
habemus cubos iunctos, 2 cub. p: 6 positionibus, & tantum debet fie-
ri ex multiplicatione quadratorum primæ & quartæ quantitatis, in
ipsas quantitates uicissim, hoc aut ut demonstratum est, æquale est
ductui unius quantitatis in alteram, multiplicato in aggregatum
ipsarum quantitatuum, ex dictis in sexto libro, duc igitur quantitates
in uicem, & quia r: v: sunt similes, multiplicatio in crucem nulla erit,
quare sufficiet quadrare utramq; partem, & minuere unam ab altera,
quia m: in p: facit m: producentur igitur à partibus similibus 1 qd.
m: 1, aggregatum etiam radicum est 16 m: 1 positio, eo quod r: v: ex-
cidunt, igitur productum erit 16 qdrata m: 1 cubo p: 1 positione m:
16, & hoc æquatur 2 cubis p: 6 positionibus, igitur 3 cubi p: 5 positio-
nibus p: 16, æquantur 16 quadratis, quare res est in capitulo, uides
autem quoniam inextricabilis quæstio ad magnam reducitur facilita-
tem, & posset reduci ad regulam de modo, nam ubi differentia est 2,
semper 3 cubi p: 5 positionibus, p: numero medio inter duo aggrega-
ta per æquidistantiam, æquantur totidem quadratis, quotus est nume-
rus.

Q V Æ S T I O XIIII.

Est trigonius ABC orthogonius, & eius perpendicularis ad basim
AD, cuius latus AB, cum BD, est 36, & AC cum CD, est 24, quæritur
area, pone BC 1 positionem, erit igitur quadratum BC 1 qd. & ideo
cum AB & BD, sint 36, & rursus AC & CD, 24,
erunt omnia latera trigoni 60, quare AB & BC,
erunt 60 m: 1 positione, oportet igitur ex AB &
AC, facere duas partes, quarum quadrata iuncta
sint æqualia quadrato BC, secundum doctrinam



47^e primi elemen. Euclidis, quare ex regulis sexti libri nostri, diuisi-
de 60

de 60 m: i positione per æqualia, fit 30 m: $\frac{1}{2}$ positiones, duc in se, fit 900 m: 30 positionibus p: $\frac{1}{4}$ quadrati, detrahe ex dimidio quadrati B C, relinquitur $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, cuius R, addita & detracta, à dimidio aggregati A B & A C, ostendit partes, est igitur A B 30 m: $\frac{1}{2}$ positionis p: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, & A C 30 m: $\frac{1}{2}$ positionis m: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, quare si detrahatur A B ex aggregato A B & B D, relinquetur B D 6 p: $\frac{1}{2}$ positionis m: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, & similiter, detracta A C, ex aggregato A C & C D, relinquitur C D, $\frac{1}{2}$ positionis m: 6 p: R v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 30 positionibus m: 900, est autem manifestum ex demonstratione 47^e, primi elementorum Euclid. quod differentia quadrati A B, à quadrato A C, æqualis est differentie quadrati B D, à quadrato C D, differentia autem duarum quantitatum, est semper in partibus dissimilibus, nam quæ similes sunt, nullam producant differentiam, quare cum quadrata partium constent ex nouem multiplicationibus, quarum tres sunt quadrata partium, erunt illæ tres omnino similes, comparando A B ad A C, & B D ad C D, & similiter multiplicationes duæ 30 in $\frac{1}{2}$ positionis, sunt communes A B & A C, cum utræq; producant m: & ita in B D & C D, communes sunt multiplicationes, 6 in R v: nam utrinq; provenit idem m: differentia igitur A B & A C, ex parte A B, est multiplicatio 30 in R v: & ex parte A C, multiplicatio $\frac{1}{2}$ positionis in R v: quare differentia quadratorum A B, & A C, est illud quorum R v: 225 quadratorum p: 27000 positionibus m: 810000, ex cedit R v: $\frac{1}{16}$ qd' qdrati p: 7 $\frac{1}{2}$ cubis m: 225 quadratis, eadem est ratio ne differentia B D & C D quadratorum, est qua 3 positiones excedunt R v: $\frac{1}{16}$ qd' qdrati p: 7 $\frac{1}{2}$ cubis m: 225 quadratis, oportuisset aut com

A B 30 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: R v: $\frac{1}{4}$ qd. p: 30 pos. m: 900

A C 30 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: R v: $\frac{1}{4}$ qd. p: 30 pos. m: 900

B D $\frac{1}{2}$ pos. p: 6 m: R v: $\frac{1}{4}$ qd. p: 30 pos. m: 900

C D $\frac{1}{2}$ pos. m: 6 p: R v: $\frac{1}{4}$ qd. p: 30 pos. m: 900

pars qd. A B dissim. R v: 225 qd. p: 27000 pos. m: 810000

pars qd. A C dissim. R v: $\frac{1}{16}$ qd' qd. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 qd.

pars qd. B D 3 pos.

pars qd. C D R v: $\frac{1}{16}$ qd' qd. p: 7 $\frac{1}{2}$ cub. m: 225 qd.

plendo operationem, omnia quadruplicare, sed hoc uitauimus, quia si qdruplum est æquale qdruplo, igitur & simplum simplo, hæ igitur differentie æquales supponuntur, & radices v: etiam sunt idē, igitur

HIERONYMI CARDANI

igitur ex cōmuni sententia, 3 positiones æquantur illi $R\&V$: primæ, id est, $R\&V$: 225 quadratorum p : 27000 positionibus m : 810000, igitur 216 quadrata p : 27000 positionibus æquantur 810000, & 1 $\bar{q}d$. p : 125 positionibus, æquabit 3750, & res erit $R\&V$ 7656 $\frac{1}{4}$ m : 62 $\frac{1}{2}$, quod est 25, & tanta fuit BC , unde habes alias.

QVÆSTIO XIII.

Rursus disponatur trigonus ABC , orthogonius, cum perpendiculari AD , & sint AB cum CD 29, & AC cum BD 31, queritur area, ponemus BC positionem, & erunt rursus AB & AC eadem, ut in superiore quæstione, sed caue, ne maius latus ponas ex parte maioris numeri, ut in priori, detrahe igitur AB ex 29, & AC , ex 31, & habebis quantitates, ut uides, differentia igitur quadratorum AB & AC , æqualis est differentię quadratorum BD & CD , est autem differentia quadratorum AB & AC , ut prius, at differentia quadratorum BD & CD , est ut uides, sumpta eodem modo ut in priori quæstione, sed est superatio absoluta, non autem mutua, ut in priori quæstione, quia igitur quadratum AB , excedit quadratum AC in differentia quadrati BD , ad quadratum CD , erit differentia quadratorum BD & CD , addita quadrato AC constituens quadratum AB , quare $R\&V$: 225 quadratorum p : 27000 positionibus m : 810000, æquabitur $\frac{1}{2}$ positionis p : $R\&V$: $\frac{1}{4}$ $\bar{q}d'$ $\bar{q}drati$ p : 30 cubis m : 900 quadratis, nam hæc $R\&V$: est aggregatur ex $R\&V$: differentię $\bar{q}dratorum$ BD & CD , & partis quadrati AC , in qua superat quadratum AB , quare ducendo partes in se, habebimus 675 $\frac{1}{4}$ quadrata p : 27000 positionibus m : $\frac{1}{4}$ $\bar{q}d'$ $\bar{q}drati$ m : 30 cubis m : 810000, æqualia $R\&V$: 225 $\bar{q}d'$ $\bar{q}dratorum$ p : 27000 cubis m : 810000 quadratis, & cum duxeris partes in se, peruenies ad rem, quæ non ha-

$$AB \ 30 \ m: \frac{1}{2} \ pos. \ p: R\&V: \frac{1}{4} \ \bar{q}d. \ p: 30 \ pos. \ m: 900$$

$$AC \ 30 \ m: \frac{1}{2} \ pos. \ m: R\&V: \frac{1}{4} \ \bar{q}d. \ p: 30 \ pos. \ m: 900$$

$$BD \ \frac{1}{2} \ pos. \ p: 1 \ p: R\&V: \frac{1}{4} \ \bar{q}d. \ p: 30 \ pos. \ m: 900$$

$$CD \ \frac{1}{2} \ pos. \ m: 1 \ m: R\&V: \frac{1}{4} \ \bar{q}d. \ p: 30 \ pos. \ m: 900$$

$$pars \ \bar{q}d. \ AB \ dissim. \ R\&V: 225 \ \bar{q}d. \ p: 27000 \ pos. \ m: 810000$$

$$pars \ \bar{q}d. \ AC \ dissim. \ R\&V: \frac{1}{16} \ \bar{q}d' \ \bar{q}d. \ p: 7 \frac{1}{2} \ cub. \ m: 225 \ \bar{q}d.$$

$$pars \ \bar{q}d. \ BD \ qua \ superat \ quadratum \ CD \ est \ \frac{1}{2}$$

$$pos. \ p: R\&V: \frac{1}{16} \ \bar{q}d' \ \bar{q}d. \ p: 7 \frac{1}{2} \ cub. \ m: 225 \ \bar{q}d.$$

bent æstimationem, & ideo soluenda est regula particulari. Volui tamen, ut intelligeres facilitatem operandi in hoc, & quæstionem ualde difficilem, nisi Geometrico auxilio dissoluatur, manifestum est enim quòd

quod BC est 25, ut in priore quaestione, uerum generalis debet esse solutio, latera igitur trigoni BC 25, AB 20, AC 15, AD 12, BD 16, CD 9, area igitur eius est 150.

De regula qua pluribus positionibus inuenimus ignotam quantitatem. Caput XXXIX.

REGULA I.

Hæc regula similis est regulæ de medio, est autem talis, Constitue quantitates totidem in denominationibus liberis, quotus est numerus querendarum, inde inuenies proportionem, qua inuenta, denuo pones res sub numero quantitatum inuentarum, utque propositum est, perfice operationem, & habebis æquationem, qua habita, habebis rei æstimationem.

QUESTIO I.

Exemplum. Inuenias tres numeros proportionales, quorum quadratum primi sit æquale secundo & tertio, & quadratum tertij sit æquale quadratis primi & secundi, quia igitur quadratum tertij æquale est quadratis secundi & primi, ipsum sit 1 qd' qdratum, æquale 1 qdrato $p:1$, quare res, seu proportio, est Rz v Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, igitur ponemus res 1, & Rz v : Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, & Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, quadratum igitur primæ quantitatis, quod est 1 quadratum, æquatur secundæ & tertie, scilicet totidem rebus, igitur rei æstimatio, est aggregatum ex secunda & tertia, quia diuidere aliquid per unitatem, qui est numerus quadratorum, est non diuidere, igitur rei æstimatio est, Rz $1 \frac{1}{4} p. \frac{1}{2} p: Rz$ $v: Rz$ $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, & secunda quantitas, est quod producit ex hac, in Rz $v: Rz$ $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, & tertia habebitur, ducendo rem quam habes in Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{2}{2}$.

QUESTIO II.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum tertius sit æqualis secundo & primo, & quadratū primi, sit æquale aggregato secundi & tertij, pones primum quadratū, secundum rem, tertium unitatem, & quia tertius, æqualis est secundo & primo, igitur 1 quadratum, æquatur 1 rei $p:1$, & proportio erit Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, partes igitur erunt, 1 positio, & positiones Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2}$, & positiones $1 \frac{1}{2} p: Rz$ $1 \frac{1}{4}$, & quia quadratū primi æquale est aggregato secundi & tertij, igitur 1 quadratum æquatur positionibus Rz $1 \frac{1}{4} p: \frac{1}{2} p: 1 \frac{1}{2} p: Rz$ $1 \frac{1}{4}$, quare rei æstimatio erit Rz $5 p: 2$, & partes ut uides.

Rz 5	$p: 2$
$3 \frac{1}{2} p:$	Rz $1 \frac{1}{4}$
Rz $3 \frac{1}{4} p:$	$5 \frac{1}{2}$

Q V A S

QVÆSTIO III.

Inuenias quatuor quantitates proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale sit quadratis primæ, & secundæ, & quantitates iunctæ simul, faciant 10, capiam 1, rem, quadratum & cubum, igitur q̄d' cubus, equatur 1 quadrato p:1, quare res ualet ex capitulo deriuatiuorū, $R:V^m:R:V:cubicæ \frac{1}{2} p:R:\frac{2^3}{108} p:R:V:$
 $cubica \frac{1}{2} m:R:\frac{2^3}{108}$, igitur posita prima unitate
 te, hæc est secunda quantitas, & tertia erit
 quadratum huius, scilicet $R:V:cubica \frac{1}{2} p:R:\frac{2^3}{108} p:R:V:cubica \frac{1}{2} m:R:\frac{2^3}{108}$, quarta erit cubus secundæ seu proportiōis, inde iunctis quatuor quantitatibus scilicet unitate, re, quadrato, & cubo, & diuiso 10 per aggregatum, exhibit prima quantitas, qua ducta in rem habebimus secundam, hac denuo, ducta in rem, habebimus tertiam, qua ducta per rem, habebimus quartam.

QVÆSTIO IIII.

Inuenias quatuor quantitates continue proportionales, quarum quadratum quartæ, æquale sit quadratis primæ & tertiæ, & aggregatum earum sit 10, capiam ut in præcedente 1, rem, quadratum, cubū, erit igitur cu' q̄dratum æqualis q̄d' q̄drato p:1, quare ex capitulo deriuatiuorū, rei æstimatio est $R:V^m:R:V:cubicæ \frac{2^2}{54} p:R:\frac{3^1}{108} p:\frac{1}{3} p:R:V:$
 $cubica \frac{2^2}{54} m:R:\frac{3^1}{108}$, & huius q̄dratū, quod est idem, abiecta $R:V^m$: est tertia quantitas, inde ductis inuicem secunda & tertia, uel secunda ad suum cubum, uel tertia ad quadratum, & addita unitate confurgit quarta, quibus quatuor quantitatibus iunctis, si per eas diuiseris 10, habebis primam quæsitaram, qua ducta per secundam, & tertiam, & quartam, præcedentium, habebis secundam & tertiam & quartam quantitatē quas querebas.

REGULA III.

2 Alia est regula nobilior præcedente, & est Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes estimationes fermè capitulorum q̄d' q̄drati & quadrati rerum, & numeri, uel q̄d' quadrati cubi, quadrati & numeri, & ego ponam ea per ordinem, hoc modo ut uides.

- 1 q̄d' q̄d. æquale q̄d. rebus & numero
- 2 q̄d' q̄d. æquale q̄d. cubis & numero
- 3 q̄d' q̄d. æquale cubis & numero
- 4 q̄d' q̄d. æquale rebus & numero
- 5 q̄d' q̄d. cum cubis æqualia q̄d. & numero
- 6 q̄d' q̄d. cum rebus æqualia q̄d. & numero

7 q̄d' q̄d.

nam CL est superficies ex GC in AB , ut ostensum est, & AB est 1 qdratum, quia ponimus, AD 1 qd' qdratum, FL uero & MN , fiunt ex GC in CB , ex 42^a primi elementorum, quare superficies LMN , & est numerus addendus, fit ex GC in duplum C , id est in numerum quadratorum, qui fuit 6 , & GC in seipsam, id est numero quadratorum addito, & hæc demonstratio nostra est.

4 Hoc peracto, semper reduces partem qd' qdrati ad R , id est addendo tantum utriq; parti, ut 1 qd' qdratum cū quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ sint plus, in ambabus æquationibus, nam secus, trinomium seu Binomium redactum ad trinomium, necessario careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res faciat trinomium habens R quadratam per positionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utriq; parti, quo habito, ab utroq; extrahes R quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p: numero, uel m: numero, ex alia, 1 positio uel plures p: numero, uel m: numero, uel numerus m: positionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propositum.

QVÆSTIO V.

Exemplum. Fac ex 10 tres partes proportionales, ex quarum ductu primæ in secundam, producantur 6 . Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat solui non posse, ego uero dicebam, eam posse solui, modum tamē ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit. Pones igitur mediam 1 positionem prima erit $\frac{6}{1 \text{ pos.}}$ & tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, quare hæc æquantur 10 , ducendo omnia in 6 positiones, habebimus 60 positiones, æquales 1 qd' qdrato p: 6 quadratis p: 36 , adde ex quinta regula, 6 quadrata utriq; parti, habebis 1 qd' qdratum p: 12 quadratis p: 36 , æqualia 6 quadratis p: 60 positionibus, nam si æqualibus æqualia addatur, tota fient æqualia, habent autem 1 qd' qdratum p: 12 quadratis p: 36 , radicem

& est, 1 quadratū p: 6 , quā si haberent 6 quadrata p: 60 positionib' iam

$1 \text{ qd' qd. p: } 6 \text{ qd. p: } 36$	$\text{æqualia } 60 \text{ pos.}$
6 qd.	6 qd.
$1 \text{ qd' qd. p: } 12 \text{ qd. p: } 36$	$\text{æqlia } 6 \text{ qd. p: } 60 \text{ pos.}$
2 pos.	$1 \text{ qd. p: } 12 \text{ pos.}$

haberemus negocium, sed non habent, addendi igitur sunt tot quadrati & numerus idem ex utraq; parte, ut in priore relinquatur trinomium habens radicem, in altero autem fiat, sit igitur numerus quadratorum

torum 1 positio, & quia, ut uides in figura tertiæ regulæ, c l & m k, fiunt ex duplo g c in a b, & g c est 1 positio, ponam numerum quadratorum addendorum semper 2 positiones, id est duplū g c, & quia numerus addendus ad 36, est l n m, & ideo quadratum g c cum eo quod fit ex g c duplicato in c b, seu ex g c in duplum c b, & est 12, numerus quadratorum priorum, ducam igitur 1 positionem, dimidium numeri qdratorum additorū, semper in numerum qdratorū priorū, & in se, & fient 1 qdratum p: 12 positionibus addenda ex alia parte, & etiam 2 positiones pro numero quadratorum, habemus igitur iterum ex communi animi sententia, quantitates infra scriptas, inuicem æquales, & utraq; habent radicem, prima ex regula tertia, sed secunda quantitas ex supposito, igitur ducta prima parte trinomi in tertiam, fit quadratum dimidiæ partis secundæ

$$\begin{array}{l} 1 \text{ qd' qd. p: } 2 \text{ pos. p: } 12. \text{ qd}^* \text{ p: } 1 \text{ qd. p: } 12 \\ \text{pos. additi numeri p: } 36 \text{ æqualia.} \\ 2 \text{ pos. } 6 \text{ qdratorū, p: } 60 \text{ pos. p: } 1 \text{ qd. p: } 12 \\ \text{pos. numeri additi.} \end{array}$$

trinomi, quia igitur ex dimidio secundæ in se, fiunt 900, quadrata, & ex prima in tertiam, fiunt 2 cubi p: 30 quadratis p: 72 positionibus quadratorum, similiter erit deprimendo per quadrata, quia æqualia per æqualia diuisa, producant æqualia, ut 2 cu. p: 30 quadratis p: 72 positionibus æquantur 900, quare 1 cubus p: 15 quadratis p: 36 positionibus æquantur 450.

Sufficit igitur deducendo ad regulam, habere semper 1 cubum p: numero priorum quadratorum, addita ei quarta parte p: numero positionum talī, qualis est numerus equationis primus, ut si habuerimus 1 qd' qdratum p: 12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p: 60 positionibus, habebimus 1 cubum p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, dimidio quadrati dimidiū numeri positionum, & si haberemus 1 qd' qdratum p: 16 quadratis p: 64 æqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p: 20 quadratis p: 64 positionibus æqualia 800, & si haberemus 1 qd' qdratum p: 20 quadratis p: 100, æqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p: 25 quadratis p: 100 positionibus æqualia 800, igitur hoc habito, in priore exemplo habuimus, 1 cub. p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, igitur rei æstimatio, per 17^m capitulum, est r: v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: r: $80449\frac{1}{4}$, p: r: v: cubica $287\frac{1}{2}$, m: r: $80449\frac{1}{4}$ m: 5, hic igitur est numerus quadratorū, qui duplicatus, est addendus ex utraq; parte, quia supponuntur 2 res addendæ, & numerus addendus ex utraq; parte, ex demonstratione, est quadratum huius, cum eo quod fit ex hoc in 12, numerum quadrato-

HIERONYMI CARDANI

rum, manifestum est autem, quod $\Re$ quadrata primi aggregati, semper est $\mathbf{1}$ quadratum p ; dimidio numeri quadratorum, absq; alio, id est p ; $\Re$ v : cubica $287\frac{1}{2}p$; $\Re$ $80449\frac{1}{4}p$; $\Re$ v : cub. $287\frac{1}{2}m$; $\Re$ $80449\frac{1}{4}p$; $\mathbf{1}$, & hoc quia dimidium prioris numeri quadratorum fuit 6 , & in addito trinomio fuit m ; 5 , igitur totum fuit, ut dixi, uerū reliqua pars, fuit quadrata $6p$; duplo huius numeri, igitur fuit numerus quadratorum $\Re$ v : cubica $2300p$; $\Re$ $5148752p$; $\Re$ v : cubica $2300m$; $\Re$ $5148752m$; 4 , & numerus rerum ex supposito fuit 60 , & numerus est (ut ostensum est) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipsius quantitatis, uerum quia ex supposito, ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidiij numeri rerum, igitur diuiso 900 quadrato dimidiij numeri rerum, per numerum quadratorum, exhibit numerus, quantitates igitur sunt hæ, ut uides, & quia latus $A G$ est compositū ex lateribus duorum quadratorū $A D$ & $D H$ di-

$$\begin{array}{c} \text{quadrata} \quad \Re v: \text{cubica } 2300p: \Re 5148752p: \Re v: \text{cubica } 2300m: \Re 5148752m: 4 \\ \text{res} \qquad \qquad \qquad 60 \end{array}$$

900

$$\text{numerus } \Re v: \text{cubica } 2300p: \Re 5148752p: \Re v: \text{cubica } 2300m: \Re 5148752m: 4$$

missis supplementis, erunt $\Re$ primæ & tertiæ harum quantitatum iunctæ inuicem, $\Re$ v : totius aggregati, quare $\Re$ primæ & tertiæ quantitates, æquantur $\mathbf{1}$ quadrato p ; $\Re$ v : cubica $287\frac{1}{2}p$; $\Re$ $80449\frac{1}{4}p$; $\Re$ v : cubica $287\frac{1}{2}m$; $\Re$ $80449\frac{1}{4}p$; $\mathbf{1}$, sed $\Re$ primæ quantitatis, est numerus rerum, quia est $\Re$ totidem quadratorum, & $\Re$ tertiæ quantitatis est numerus, quia tertia quantitas est numerus, habemus igitur $\mathbf{1}$ quadratum p : numero, æqualia rebus & numero, minue minorem numerum de maiore, accipiendo $\Re$, id est accipiendo $\Re$ denominatoris & numeratoris, habebis $\mathbf{1}$ quadratum p : hoc numero toto, m : numero in fra scripto æq̃lia numero rerū, huic scilicet, $\Re$ uniuersalissima $\Re$ v : cu-

$$\Re v: \text{cubica } 287\frac{1}{2}p: \Re 80449\frac{1}{4}p: \Re v: \text{cubica } 287\frac{1}{2}m: \Re 80449\frac{1}{4}p: 4$$

30

$$\Re v: m^2 \Re v: \text{cu. } 2300p: \Re 5148752p: \Re v: \text{cu. } 2300m: \Re 5148752m: 4$$

bicæ $2300p$; $\Re$ $5148752p$; $\Re$ v : cubica $2300m$; $\Re$ $5148752m$; 4 , nec refert, quod numerus ille sit compositus ex p ; & m : nam tantum refert dicere, $\mathbf{1}$ quadratum p ; 8 , æquatur 6 rebus, quantum dicere $\mathbf{1}$ quadratum p ; $10m$; 2 , æquatur 6 rebus, sequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in se, & auferendo numerum æquationis, in de residui sumendo $\Re$ uniuersalissimam, quam addes dimidio numeri re-

ri re-

ri rerum, & habebis rem quæ fuit media quantitatum proportiona-
lium quæſitorum.

QVÆSTIO VI.

Inuenias numerum, qui ſit æqualis radici ſuæ quadratæ, & dua-
bus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur ſi talis numerus fue-
rit cu' quadratum radix ſua quadrata neceſſario eſt 1 cubus, & duæ ra-
dices cubicæ ſunt 2 q̄d. igitur 1 cu' q̄dratum, æquabitur 1 cubo p: 2
q̄dratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̄d. erit
1 q̄d' q̄dratum æquale 1 poſitioni p: 2, poſui aut 2 radicibus cubicis,
quia cum regula ſit generalis, hoc tamē modo dupliciter ſolui poteſt,
ut patebit. Namq; ſi 1 q̄d' q̄dratum æquatur 1 poſitioni p: 2, igitur 1
q̄d' q̄dratum m: 1 æquabitur 1 poſitioni p: 1, nam ab æqualibus æqua-
lia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 poſitionem p: 1, commu-
nem diuiſorem, habebis 1 cubum m: 1 q̄drato p: 1 poſitione m: 1, æ-
qualia 1, igitur 1 cubus p: 1 poſitione,
æquatur 1 quadrato p: 2, igitur ex 18^o
capitulo, rei æſtimatio eſt R̄ v: cubica R̄
 $\frac{2241}{2916} p: \frac{47}{54} m: R̄ v: cub. R̄ \frac{2241}{2916} m: \frac{47}{54} p:$
 $\frac{1}{3}$, & cu' q̄dratū huius eſt numerus quæ-
ſitus, cuius R̄ quadrata, & 2 radices cu-
bicæ ſunt illi æquales, & tales radices ſunt duplum quadrati huius
quantitatis cum ſuo cubo.

1 q̄d' q̄d. m:	1
1 poſ. p:	1
1 poſ. p:	1
1 cu. m: 1 q̄d. p: 1 poſ. m:	1

At regula generali ſic faciemus quia enim 1 q̄d' q̄dratum æqua-
tur 1 poſitioni p: 2, addemus ad utramq; partem, 2 poſitiones quadra-
torum, cui ſubſcripſimus q̄d. ut intelligas non eſſe ex genere priorum
denominationum, ſed eſſe poſitiōes
quadratorū, igitur numerus adden-
dus, eſt 1 quadratum numeri q̄dra-
torum, & hoc eſt, ut in tertia regula
huius capituli, quadratum D F, nam
hic additio ſupplementorum eſt ut
D C, A C, D E, ad quadratū ſimplex
A D, igitur ſufficit addere quadratū
D F, abſq; additione ſuperficierum

1 q̄d' q̄d. p: 2 poſ. p: 1 q̄d.	
numeri q̄d. numeri q̄d.	
2 poſ. p: 1 poſ. p: 2 p: 1 q̄d.	
numeri q̄d. numeri q̄d.	
$\frac{1}{4}$ q̄d. 4 poſ. p: 2 cub.	
numeri q̄d.	
$\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p: 4 poſ.	
$\frac{1}{8}$ æq̄tur 1 cu. p: 2 poſ.	

F L & M N, quæ erant neceſſariæ in exemplo quintæ quæſtionis, quia
igitur additis 2 poſitionibus p: 1 quadrato numeri quadratorum, ad
1 poſitionem p: 2, ſit totum 2 poſitiones numeri q̄dratorum p: 1 poſ.
p: 2, p: 1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, oportet
ut quadratum dimidiæ mediæ quantitatis, quæ eſt 1 poſitio, æque-

etur ductui extremorum, igitur $\frac{1}{4}$ quadrati, æquabitur quadrato, 2 cuborum p: 4 positionibus numeri prioris, quare abiectis quadratis utrinque, fiet $\frac{1}{4}$ æqualis 2 cubis p: 4 positionibus, & $\frac{1}{8}$ æqualis 1 cubo p: 2 positionibus, quare rei æstimatione est R: v: cubica R: $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: R: v: cubica R: $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, hic igitur est numerus quadratorum addendus utrique parti, & duplicatur, & quadratum huius erit numerus addendus ad utramque partem, & gratia clarioris intelligentie apposui hic.

Prima 1 qd' qd. p: qd. R: v: cu. R: 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: R: v: cu. R: 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero R: v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: R: $\frac{2075}{442368}$ p: R: v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: R: $\frac{2075}{442368}$ m: $1\frac{1}{3}$.

Secunda qd. R: v: cu. R: 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: R: v: cu. R: 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: 1 pos. p: numero R: v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: R: $\frac{2075}{442368}$ p: R: v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: R: $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$.

Manifestum est igitur, quod R: primi, est 1 qd. p: R: v: cubica R: $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: R: v: cubica R: $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, & radix secundi, est res R: v^{ma} R: v: cubica R: 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: R: v: cu. R: 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero R: v^{ma} R: v: cubica $\frac{1051}{3456}$ p: R: $\frac{2075}{442368}$ p: R: v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: R: $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ & hoc, ut dixi, qd' latus A d qdrati, componitur ex A B & B C, lateribus qdratorum extremorum, absque commemoratione supplemendorum. Manifestum est etiam, quod numerus, qui est cum 1 qd. est minor numero qui est cum rebus, igitur habebimus 1 qdratum æque rebus R: v^{ma} R: v: cubica R: 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: R: v: cu. R: 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero, hoc R: v^{ma} R: v: cubica $\frac{1051}{3456}$ p: R: $\frac{2075}{442368}$ p: R: v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: R: $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: R: v: cu. R: $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: R: v: cu. R: $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$. Quare ducemus dimidium numeri rerum in se, & est, ut ducamus totum in se, & fit idem, dempta R: v^{ma}, de inde accipiemus quartam partem producti, & est dimidium ultimæ R: v: quæ est m: supra posita, ideo addita, relinquetur numerus totus compositus R: v^{ma} R: cu. v: $\frac{1051}{3456}$ p: R: $\frac{2075}{442368}$ p: R: v: cub. $\frac{1051}{3456}$ m: R: $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: R: v: cu. R: $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: R: v: cu. R: $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, & radix huius totius v^{ma}, addita dimidio numeri rerum, id est huic numero R: v^{ma} R: v: cubica R: $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: R: v: cu. R: $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, constituit rem.

Et si dixisset, quod numerus propositus equaretur radici quadratæ & cubicæ pariter acceptis, non potuisset solui, nisi hoc secundo modo, per regulam generalem. Deducere autem æstimationes æquales ad idem, ut primam æstimationem ad secundam, iam te docui in libro quantitatum irrationalium, quamvis sit difficillima operatio, & ideo complementum in his operationibus, est quasi extremum, ad quod peruenit perfectio humani intellectus, uel potius imaginationis, in hoc enim cognosces illorum differentiã.

Q V A S

QVÆSTIO VII.

Si quis igitur dicat, inuenias numero qui ductus in $\sqrt[3]{}$ cubicam suam $p:6$, faciat 64, dices igitur, posito eo numero 1 cubo, habebimus 1 $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ dratum $p:6$ cubis æqualia 64, quare per septimam transmutandi regulam septimi capituli huius habebimus 1 $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ d. æquale 6 rebus $p:4$, unde habita æstimatione ex hoc capitulo per nonam regulam eiusdem capituli, habebimus intentum. Et quibusdam adeo uidebuntur difficiles hæ operationes, ut uix eas ueras esse credant, nos autem ostendimus modum, quo quantitates istæ irrationales æquiuales numeris, ad numeros reducantur, & dedimus demonstrationē utramq; & Geometricam à causa, & Arithmetica ab effectu.

QVÆSTIO VIII.

Fac ex 6 tres partes proportionales, quarum quadrata primæ & secundæ iuncta simul faciant 4, ponemus primam 1 positionem, quadratum eius est 1 quadratum, residuum igitur ad 4, est quadratum secundæ quantitatis, id est 4 $m:1$ quadrato, huius radicem, & 1 positionem detrahe ex 6, habebis tertiam quantitatem, ut uides, quare ducta

prima in tertiam, habebis 6 positiones $m:1$ quadrato $m:\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ $v:4$ quadratorum $m:1$ $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ d. equalia 4 $m:1$ $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ drato secundæ, abijce 1 $\sqrt[3]{}$ drato

1 pos. $v:\sqrt[3]{}$ 4 $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d. 6 $m:1$ pos. $m:\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ $v:4$ $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d.
6 pos. $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d. $m:\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ $v:4$ $\sqrt[3]{}$ d. $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ d.
4 6 pos. $m:\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ $v:4$ quad. $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ d.
6 pos. $m:4$ æqual. $\sqrt[3]{}$ $v:4$ quad. $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ d.
36 quad. $p:1$ 6 $m:48$ pos. æquantur
4 quad. $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ d.
32 quad. $p:1$ 6 $p:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ d. æqualia 48 pos.
1 $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ d. $p:32$ quad. $p:256$ æqualia 48
pos. $p:240$

rum m : ex partibus, habebis 4 equalia 6 positionibus $m:\sqrt[3]{}$ $\sqrt[3]{}$ $v:4$ quad. $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ drato, quare 6 positiones $m:4$ æquantur $\sqrt[3]{}$ $v:4$ quadratorum $m:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ drato, quare quadrata horum etiam æqualia sunt, à quibus abijce 4 quadrata cōmunia, ex utraq; parte, habebis tandem 32 quadrata $p:1$ 6 $p:1$ $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ drato, æqualia 48 positionibus, quare addendo 240 utriq; parti, id est residuum quadrati dimidiij numeri quadratorum, habebis 1 $\sqrt[3]{}$ d' $\sqrt[3]{}$ dratum $p:32$ quadratis $p:256$, æqualia 48 positionibus $p:240$, addes igitur 2 positiones quadratorum $p:1$ quadrato $p:32$ positionibus numeri quadratorum utriq; parti, prima igitur pars habent radicem necessario, & quia uolumus secundam etiam habere, quæ est 2 positiones quadratorum $p:48$ positionibus, ex prioribus

bus p: 1 quadrato p: 32 positionibus numeri quadratorum p: 240, du-
cemus primam partem trinomi in tertiam ut uides, & dimidium se-
cundæ in se, & fient 576 quadrata æqualia 2 cub. p: 64 quadratis p:
480 pos. quadratorū igitur 288 æquantur 1 cubo
p: 32 quadratis, p: pos. 240, quare per 17 capitu-
lum huius, habebimus 1
cubum æqualē 101 $\frac{1}{3}$ res-
rum p: 420 $\frac{16}{27}$, inde habita huius estimatione per suum capitulum, mi-
nue 10 $\frac{2}{3}$, tertiam partem numeri quadratorum, ut in eo 17° capitulo
habes, & consurgit rei fictæ æstimatione, habebis igitur 1 quadratū p:
16 p: dicta æstimatione, ex una parte, æqualia rebus quæ sunt & du-
pli æstimationis inuentæ p: & aggregati ex quadrato dictæ æstima-
tionis, & eadem estimatione ducta per 32, & 240 numero addito, hoc
autem ut liquet, est minus priore numero, quia si loco 240 adderen-
tur 256, essent æquales, igitur 1 quadratum p: æstimatione inuenta p:
16 m: & v: illa trium quantitatū, id est quadrati æstimationis cum
eadem ducta per 32, & cum 240 tanq̃ uno numero, æquantur rebus
quæ sunt secundum radicem dupli æstimationis inuentæ, quod est
propositum.

QVÆSTIO IX.

Inuenias numerum, cuius q̃d' q̃dratum, cum quadruplo sui, & 8
æquetur decuplo sui quadrati, dicemus igitur 1 q̃d' q̃dratum p: 4 pos.
p: 8, æquantur 10 quadratis. Quare semper positiones dabimus qua-
dratis, & auferemus à q̃d' q̃drato, &
habebimus 1 q̃d' q̃dratū p: 8, æqua-
le 20 quadratis m: 4 positionibus, &
quia uidemus numerum quadrato-
rum esse magnum, & rerum paruū,
ideo conabimur minuere numerum
quadratorum potius, quàm augere,
& faciemus ut diminutio sit ex utra-
que parte 2 quad. nam à minori imò
à 2 quadratis semper fermè est inci-
piendū, quia non oportet ut uenias
ad m: quad. ex parte rerum, quia
sic non haberent radicem, subductis
igitur 2 quadratis ex utraq̃ parte,
habebis

$$\begin{array}{r}
 576 \mid \text{quad.} \\
 2 \text{ pos. p: } 48 \text{ pos. p: } 1 \text{ qd. p: } 32 \text{ pos. p: } 240 \\
 \text{quad.} \qquad \qquad \qquad \text{numeri quad.} \\
 \hline
 2 \text{ cub. p: } 64 \text{ quad. p: } 480 \text{ pos.} \mid \text{qd.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \text{ qd' qd. p: } 4 \text{ pos. p: } 8 \\
 10 \text{ qd.} \\
 \hline
 1 \text{ qd' qd. p: } 8 \mid 10 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos.} \\
 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ qd. p: } 8 \\
 8 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos.} \\
 \hline
 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ qd. p: } 1 \\
 8 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos. m: } 7 \\
 \hline
 2 \text{ pos.} \mid 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos.} \\
 \hline
 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ pos. m: } 2 \\
 \text{qd. p: } 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos. p: } 1 \\
 8 \text{ qd. m: } 2 \text{ pos. qd. m: } 4 \\
 \text{pos. p: } 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos. m: } 7
 \end{array}$$

habebis 1 q̄d'q̄dratum
m: 2 quadratis p: 8, æ-
qualia 8 quadratis m:
4 positionibus, clarum
est aut, quod si 1 q̄d'
q̄dratum m: 2 quadra-
tis debet habere radi-
cem, oportet ut nume-
r⁹ sit p: 1, sed erat p: 8,

8 m: 2 pos. q̄d. 4 pos. 1 q̄d. p: 2 pos. m: 7	
4 quad.	8 m: 2 pos.
8 q̄d. p: 16 pos. m: 56 m: 2 cu. m: 4 quad.	
p: 14 pos. quad.	
4 quad. p: 30 pos. 60 p: 2 cub.	
1 cub. p: 30 æquatur 2 quad. p: 15 pos.	
pos. 2	

igitur oportebit auferre 7 ex utraq; parte, habebimus igitur 1 q̄d'q̄dratum m: 2 quadratis p: 1, æquale 8 quadratis m: 4 positionibus m: 7, addemus igitur per m: ut dictum est, 2 positiones quadratorum ad reliqua 2 q̄drata m: ex regula, & addemus per p: ut in eadē, ad nume-
rum 1 q̄dratū p: 2 positionibus ex utraq; parte, quare habebimus par-
tes æq̄les, quæ enim adduntur & minuuntur sunt æq̄lia, igitur 8 m: 2
positionibus quadratorum m: 4 positionibus, p: 1 quadrato p: 2 posi-
tionibus m: 7 numeri, habent radicem, multiplicando igitur primam
partem, quæ est 8 m: 2 positionibus quadratorum, in tertiam, quæ est
1 quadratum p: 2 positionibus m: 7, fit illud quod uides à latere, pro
numero quadratorum, & hoc æquale esse debet 4 quadratis, qui est
numerus productus, ex dimidio mediæ partis in se, quare abijciendo
quad. utrinq;, fiet illud multinomium, æquale 4, quare tandem redu-
ctis partibus ad suas consimiles erunt 2 cubi p: 60, æquales 4 quadra-
tis p: 30 positionibus, & 1 cubus p: 30, æqualia 2 quadratis p: 15 po-
sitionibus, quare res ualet 2, uel per capitulum, uel etiam solo sensu ex-
periendo.

Circa quod notanda sunt tria. Primum, quod reduxi rem ad ex-
perimentum in numeris, ut uideres ueritatem rei facilius, stultum est
enim semper difficultatem addere difficultati, secundum, quod 1 cu-
bus p: 30 equalis 2 q̄d. p: 15 rebus, habet aliam rei estimationē quàm
2, quæ cognita est ex suo capitulo, sed pro nunc ne operatio longior
euadat, eam relinquimus. Tertium notandum est, quod tu uides, de-
monstrationem sic tenere in m: sicut in p: & quod numerus semper est
addendus necessario, quia confurgit ex quadrato numeri quadrato-
rum cum numero quadratorum priorum, seu quadrata sint adden-
da seu minuenda, ducto in dimidium numeri quadratorum minuen-
dorū. Hoc stante, diximus quod rei æstimatio est 2, & addendæ sunt
2 res per m: quadratorū, igitur minuemus 4 quadrata ex utraq; par-
te, habebimus igitur 1 q̄d'q̄dratum m: 6 q̄dratis p: 1, æqualia 4 qua-
dratis

dratis m:4 positionibus m:7, pro numero autem addendus est quadratus numeri dimidij quadratorum detractorum, & hoc dimidium est 2, quadratū cuius est 4, & similiter productum ex numero priorum quadratorum in rei æstimationem, quod productum est 4, igitur addemus 8 utriq; parti, & fient tandem ut uides, 1 qd' qdratum m: 6 qdratis p: 9, æqualia 4 qdratis m:

4 positionibus p: 1, manifestum est autem quod ambo hæc habent radices duplices, ut uides, sed facta reductione ueniunt necessario ad duo capitula, uel 1 qdratum æquale 2 positionibus p: 2, uel 1 quadratum p: 2 positionibus æqualia 4, horū capitulorum æstimationes sunt R

3 p: 1, & R 5 m: 1, dico igitur quòd in æstimationibus 1 qd' qdrati p: 4 positionibus p: 8, æquantur 10 quadratis, cuius probationis experimentum habes à latere dilucidum, ut patet, non declaro autem, an facta alia positione perueniremus ut dixi, cum 1 cubus p: 30, equabatur 2 quadratis p: 15 rebus, ad alias duas æstimationes, sed si te delectat operatio, per te ipsum potes illud inquirere.

Q V Æ S T I O X.

Inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum sit 8, & quadratum tertij, sit æquale aggregato ex quadratis primi & secundi, ponemus eos per primam regulam 1, 1 pos. 1 quad. erunt igitur quadrata 1, 1 quadratum, 1 qd' qd. igitur 1 qd' qd. æquatur 1 qdrato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorum 24°, habebimus rei æstimationem R v: R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia quantitas, est eius quadratum, scilicet R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & prima fuit 1, igitur totum aggregatum est 1 $\frac{1}{2}$ p: R 1 $\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ qd' qd. m: } 2 \text{ qd. p: } 1 \\ \text{m: } 4 \text{ quad. p: } 8 \\ \hline 1 \text{ qd' qd. m: } 6 \text{ qd. p: } 1 \\ 8 \text{ quad. m: } 4 \text{ pos. m: } 7 \\ \text{m: } 4 \text{ quad. p: } 8 \\ \hline 4 \text{ qd. m: } 4 \text{ pos. p: } 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ qd' qd. m: } 6 \text{ qd. p: } 9 \text{ —} \\ 4 \text{ quad. m: } 4 \text{ quad. p: } 1 \text{ —} \\ \hline 1 \text{ quad. m: } 3 \\ 3 \text{ m: } 1 \text{ quad.} \\ \hline 2 \text{ pos. m: } 1 \\ 1 \text{ m: } 2 \text{ pos.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ qd. æqual. } 2 \text{ pos. p: } 2 \\ 1 \text{ qd. p: } 2 \text{ pos. æqual. } 4 \\ \hline R 3 \text{ p: } 1 \\ R 5 \text{ m: } 1 \end{array}$$

p ² æstimatio	2 ² æstimatio
res R 3 p: 1	res R 5 m: 1
quad. 4 p: R 12	quad. 6 m: R 20
qd' qd. 28 p: R 768	qd' qd. 56 m: R 2880
4 res R 48 p: 4	4 res R 80 m: 4
qd' qd. R 768 p: 28	qd' qd. m: R 2880 p: 56
p: 8	p: 8
aggreg. R 1200 p: 40	aggreg. 60 m: R 2000
10 quad. 40 p: R 1200	10 qd. 60 m: R 2000

$1 \frac{1}{4} p : R : V : R : 1 \frac{1}{4} p : \frac{1}{2}$, hoc aut non est
8, ut propositum est, dic igitur per regu-
lam trium quantitatū, si $1 \frac{1}{2} p : R : 1 \frac{1}{4}$
 $p : R : V : R : 1 \frac{1}{4} p : \frac{1}{2}$ esset 8, qd esset 1 pri-
ma quantitas: duc 8 in 1, fit 8, diuide 8

1	p^2
$\frac{1}{2} p : R : 1 \frac{1}{4}$	3^2
$R : V : R : 1 \frac{1}{4} p : \frac{1}{2}$	2^2
$1 \frac{1}{2} p : R : 1 \frac{1}{4} p : R : V : R : 1 \frac{1}{4} p : \frac{1}{2}$	

per $1 \frac{1}{2} p : R : 1 \frac{1}{4} p : R : V : R : 1 \frac{1}{4} p : \frac{1}{2}$, & exit 4 p : R : V : R : 500 p : 10 m : R : V :
R : 920 p : 18, & hæc est prima quantitas, qua habita si duxeris eam
per R : $1 \frac{1}{4} p : \frac{1}{2}$, habebis tertiam quantitatem, quā si duxeris denuo in
primam quantitatem ultimo inuentarum, R v^{m^2} producti, est secunda
quantitas, & ne mireris quod tertiam quantitatem præponam secun-
dæ in operatione, quia est longe simplicior.

QVÆSTIO XI.

Si quis dicat, inuenias numerum, qui ductus in R suam cubicam
m:3, faciat 64. Pones illum 1 cubum, igitur ductus in R cubicam m:3
producit 1 qd' qdratum m:3 cubis, æqualia 64, igitur 1 qd' qdratum
m:3 cubis, æquatur 64, dico quod possumus soluere modo septimæ
quæstionis, & etiam alio modo, sine transmutatione, quo potest etiam
solui septima quæstio, & facilius, sed uolui docere ambos modos, ut
melius scires operari, debes igitur scire duo. Primum, quod ut res de-
bent semper manere ab alia parte, à qua est numerus cum quadratis,
& non à parte qd' qdrati, sic cubi, seu p: seu m: debent manere cū qd'
qdrato. Secundum, quod ut numerus rerum nunq̃ debet uariari, sic
nec numerus cuborū. Et possumus addere tertium his, scilicet, quod
ubi sunt res, peruenimus ad 1 qd' qdratum p: quad. p: numero, æqua-
lia quad. rebus p: uel m: & numero p: sic hic peruenimus ad qd' qdra-
tum p: quad. p: numero, æqualia qd' qd. cubis p: uel m: & quad. p:
Hoc intellecto, sic soluitur quæstio, addes ad numerum 2 positiones
qdratorū, igitur ducto eius dimidio in se, fit 1 qdratum numeri qua-
dratorum quadratorū, diuiso igitur eo per 64, habes $\frac{1}{64}$ qd. numerū

qd' qdratorū, quare uides, qd
addidisti ad hæc

$\frac{1}{64}$ qd. p: 1 m: 3 cu. p: 2 pos.	$\frac{1}{64}$ qd. 2 pos. 64
$\frac{1}{64}$ qd' qd.	qd.
	$\frac{1}{64}$ qd' qd. qd.

bendam radicem $\frac{1}{64}$ quad. pro numero qd' qd. & 2 positiones pro
numero quad. igitur addes eadem ad 1 qd' qdratum m: 3 cubis, &
habebis $\frac{1}{48}$ quadrati p: 1, pro numero qd' qd. & m: 3 cubis & 2 posi-
tionibus, pro numero quad. igitur ad hoc ut habeat radicem, oportet
ut extrema inuicem ducta, producant, quantum dimidiū mediæ quan-
titatis in se, est autem dimidium $1 \frac{1}{2}$ cubi, quod ductum in se, producit
 $2 \frac{1}{4}$ cu' quadrata & $\frac{1}{64}$ quadrati p: 1 numeri qd' qd. in 2 positiones nu-

meri quad. producit $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus numeri cu' quadrati, nā qd' qdratum in quadratum, producit cu' quadratum, habes igitur $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus numeri cu' qd. æqualia $2\frac{1}{4}$ cu' qdratis, igitur ut cu' qdratum, ad cu' qdratum in æqualitate, sic numerus ad numerum, quare $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus, æqualia $2\frac{1}{4}$, quare 1 cubus p: 64 positionibus æqualia 72, quare rei æstimation, p: R: v: cubica R: 11005 $\frac{1}{27}$ p: 36, m: R: v: cubica R: 11005 $\frac{1}{27}$ m: 36, & duplum huius pro qdratis addetur utriq; parti, radix igit, ex una parte est 8 p: rebus sub numero æstimationis rei, ex alia aut qdrata sub numero R: v: $\frac{1}{64}$ qdrati, huius æstimationis addito 1, m: positionibus sub numero R: dupli huius æstimationis.

QVÆSTIO XII.

Si quis dicat, 1 qd' qdratum p: 3, æquatur 12 rebus, addes 2 positiones quadratorum, & 1 quadratum numeri quadratorum, quare sic habebit R: quadratam sine numero ut clarum est, igitur addemus ex alia parte pro numero quadratorum 2 positiones, & pro numero

1 quad. m: 3 habebis partes ut uides, quare multiplicatis partibus, habes 2 cubos æ-

1 qd' qd. p: 3 12 pos.			
2 pos. quad. p: 1 quad. m: 3			
1 qd' qd. p: 2 pos. p: 1 qd.	2 pos.	12	1 qd. m: 3
1 qd' qd. p: 6 quad. p: 9	6 quad. p: 12 pos. p: 6		

quales 6 rebus p: 36, & 1 cubum, æqualem 3 rebus p: 18, & res ualet 3, igitur partes sunt ut uides, & erit 1 quadratum p: 3, R: primæ partis, æqualis rebus R: 6 p: numero R: 6, & res quæsita erit, R: v: R: 6 m: 1 $\frac{1}{2}$ p: R: 1 $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias numerum, cuius qd' qdratum cum duplo cubi, sit 1 p: ipso numero, igitur dices, 1 qd' qdratum p: 2 cubis æquantur ad 1 positionem p: 1, hic non datur locus radici subtrahendæ, nec diuisioni. Sed dices ex prima regula, inuenias tres numeros proportionales, quorum aggregatum ad aggregatum secundi & tertij eandē habeāt rationem, quam aggregatum secundi & tertij ad primum. Pones igitur eos 1, 1 pos. 1 quad. habebis igitur 1 qd' qdratum p: 2 cubis p: 1 quadrato, æqualia 1 quadrato p: 1 positioni p: 1, quare abiecto 1 quadrato communi, habebimus 1 qd' qdratum p: 2 cubis, æqualia 1 positioni p: 1, ergo iam scimus rationem quantitatum, quia uero ex aggregato in primam, sit quadratum aggregati secundæ & tertiæ, igitur tale aggregatum est diuisum secundum proportionem habentem medium & duo extrema, & eius minor portio est 1, igitur residuum (& est maior portio) est R: 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & hoc equatur (ut supponitur) 1 qdrato p: 1 positione, igitur quantitates sunt ut uides.

Mediæ

Mediæ igitur quantitatis (quæ est res) 1 qd' qdratum p: 2 cubis æquantur ipsi quantitati p: 1, id est $R: V: R: 1 \frac{1}{4} p: \frac{3}{4} p: \frac{1}{2}$, & per hæc intelligis modos harū regularū, si exempla hæc diligenter cum suis operationibus animaduertas.

	prima	1
2 ^a res	$R: V: R: 1 \frac{1}{4} p: \frac{3}{4} m: \frac{1}{2}$	
3 ^a qd.	$R: 1 \frac{1}{4} p: 1 m: R: V: R: 1 \frac{1}{4} p: \frac{3}{4}$	

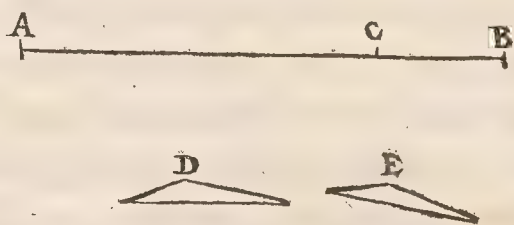
De modis suppositionum generalium ad artem maiorem
pertinentibus & regulis quæ extra ordinem sunt,
ac æstimationibus diuersi generis ab his quæ
dictæ sunt. Cap. XL.



Vm fuerit cubus æqualis quadratis & numero, si ab æstimatione illa detrahatur, numerus quadratorum, relinquetur æstimatio cubi & totidem quadratorum, equalium numero existenti in proportionem eadem cum numero primæ æquationis in qua est ipsa secunda æquatio seu æstimatio ad primam æstimationem. Exemplum, cubus æquatur 2 quadratis p: 1 $\frac{17}{64}$, & æstimatio est $2 \frac{1}{4}$, dico, quod si abijcias 2 numerum quadratorū relinquetur $\frac{1}{4}$, æstimatio cubi & 2 quadratorum, æqualium $\frac{9}{64}$, qui numerus est in eadem proportionem cum 1 $\frac{17}{64}$ numero prioris æquationis, in qua est $\frac{1}{4}$ æstimatio secunda, ad $2 \frac{1}{4}$ primam æstimationem, cuius demonstratio sit hæc.

DEMONSTRATIO.

Ponatur A B æstimatio prima, & A C numerus quadratorum, & erit B C æstimatio alicuius cubi & quadratorum, secundum A C numerum æqualium alicui numero, qui sit E, ponatur uero D numerus, qui cum quadratis A B secundum numerum A C æquetur cubo A B, quia igitur cubus A B æquatur producto ex A C & C B in quadratum A B, itemq; producto ex A C in quadratū A B cū numero D, erit D æqualis producto C B in A B quadratum, & similiter cubus C B cum producto A C in quadratum C B, æquatur E numero, & æquatur etiam producto ex A B in quadratum B C, igitur productū A B in quadratum B C, æquatur E, uerum producti B C in quadratum A B, ad productum A B in quadratum B C, ut A B ad B C ex demonstratis in septimo super Euclidem, proportio igitur D ad E, ut A B ad B C, quod erat probandum, similiter sequitur, permutando proportionem æquationum numerorum ad suas æstimationes easdem esse, cum æstimationum differentia fuerit numerus quadratorum.



V 3

Cum

- 2^a Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, item cubus æqualis totidem quadratis eidemq; numero, erit proportio aggregati ex prima æstimatione & numero quadratorum, ad residuum, quod fit detracto à secunda æstimatione numero quadratorum, ut secundæ æstimationis ad primam duplicata, uelut si dicam, cubus & 3 quadrata, æquantur 20, & cubus æquatur 3 quadratis p: 20, in prima æstimatione rei est 2, in secunda est R: V: cubica 11 p: R: 120 p: R: V: cubica 11 m: R: 120 p: 1, dico quod si addas 3 numerum quadratorum, ad 2 primam æstimationem (& fiet 5) & minuas idem 3, ex secunda æstimatione (& fiet R: V: cu. 11 p: R: 120 p: R: V: cu. 11 m: R: 120 m: 2) quod proportio 5 ad hanc radicem, est uelut R: V: cubica 11 p: R: 120 p: R: V: cubica 11 m: R: 120 p: 1, æstimationis secundæ, ad 2 æstimationem primam, duplicata, cuius rei est demonstratio hæc.

DEMONSTRATIO.

Sit æstimatio prima B C, secunda A B, numerus quadratorum communis, A D, quia igitur cubus A B, æqualis est productis A D & D B in quadratum A B, & A B est numerus quadratorum, erit productum ex D B in quadratum



A B, æquale numero æquationis, quare & cubo B C cum producto A D in quadratum B C, igitur quod ex B D in quadratum A B, æquale est ei, quod ex aggregato A D & C B in quadratum C B, igitur ex 34^a 11ⁱ & 7^a 6ⁱ elementorum, A D & C B, iunctorum, ad B D, uelut A B ad B C, ratio seu proportio duplicata.

- 3^a Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, conuertetur capitulum in capitulum rerum æqualium cubo & numero, & æstimatio secunda semper est addenda uel detrahenda tertiæ parti numeri quadratorum, ut habeatur prima, & modus est, sume differentiam numeri æquationis propositi, & dupli cubi tpqd. & eā pone pro numero, qui cum cubo æquatur rebus totidem, quotus est numerus, qui est tertia pars quadrati numeri quadratorum, ergo inuenta secunda æstimatione, pro habenda prima, addes eā tpqd. si numerus fuit maior duplo cubi tpqd. uel minues, si numerus fuit minor duplo cubi tpqd. & conflatum uel residuum, est æstimatio prima.

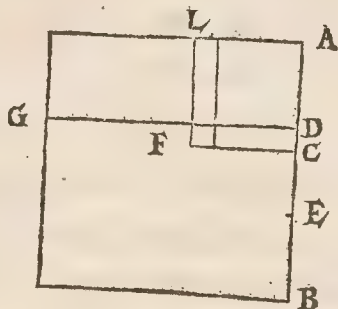
Exemplum, Cubus & 80, æquantur 9 quadratis, dupla cubum 3, qui est tpqd. fit 54, differentia cuius ab 80 est 26, igitur cubus p: 26, æquabitur 27 rebus, est autem 27 tertia pars quadrati 9, igitur æstimatio secunda est 1, quæ addita ad 3 tpqd. constituit 4, æstimationem primam, quia numerus qui est 80, est maior duplo cubi tpqd. quod est 54.

Aliud exemplum, Cubus p: 5, æquatur 6 quadratis, duc 6 in se fit 36,

fit 36, huius tertia pars est 12, numerus rerum, inde detrahe 5, numerū æquationis, ex 16 duplo cubi 2 tpqd. & relinquitur 11, igitur 1 cub. p: 11, æquatur 12 rebus, æstimatio autem est 1, detrahe igitur 1 ex 2 tpqd. quia numerus est minor duplo cubi tpqd. relinquitur æstima- tio cubi p: 5 æqualis 6 quad.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio autem huius est, ponatur AB numerus quadrato- rum 9, AC æstimatio rei, cuius cubus p: 80 æquatur AB ductæ in AF quadratum AC, & sit AD tertia pars AB, & si- militer DE & EB & AG superficies æquidi- stantium laterum, & tertia pars quadrati AB ex prima 6ⁱ, quia igitur ex BA in AC, fit cubus AF p: 80, erit quod ex BC in AF 80, quod igi- tur ex BD in AF, 80 p: eo quod ex CD in AF, detracto igitur quod ex BD in AH, & est du- plum cubi AD, fiet quod ex BD in gnomonē, 26 p: eo quod ex CD in AF, at quod ex BD in gnomonem, æquale est quadruplo CD in quadratum AH, & duplo AD in quadratum HF, eo quod lineæ BE, ED, DA, DH, & reliquæ supplementorum sunt æquales inuicem, quadruplum igitur CD in quadratum AH cum duplo AD in quadratum HF, æquatur 26 p: eo quod ex CD in FA, at ex CD in FA, fit cubus CD, & duplum AD in quadratum FH, & CD in quadratū AH semel, igitur ablato eo quod ex CD in quadratum AH semel, & ex AD in quadratum HF bis, utrinq; erit triplum CD in AH, æquale cubo CD p: 26, at quod ex CD in AH ter, æquale est ei, quod ex CD in AG semel, cum DH sit tertia pars DG, igitur quod ex CD in AG tertiam partem quadrati AB, æquale est cubo ipsius CD p: 26.



Cum quæstionis solutio ad multitudinem denominationum per- 4^a
uenerit, solutio plerunq; sperari potest, nam ex mala tractatione sæ-
pius hoc euenit, unde ad pauciores & notas denominationes dedu-
cta soluitur, & generaliter. At cum ad capitulum paucarum sed inæ-
qualium denominationū peruenerit, quæstionis solutio, nunq; genera-
liter ad cognitionem perueniet, cum semper in id incidat capitulum,
quod uniuersalem æstimationis inueniendæ regulam non habet, ue-
lut si ad capitulum Rⁱ Pⁱ, quadratorum, rerum ac numeri deuenierit.

Cum uero hoc in omnibus, tum maxime in Geometricis quæstio- 5^a
nibus, quæ graues sunt, plurimum conferre solet, ut præuias alias, ac
minus difficiles quæstiones soluas, huius libri auxilio, demum in regu-
las de modo solutiones has contrahes, inde illarum auxilio pedeten-

tim procedens per positionis præcepta & regulas, ad aliquod tandem horum capitulorum notorum peruenies, ex quo dilucida solutio apparebit.

6^a Præter has autem æstimationes, aliæ quædam emergunt, quarum numerus est infinitus, nec ullius earum generalis est usus, uerum quæ maxime sunt frequentes, tribus modis fiunt. Aut em̃ regula particulari, ut in sexto libro ostensum est. tum magis in capitulis omnibus quantitatũ continue proportionalium, ut facile est experiri. Aliæ autem ex iterata regularum uel capitulorum operatione, Vel mixtione, ut cum ad quæsitæ solutionem pluribus capitulis, uel regulis indigemus. Exemplum habes, præter reliqua, in quarta quæstione capituli 35ⁱ huius libri, ubi eam quæstionem ad finem deduxeris, & expressius etiam in secunda quæstione 31, capituli huius. Tertio modo habebis uarias æstimationes, cum capita uel regulas non in numeris, sed iam uariatis æstimationibus exercueris, ut si dicam, fac ex $R: 2$ ultimi 8 m: $R: 2$, duas partes, ex quarum ductu in radices alterius mutuo fiant numeri, qui iuncti inuicem faciant 4, operatio perueniet ad absolutam quantitatem.

7^a Natura producti ex partibus numeri in R quadratam uel cubam uel alterius generis partis reliquæ, est de genere cubi, uel qd' qdrati, excepto quod quantitas sumenda est proximior maxime, non minori. Exemplum, si quis dicat, fac ex 10 duas partes, quarum productum unius in quadratum alterius faciat 9, & postmodum uelis dicere, fac ex aliquo numero duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat 18, tunc uides quod talis productio est ex genere cubi, quia igitur, si proportio esset eadem, fieret hoc ex 20, quod est duplum 10, ut 18 est duplum 9, at quia est ex genere cubi, inueniemus duos terminos proportionales inter 10 & 20, & sunt R cubica 2000 & R cubica 4000, igitur numerus quæsitus est R cubica 2000, nam una pars est R cubica 2

9	18
10	20
R cu.	R cu.
2000	4000

alia R 1458, ducta R cubica 1458 in quadratum R cub. 2 fit R cubica 5832, quæ est 18. Dico igitur quod si dixisset, ut facias de 10 duas partes, ex quarum mutua multiplicatione in R alterius fiat 12, quod hæc habet rationem cubicam, unde si diceremus, inuenias numerum ex cuius ductu uicissim partium in mutuas radices fiat 24, & uelis ex primis partibus inuenire alias, tunc inter 10 & 20 eadem ratione, qui se habent ut 9 & 18, accipies in ratione cubica duos terminos medios proportionales, & maior illorum qui est R cubica 4000, est terminus quæsitus, nam una

pars

pars est & cubica 4, alia & cubica 2916, duc uicissim in & quadratam alterius fiunt & cubica 5832, & & cub. 216, quæ sunt 18 & 6, & hæ iunctæ faciunt 24.

Quælibet æquatio cubi æqualis rebus & numero, conuertitur in 8^a consimilem, cuius numerus rerum constat ex diuisione prioris numeri rerum per numerum æquationis, & numerus æquationis est & unitatis diuisæ per numerum æquationis, ut in exemplo, cubus æquetur

6 positionibus p: 2, diuide 6 numerum positionum per 2 numerum æquationis, exhibit 3 numerus positionum secundæ æquationis, diuide etiam unitatem per 2 numerum æquationis, exit $\frac{1}{2}$, cuius & est numerus æquationis, & ita in duobus reliquis exemplis. Inuentio autem æsti-

1 cub. æq̃lis 6 pos. p: 2	
1 cub. æq̃lis 3 pos. p: & $\frac{1}{2}$	
1 cub. æq̃lis 4 pos. p: 4	
1 cub. æq̃lis 1 pos. p: $\frac{1}{2}$	
1 cub. æq̃lis 6 pos. p: 9	
1 cub. æq̃lis $\frac{2}{3}$ pos. p: $\frac{1}{3}$	

mationis unius per aliam, est ualde difficilis, ueruntamen dico, quod habita secunda æstimatione, ipsa erit & numeri rerum multiplicandarum cum unitate per 1 cub. & per positiones, & numerum priorem ex alia parte, inde addes tot quadrata utriq; parti, quotus est numerus, qui prouenit diuisa unitate per quadruplum quadrati eiusdem secundæ æstimationis, & habebis q̃d' q̃dratum p: cubo p: quadrato ex una parte, habentia &, quæ erit quad. p: pos. & ex alia quad. p: pos. p: numero, habentia similiter radicem, quæ erit positio p: numero, quare per capitulum, habebis æstimationem, ut in tertio exemplo, habes secundam rei æstimationem 1, pro habenda prima duc 1 positio-

nem p: 1 (pro regula sumit 1) sed 1 pos. est propter quadratum æstimationis rei, quod fuit etiam 1 in 1 cu-

1 cub.	6 pos. p: 9
1 pos. p: 1	1 pos. p: 1
1 q̃d' q̃d. p: 1 cub.	6 q̃d. p: 15 pos. p: 9
1 q̃d' q̃d. p: 1 cu. p: $\frac{1}{4}$ q̃d.	6 $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 15 pos. p: 9
1 q̃d. p: $\frac{1}{2}$ pos.	2 $\frac{1}{2}$ pos. p: 3

bum, & 6 positiones p: 9, habebis 1 q̃d' q̃dratum p: 1 cubo, æqualia 6 quadratis p: 9 p: 15 positionibus, deinde adde utriq; parti $\frac{1}{4}$ quadrati, & est quod prouenit semper diuisa unitate per quadruplum quadrati numeri positionum additarum, & habebis partes habentes & quadratas, quare res est 3.

Quinquies exscriptus, maneat tot millibus annis.

Artis Magnæ Hiero. Cardani de Regulis Algebri, Finis.

Norimbergæ per Ioh. Petreium excusum,

Anno M. D. XLV.

13597

