

Tk 40865

4A 9820



BURNDY LIBRARY

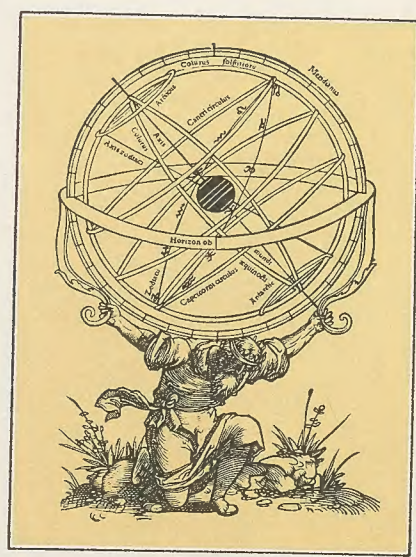
Chartered in 1941

GIFT OF
BERN DIBNER



The Dibner Library of the History of Science and Technology

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



OPERA
GEOMETRICA
EVANGELISTÆ
TORRICELLII

De Solidis Sphæralibus

De Motu.

De Dimensione Parabolæ

De solido Hyperbolico

*Cum Appendicibus de Cy-
cloide, & Cochlea.*

OPERA
GEOMETRICA
EVANGELISTE
TORRICELLI

The Solidity of the Sphere
The Solidity of the Cylinder
The Solidity of the Cone
The Solidity of the Paraboloid
The Solidity of the Hyperboloid
The Solidity of the Ellipsoid
The Solidity of the Spheroid
The Solidity of the Torus
The Solidity of the Ring
The Solidity of the Shell
The Solidity of the Tube
The Solidity of the Pipe
The Solidity of the Channel
The Solidity of the Vessel
The Solidity of the Container
The Solidity of the Receptacle
The Solidity of the Reservoir
The Solidity of the Cistern
The Solidity of the Tank
The Solidity of the Pond
The Solidity of the Lake
The Solidity of the Sea
The Solidity of the Ocean
The Solidity of the Universe

QA
33
T69X
RB
NHT

DE SPHÆRA

Et Solidis Sphæralibus

LIBRI DV O

In quibus Archimedis Doctrina de
Sphæra & cylindro denuo com-
ponitur, latiùs promouetur,

*Et in omni specie solidorum, quæ vel circa, vel intra
Sphæram, ex conuersione polygonorum regularium
gigni possint, vniuersaliùs Propagatur.*

AD SERENISSIMVM

FERDINANDVM II.

Magnum Ducem Etruriæ.

A V C T O R E

EVANGELISTA TORRICELLIO

eiusdem Serenissimi Magni Ducis

Mathematico.



Florentiæ Typis Amatoris Masse, & Laurentij de Landis 1644

SVPERIORVM PERMISSV.

DE SPHERA

Et Solidis Sphaericis

LIBRI QVO

In quibus Archimedis Doctrina de

Sphaera et cylindris continetur

translatum a Nicomacho

et commentum a Theodoro

et a Theodoro

et a Theodoro

AD EUSEBIUM

FERDINANDVM II

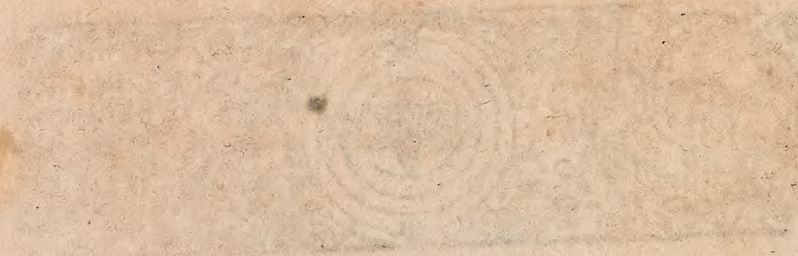
Maximum Imperatorem

AUCTOR

LEONARDO

et a Theodoro

et a Theodoro

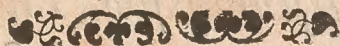


Exemplum

et a Theodoro



Serenissimo Magno Duci Etruriæ
FERDINANDO II.



RVBE SCEREM profectò, *Serenissime Magne Dux*, oblaturus libellum hunc *Serenissimæ Celsitudini Tuæ*, nisi haberem maxima *Archimedis*, et *Galilei* nomina, quæ prætereundere possim audaciæ meæ: Exigua enim sunt opuscula hæc, & de rebus ætate nostra negle-

ctis, nempe *Geometricis*. Attamen, nisi fallor, duo maxima *Geometriæ* opera promouebunt, cum *Veterem De Sphæra*, et *Cylindro*, nouamque *De Motu scientiam* exequantur. Sed ego frustra *Geometriam* excuso apud eum *Principem*, cui non solum hæreditaria, sed etiam ingenita est *Mathematicarum disciplinarum* protectio. *Serenissimus enim Cosmus II. Pater Tuus* stipendijs celeberrimo *Galileo* oblatis; deinde *Ser.C. Tua*, beneficijs maximis in huiusmodi scientiæ cultores collocatis, optime demonstrauit intelligere, quanti momenti sint

Mathematica scientia, vel in disponendis exercituum aciebus, vel in muniendis, exornandisque Urbibus, utroque tempore belli, pacisque. Cum enim (ut de Mechanica facultate sileam) totum penè civile commercium pondere, numero, & mensura administretur, quis non videat omne hominū negotium in Mathematicis esse? quæ tria quantitatis generacum in Scholis nostris quotidie agitentur, illi profectò maxime vtilis Reip. habebuntur, qui in huiusmodi studijs versati, exercitatuque erunt. Libellorum itaque non inutilium causa penitus mala non erit quatenus Geometrici sunt. Vtinam mala non sit eo nomine quòd sunt mei: Propterea humiliter oro, ut illos qualescumq; sint, Tibi tamen debitos, Tuæque munificentia editos, S. C. Tua suscipere dignetur eo vultu, quo me quoque supplicem suscepit, atque ea humanitate, quæ cum tanti Principis maiestate coniuncta, amorem elicit etiam ab ignotis. Faueat Deus omnibus votis Tuis, & S. C. Tuam, imperiumq; diu tueatur, & augeat.

Sereniss. C. Tuæ

Humillimus seruus

Euangelista Torricellius.

PROE

DSI



PROEMIVM.



INTER omnia opera ad Mathematicas disciplinas pertinentia, iure optimo Principem sibi locum vindicare videntur Archimedis inuenta; quæ quidem ipso subtilitatis miraculo terrent animos. Verùm inter omnes libros egregij Authoris longè eminet ille, qui De Sphæra, & cylindro inscribitur: neque enim posteritatis tantùm consensu, sed etiam ipsius Scriptoris iudicio primas tenet. Certè hunc ipse in titulum sepulcri elegit, dignumq; præ ceteris iudicauit, qui tanti viri tumulum exornaret, ostenderetque. Hunc tamen si quis attentius considerare, & perpendere velit, magnum quidem inuentum fateatur necesse est, sed fortasse non absolutum. Loquor equidem de primo tantùm libro, in quo partem operis Theorematicam, & omnem doctrinæ inuentionem exequitur: quo veluti iacto fundamento, in secunda parte postea, quasi coronidis loco, problemata quædam tamquam corollaria ad eam rem spectantia ipse subnectit. Titulus libri est De Sphæra, & Cylindro; quæ quidem verba apud nos idem sonant, ac si dixisset De Sphæra, atque vnico solido spheræali; sed sphæralia solida, quorum vnum est cylindrus, multitudine sunt infinita, vt mox patebit. Ergo absolutior fortasse contemplatio videri potuisset, si eximius Author proportionem, non tantùm eam, quæ est inter sphæram, vnicumque ex spheræalibus solidis perquisisset, verumetiam omnem aliam rationem, quæ inter sphæram ipsam, & vnumquodq; ex infinitis spheræalibus solidis intercedit, ostendendam sibi assumpsisset. Hoc itaque propositum
erit,

& institutum meum in præfenti libello. Doctrinam non solum de Sphæra, & cylindro, sed de sphæra, & sphæralibus solidis omnibus prosequemur: Mutatisq; plerumque Archimedæis fundamentis, vniuersaliori demonstratione illam completi conabimur, atque in omni specie solidorum, vel intrâ, vel circâ sphæram descriptorum, propagabimus.

Ex libro Archimedis De Sphæra & Cylindro duo hæc colliguntur spectantia ad illa solida, quæ nos sphæralia appellamus: Primum, quòd sphæra dupla est inscripti sibi rombi solidi æquilateri; quod quidem vnum est ex solidis sphæralibus, genitum ex reuolutione quadrati inscripti, & circa diagonalem conuersi. Alterum; quòd cylindrus ad inscriptam sibi sphæram est sesquialter. quod quidem & vnum ex solidis sphæralibus est, genitum ex conuersione quadrati circumscripti, & circa ipsius catetum reuoluti. Stantibus his, contemplatione dignum mihi videbatur vniuersalius aliquod problema huiusmodi.

Dato poligono quocunque regulari siuè intrâ, siuè circâ circum descripto, & siue circa diagonalem, siue circa catetum reuoluto; proportionem dicere, quam factum ex polygono solidum habeat, ad factam ex circulo sphæram.

Penitus autem ex voto successit instituta contemplatio. Nam inuenta proportionem, sex ista inferiùs adnotata Theoremata ita se habere comperi, quemadmodum hîc subiiciuntur.

Prima solidorum sphæralium species.

Si intrâ circum descriptum fuerit polygonum regulare habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum B. Quæritur ratio sphærae ad factum solidum.

Continuetur ratio radij polygoni ad catetum eiusdem, nempe A ad B in quatuor terminis A, B, C, D. Erit



Theor. 14. lib. ij. que sphæra ad solidum inscriptum, vt diame-
ter sphærae, hoc est vt dupla ipsius A, ad vtramq; simul B, & D.

Secun

Secunda species.

Si intra circulum descriptum fuerit poligonum regulare habens latera numero paria, & conuertatur figura circa diagonalem A B. Quæritur ratio sphære ad factum sphærale solidum.



*Theor. 7.
lib. ij.*

Ostenditur. Sphæram esse ad solidum, vt quadratum A B. ad quadratum cateti A C.

Tertia species.

Si intrâ circulum describatur poligonum regulare habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum B. Quæritur ratio sphære ad factum sphærale solidum.



Continuetur ratio radij A. ad catetum B. in quatuor terminis A, B, C, D. Eritq; sphæra ad solidum, vt quadrupla ipsius A. ad B. semel, C. bis, & D. semel simulq; sumptas.

Quarta species.

Si circa circulum describatur poligonum regulare, habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum C. Quæritur ratio solidi ad sphæram.



*Theor.
xix. lib.
ij.*

Ostenditur solidum esse ad inscriptam sibi sphæram, vt duo simul quadrata, quorū vnum fit ex radio D. alterum ex cateto C, ad duplum quadrati C.

Quinta species.

Si circa circulum describatur poligonum regulare habens latera numero paria; & conuertatur figura circa diagonalem A. Quæritur ratio solidi ad sphæram.

Ostenditur solidum ad inscriptā sibi sphæram

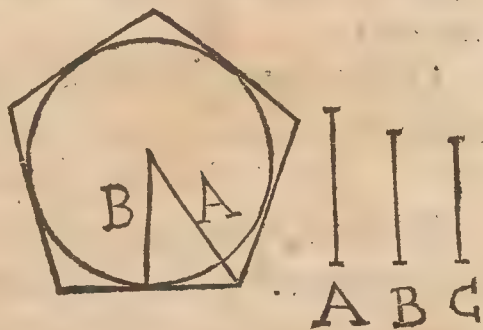


*Theor.
xiiij. lib.
ij.*

ram esse vt radius A ad catetum B. hoc est vt axis solidi ad axem
Theor. 6. sphæræ.
lib. 2.

Sexta, & ultima Species.

Si circa circulum describatur polygonum regulare habens laterum numero imparia, & conuertatur figura circa B catetum. Quæritur ratio solidi ad Sphæram.



Continuetur ratio radij A ad catetum polygoni B, in tribus terminis A, B, C. Eritque solidum ad sphæram, vt A semel, B bis, & C semel simulque sumptæ, ad quadruplam ipsius C.

Theor.
xviii. lib.
ij.

Solidorum itaq; sphericalium species omninò sex emergunt, & vniuscuiusq; speciei ratio ad suam sphæram innotescit. Possent fortasse videri tres tantum solidorum species, si solida absolute, ac sine suis sphæris considerentur. Verùm si illa ad sphæram referantur, statim relatio variatur, & proportio alia confurgit, prout cognata solidis ipsis sphæra inscripta fuerit, vel circumscripta.

Quibus demonstratis, varia pro Corollarijs Theoremata statim emergebant; cuiusmodi sunt. Datis ex prædictarum sex specierum solidis duobus quibuscunque, alterius ad alterum rationem notam facere.

Conum æquilaterum circa sphæram descriptum, esse ad ipsam sphæram vt 9. ad 4. Nempe duplum sesqui quartum. Propterea si circa eandem sphæram conus, cylindrusq; æquilateri descripti sint, tria solida, nempe conum, cylindrum, & sphæram fore inter se in continua proportionem sesquialtera.

Sphæram ad conum æquilaterum sibi inscriptum esse vt 32. ad 9.

Sphæram ad inscriptum cylindrum æquilaterum inefabilem rationem habere, nempe vt diameter quadrati alicuius ad 3 late-

9
ris eiusdem.

Rombum solidum æquilaterum sphærę circumscriptum ad eandem sphæram incomensurabilem esse, nempe vt diameter quadrati alicuius ad latus eiusdem.

Sphærale solidum exagonale circa catetum reuolutum esse ad inscriptam sibi sphæram sesquisextum,

Sphæram autem ad exagonale solidum sibi inscriptum, & circa diagonalem reuolutum, esse sesquitertiam.

Et alia huiusmodi, quę quidem altiùs perscrutanti innumera patebunt. Interim satis superque mihi erit aliqua apposuisse, quę propria claritate vtrò se se offerunt etiam aspernanti. Horum maxima pars Corollaria esse poterant præcedentium sex Theorematum; attamen illa demonstrabimus ex sola etiam Euclidis doctrina, sine ope illorum quę de sphæralibus præmisera-
mus; Vt videre est ad Propositiones 30. & 9. seqq. in secundo libro. Cæterum huius contemplationis occasionem, mox etiā & scriptionis incitamentum præbuit mihi acutissimus librorum Archimedis scrutator Antonius Nardus Aretinus: huic enim refero, atque ipsius eruditis colloquijs, si quid verè Geometricū in hac scriptura exciderit mihi.

Sverò pleraque mala erunt, & fortasse omnia, hoc vnum culpandus erit ornatissimus vir, & genere, doctrinā, moribusq; conspicuus Andreas Arrighettus Florentinus, qui post magna in me collata beneficia, editionem mali libri non suavit, sed iussit.



DEFINITIONES.

1. **C**uiuscunque poligoni regularis latera habentis numero paria, *Diagonalem* voco lineam, quæ per oppositos figuræ angulos ducitur. *Catetum* verò voco lineam, quæ puncta media laterum oppositorum connectit: siue earumdem semisses. Cuiuscunque verò poligoni regularis latera habentis numero imparia, *catetum* voco lineam, quæ ab vno angulo per centrum figuræ extenditur.

2. Si polygonum quodcunque regulare conuertatur, siue circa diagonalem, siue circa catetum, donec ad eum locum redeat unde cæpit moueri, solidum illud quod ex reuolutione circumscribitur *sphærale solidum* appellare visum est. Parilaterum quidem si polygonum habuerit latera numero paria, Imparilaterum verò, quando polygonum latera numero imparia habebit.

Si cylindrus, siue conus, vel etiam conici frustum plano per axem ducto sectum sit: communem secantis plani, & curuæ superficiei sectionem vocabimus latus cylindri, siue conici, siue frusti conici.

Suppositiones.

Supponimus. cuiuscunque prismatis circa cylindrum æque altum descripti, superficiem maiorem esse cylindri ipsius superficie. Cylindricam verò superficiem maiorem esse superficie prismatis inscripti, basim habentis regularem. exceptis semper basibus. Item pyramidis circa conum descriptæ superficiem maiorem esse ipsius conici superficie; Inscriptæ verò pyramidis & regularem basim habentis, supponimus superficiem minorem esse conica superficie.

Demonstrantur hæc apud Archimedem propos. 9. 10. 11. 12 lib. 1. de Sph. & Cyl. Si quis verò ea tamquam nota admittere velit, totum libellum nostrum percurrere poterit.



DE SOLIDIS SPHAERALIBVS LIBER PRIMVS.



PROPOSITIO PRIMA.

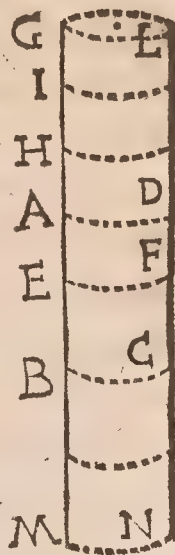


I Cylindri recti superficies secetur plano oppositis basibus parallelo; erunt segmenta superficiei cylindricæ inter se, vt segmenta axis, siue lateris cylindri, homologue sumpta.

Esto cylindrus rectus ABCD, seceturq; plano EF oppositis basibus G parallelo; Dico cylindricam superficiem AEFD, ad cylindricam EBCF, esse vt axis ad axem, siue vt latus AE, ad latus EB.

Producatur vtri mque in infinitum cylindrus, & accipiat recta EG multiplex ipsius EA, iuxta quamlibet multiplicitem, sectaque EG in partes ipsi EA æquales, agantur per puncta diuisionum H, I, G; plana oppositis basibus parallela. Eritque tam multiplex recta GE ipsius EA: quàm multiplex est cylindrica superficies EL, superficiei ED.

Sumatur etiam recta EM multiplex ipsius EB, iux-



12 *De Sphæra, & solidis spherilib.*

ta quamlibet multiplicationem; similiq. peracta constructione vt supra; erit tam multiplex recta EM rectæ EB , quàm multiplex est cylindrica superficies EN , superficiei EC ,

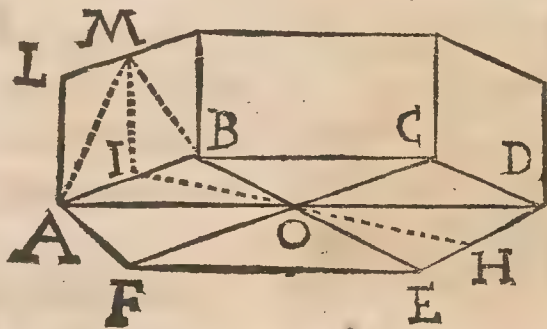
Manifestum ergo est, quod si recta EG maior fuerit, siue minor, vel æqualis, rectæ EM : tunc etiam cylindrica superficies EL , maior erit, siue minor, vel æqualis superficiei EN : & hoc semper: Propterea erit, vt AE ad EB , ita superficies $AEFD$, ad superficiem $EBCF$. Quod erat demonstrandum.

Propositio II.

SI fuerit quodcunque prisma rectum, habens basim polygonam regularem, habensque altitudinem æqualem quartæ parti cateti suæ basis; erit perimeter prismatis æqualis polygono suæ basis.

Esto polygonum regulare $ABCDEF$, super quo concipiatur prisma rectum, habens pro altitudine AL quartam partem cateti IH . Dico perimetrum prismatis, constantem ex figuris rectangulis æqualibus quarum una sit LB , æqualem esse polygono suæ basis.

Ducantur enim diagonales AOD , BOE , & erecta perpendiculari IM , iungantur AM , BM ;



Cum ergo IH ponatur quadrupla ipsius IM , erit IO dupla ipsius IM ; & ideo triangulum AOB duplum trianguli AMB eandem basim habentis; sed etiam rectangulum LB duplum est trianguli AMB ; propterea rectangulum LB æquale erit triangulo AOB ; & sic de reliquis rectangulis, reliquisque triangulis: Quare totus prismatis perimeter, constans ex figuris rectangulis, æqualis est polygono suæ basis. Quod erat demonstrandū.

Corollarium.

Constat ergo, quod si altitudo prismatis maior, minoruè fuerit,

rit, quàm quarta pars cateti suæ basis, erit perimeter prismatis maior, minoruè quàm polygonum suæ basis.

Propositio III.

SI fuerit cylindrus rectus, cuius altitudo equalis sit quartæ parti diametri suæ basis; erit cylindrica superficies equalis circulo suæ basis.

Esto cylindrus rectus, cuius basis circulus circa diametrum AB descriptus; altitudo verò AC , equalis sit quartæ parti diametri AB .

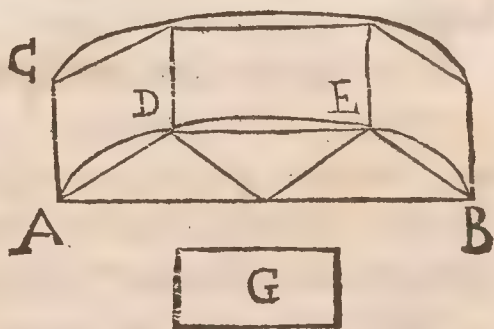
Dico cylindricam superficiem equalem esse circulo suæ basis AB .

Si enim equalis non est; erit circulus vel maior, uel minor cylindricâ superficie.

Sit primùm circulus maior quàm cylindri superficies; & suppositâ differentia G , describatur intrâ circulum aliquod polygonum $ADEB$, quod quidem deficiat à circulo minori defectu, quàm sit spatium G ; & ideo erit polygonum inscriptum adhuc maius quàm cylindrica superficies (quomodo fiat hoc constat ex Commentarijs in Archimedes, & ex XII. Euclidis:) Tum supra polygonum $ADEB$ concipiatur prisma rectum eiusdem cum cylindro altitudinis.

Cùm ergò altitudo prismatis eadem sit ac cylindri, nempe quarta pars rectæ AB , erit altitudo prismatis maior quàm quarta pars cateti suæ basis polygonæ, & ideo perimeter prismatis maior erit quàm polygonum suæ basis, & multo maior, quàm cylindrica superficies (factum enim est polygonum maius cylindrica superficie.) Quod est absurdum: est enim contra præmissas suppositiones.

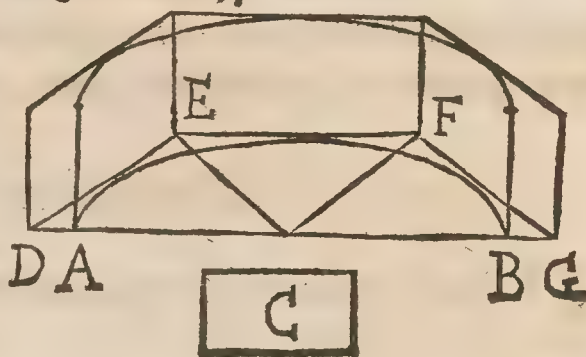
Ponatur deinde circulus minor quàm cylindrica superficies: & suppositâ differentia G , describatur circa circulum aliquod poli-



*ex Corol
lar. præ-
ced.*

14 De Sphæra, & solidis sphæralib.

poligonum regulare D E F G, quod excedat circum spatio minori quàm sit C. (quomodo hoc fiat constat apud Commentarios in Archim. & in XII. Euclidis.) eritq; etiam poligonum minus quàm cylindrica superficies.



per ij. huius.

Concipiatur suprà poligonum erigi prisma eiusdem altitudinis cum cylindro; eritque altitudo prismatis quarta pars cateti suæ basis polygonæ. (cum prismatis altitudo eadem sit atq; cylindri; cylindri autem altitudo est quarta pars rectæ A B, quæ æqualis est cateto poligoni, quod est basis prismatis.)

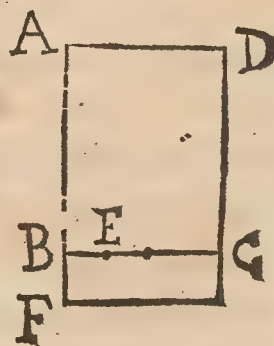
Ideo perimenter prismatis æqualis erit poligono suæ basis; & propterea minor quàm cylindrica superficies. Quod est contra præmissas suppositiones.

Erit ergò superficies cylindrica æqualis circulo suæ basis, Quod erat demonstrandum.

Propositio IV.

Cylindri recti superficies ad circum suæ basis est vt latus cylindri ad quartam partem diametri eiusdem basis.

Esto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axem sit ABCD; sumptaq; BE, quæ quarta pars sit ipsius BC; Dico cylindricam superficiem ABCD ad circum suæ basis esse, vt AB ad BE.



Producatur cylindrus versus F, sectaq; BF æquali ipsi BE, erit per præcedentem, cylindrica superficies FC æqualis circulo suæ basis BC.

per j. huius.

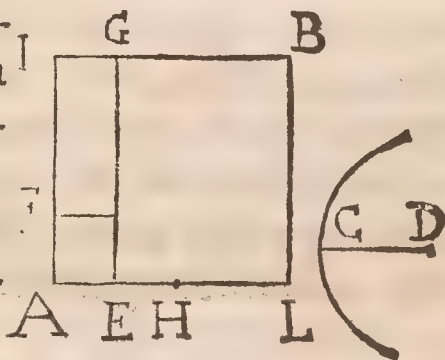
Iam: cylindrica superficies BD, ad cylindricam superficiem FC est

FC est vt AB ad BF; superficies verò FC ad circulum BC (ob equalitatem) est vt FB ad BE; Ergo ex equo erit cylindrica superficies BD ad circulum BC, vt AB ad BE, nempe vt latus cylindri ad $\frac{1}{2}$ diametri basis eiusdem. Quod erat ostendendum.

Propositio V.

Cylindri recti superficies ad circulum quemlibet, est vt rectangulum per axem cylindri ad quadratum semidiametri ipsius circuli.

Esto cylindrus rectus cuius rectangulum per axem sit AB, & centrum basis H. Ponatur autem circulus quilibet cuius semidiameter CD. Dico cylindricam superficiem ad circulum ex CD, esse vt rectangulum AB ad quadratum CD.



Fiat ex AE (quæ quidem $\frac{1}{4}$ pars sit rectæ AL) quadratum FE, producaturque EG.

Erit ergò cylindrica superficies AB ad circulum suæ basis, vt *per præced.* IA ad AE, hoc est vt IA ad AF, hoc est vt rectangulum IE ad quadratum FE; siue, sumptis quadruplis, vt rectangulum AB ad quadratum ex AH. Circulus verò basis AL ad circulum ex CD, est vt quadratum ex AH ad quadratum ex CD; ergò ex *Prim. 6.* æquo erit cylindrica superficies ad circulum ex CD, vt rectangulum per axem ad quadratum CD. Quod erat demonstrandum. *2. duodecimi.*

Corollarium.

Pro Corollario erit Propositio XIII. lib. 1. Archim. de Sphæra & Cylindro. Constat enim quòd si CD. media fuerit proportionalis inter IA, AL; quadratum ex CD æquale erit rectangulo AB. & propterea, ex demonstratis, cylindricam superficiem AIBL æqualem esse circulo ex CD necesse est.

Propositio VI.

Cylindrorum superficies inter se sunt vt eorundem rectangula per axem homologè sumpta.

Sint cylindri recti quorum rectangula per axem sint AB, CD. Dico cylindricam superficiem AB, ad cylindricam CD esse, vt rectangulum AB ad rectangulum CD.

Accipiat pro circulo quolibet, circulus circa diametrum AE.

per præced.

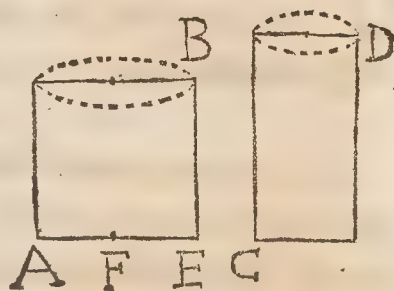
E it ergò cylindrica superficies AB ad circulum quemlibet AE, ut rectang.

AB ad quadratum AF. Circulus verò ex AF ad cylindricam superficiem CD est

per præced.

vt quadratum ex AF ad rectangulum

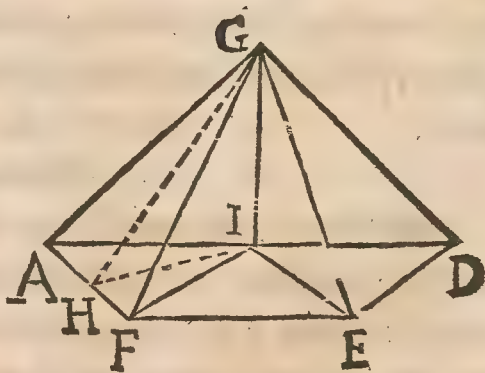
CD; ergo ex æquo cylindrica superficies AB ad cylindricam CD, est vt rectangulum AB ad rectang. CD. Quod erat ostendendum.



Propositio VII.

Si recta pyramis basim habuerit polygonam regularemque erit basis pyramidis ad reliquam ipsius superficiem, vt semicatus basis ad catetum superficiei.

Esto pyramis recta, cuius basis polygonum regulare AFED. vertex verò G, & centrum basis sit I. Secto deinde vno latere bifariam in H, iunctisq; GH, IH, erit GH catetus superficiei pyramidis; IH vero semicatus basis; quandoquidem omnia triangu-
la in superficie sunt æquicruria, & æqualia inter se; quod etiam verum est & in basi.



Dico

Dico basim ad superficiem esse vt I H ad H G.

Triangulum enim A I F, ad triangulum A G F (cum sint in eadem basi) est vt I H, ad H G, ergo etiam ipforum equemultiplicia, nempe basis, & superficies pyramidis, in eadem ratione ^{15. quin} erunt, nempe vt I H ad H G. Quod erat ostendendum. ^{11.}

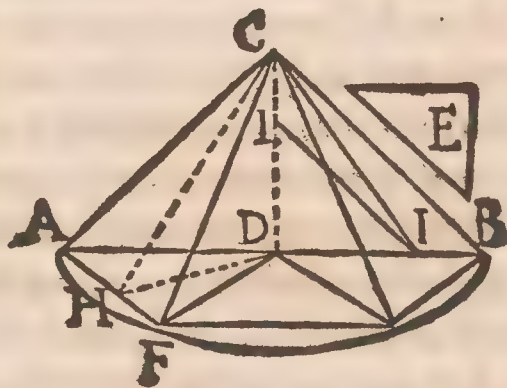
Propositio VIII.

Coni recti basis ad reliquam conicam superficiem, est vt semidiameter basis ad latus conii.

Est conus rectus, cuius basis AB, vertex verò C, axis CD.

Dico circulum basis, ad reliquam conicam superficiem, esse vt DA, ad AC.

Si enim ita non est; erit circulus AB vel maior, vel min. quàm oportet esse, vt ad conicam superficiem sit quemadmodum DA ad AC.



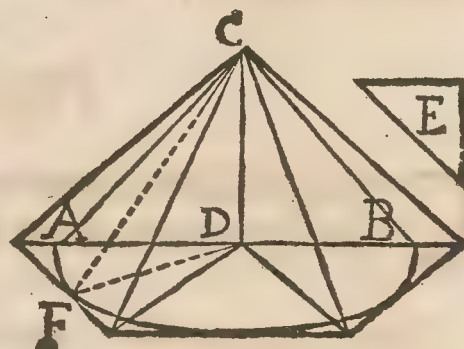
Sit primùm maior; & ponatur tantò maior quantum est spatium E. Inscribatur in circulo polygonum deficiens à circulo, minori defectu quàm spatium E; habebitq; huiusmodi polygonum ad conicam superficiem adhuc maiorem rationem, quàm DA ad AC. Secto deinde vno polygoni latere AF bifariam in H, iungantur DH, CH; & super polygono concipiatur pyramis quæ vertexem habeat in C; seceturque DI equalis ipsi DH, & ducatur IL parallela ad BC, iungaturq. IC.

Cum itaq. polygonum ad conicam superficiem maiorem habeat rationem quàm DA ad AC; multò maiorem rationem habebit ad superficiem suæ pyramidis, quàm DA ad AC, vel DB ad BC. Sed polygonum ad superficiem pyramidis, per præcedentem, est vt DH ad HC; habebit ergo DH ad HC, siue DI ad IC, multò maiorem rationem quàm DB ad BC, vel quàm DI ad IL. Et propterea IC minor esset quàm IL. absurdum.

C Nam

Nam quadratum IC æquale est duobus quadratis ID, DC ; cum quadratum IL æquale sit tantum duobus ID, DL . Ponatur deinde circulus basis AB minor quam oportet esse ut ad conicam superficiem sit quemadmodum recta DA ad AC , sitque tantò minor quantum est spatium

E . Circumscribatur circulo AB polygonum aliquod excedens circulum minori excessu quam sit spatium E . Habebitq. polygonum ad conicam superficiem, adhuc minorem rationem quam DA ad AC ; ergò polygonum ad perimetrum suæ pyramidis multò



minorem rationem habebit quam DA ad AC . Sed polygonum ad perimetrum suæ pyramidis est ut DF ad FC ; propterea DF ad FC , multò minorem rationem habebit quam DA ad AC ; quod est impossibile. Aequales etenim sunt tam DF, DA , inter se, quam FC, AC , inter se.

per 7. bu
ius.

Erit itaque basis conii recti ad reliquam superficiem, ut DA ad AC . Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet quòd curua superficies conii, equalis est circulo cuiusdam, cuius semidiameter med. prop. sit inter CA, AD . nempe, inter latus, & semidiametrum basis conii. Nam sumpta media inter CA, AD . erit circulus qui fit ex media, ad circulum qui fit ex AD : ut CA ad AD . Sed etiam curua conii superficies, ad circulum ex AD . est ut CA ad AD . Ergo equalis est curua conii superficies, circulo, cuius semidiameter media proportionalis sit inter CA, AD .

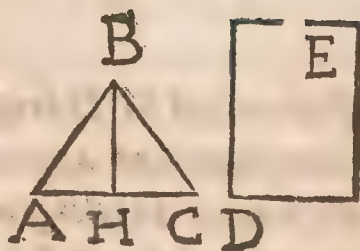
per præ.
ced.

Propositio IX.

Cuiuslibet conii recti superficies, ad superficiem cuiuscunq; cylindri recti demptis basibus, est ut rectangulum sub latere, & semidiametro basis conii, ad rectangulum per axem cylindri,

Esto

Esto conus ABC, cuius basis AC, axis vero BH; & cylindrus cuius rectangulum per axem sit DE. Dico conicam superficiem ad cylindricam esse, ut rectangulum BAH, ad rectangulum DE.



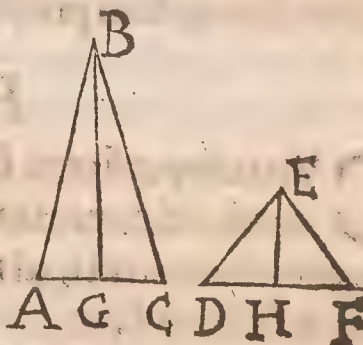
Nam conica superficies ad circulum suę basis est ut AB, ad AH, siue ut rectangulum BAH ad quadratum AH. circulus autem ex AH, ad cylindricam superficiem DE, est ut quadratum AH, ad rectangulum DE. Propterea, ex æquo, erit conica superficies ABC ad cylindricam DE, ut rectangulum BAH ad rectangulum DE. Quod erat ostendendum.

per 8. bñ
ius.
per 5. bñ
us.

Propositio X.

Conica superficies, demptis basibus, inter se sunt ut rectangula sub lateribus conorum, & sub semidiamentris basiū compræhensa.

Sint duo coni recti ABC, DEF. quorum axes BG, EH. Dico curuam conici ABC superficiem, ad curuam superficiem conici DEF, esse ut rectangulum BAG, ad rectangulum EDH. quę nimirum sub lateribus conorum, & semidiamentris basium compræhenduntur.



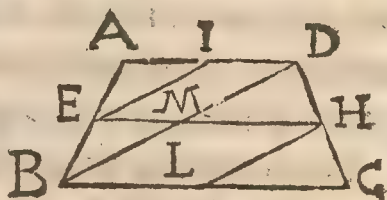
Conica enim superficies ABC, ad circulum AC, est ut recta BA ad AG, siue ut rectangulum BAG; ad quadratum AG. Circulus verò AC ad DF circulum, est ut quadratum AG, ad DH; denique circulus DE ad conicam superficiem DEF, est ut quadratum DH, ad rectangulum EDH. ergo ex æquo curua conici superficies ABC ad curuam DEF, erit ut rectangulum BAG, ad rectangulum EDH. Quod erat ostendendum.

per 8. bñ
ius.

per 8. bñ
ius.

Lemma.

Si fuerit $ABCD$ frustum conici recti, abscissum planis ad axem erectis (hoc enim modo semper intelligemus frusta conica) secenturque latera AB , DC bifariam in punctis E , & H . iungaturq; EH . Dico rectam EH componi ex utraque BL , AL , nempe ex semidiametris basium oppositarum frusti conici.



per 2. se-
xti.

Iungantur BD , EL , LH ; Et quoniam AL , ID . æquales sunt; item AE , EB , æquales: erunt parallele EL , BD . & ideo in parallelogrammo æqualia erunt latera ID , EM . Ob eandem causam æqualia sunt BI , MH . Ergo tota EH æqualis erit ipsis ID , BL simul sumptis. Quod erat &c.

Definitiones.

Vocabimus imposterum breuitatis causa lineam EH mediā Arithmeticam frusti conici.

Rectangulum verò sub EH & AB latere frusti conici, dicemus rectangulum proprium frusti conici.

Propositio XI.

Curua superficies frusti conici, planis ad axem erectis abscissi, ad conicam quamlibet superficiem, est vt rectangulum proprium frusti, ad rectangulum sub latere, & semidiametro basis ipsius conici.

Esto frustum conicū

$ABCD$ abscissum planis

ad axem erectis, sitque

conus quilibet EFG , cu

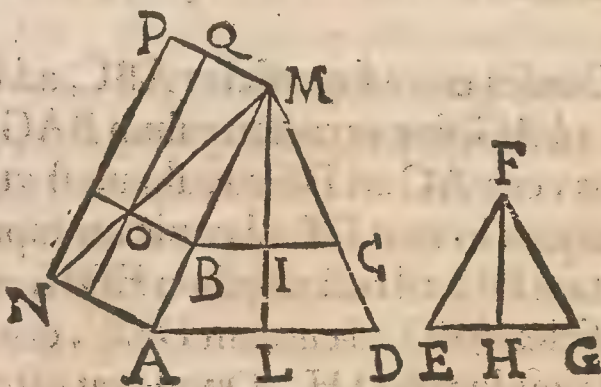
ius axis FH . Dico cur

uam frusti AC superfici-

em, ad curuā conici EFG

superficiem, esse, vt rectā

gulum sub AB , & sub utraque AL , BI contentum, ad rectangulū FEH ,



Com-

Compleatur conus AMD. cuius datum erat frustum, factoque angulo MAN recto, & secta AN equali ipsi AL. compleatur rectangulum AP. Ducto deinde diametro MN, & facta BO parallela ad AN. erit BO æqualis ipsi BI. compleatur etiam figura BQ.

Iam superficies curua conici AMD ad superficiem curuam conici BMC est vt rectangulum LAM ad rectangulum IBM; nempe vt rectangulum AP ad BQ; & diuidendo, erit curua frusti conici ABCD superficies, ad superficiem conici BMC, vt gnomon AOP, ad rectangulum BQ. hoc est vt rectangulum sub AB; & vtraque AN, BO, siue AL, BI, ad rectangulum IBM. Curua verò superficies conici BMC ad curuam conici EFG, est vt rectangulum IBM ad rect. FEH. ergò ex æquo curua frusti conici ABCD superficies ad curuam conici EFG superficiem est vt rectan. contentum sub AB, & vtraque AL, BI ad rectangulum FEH.

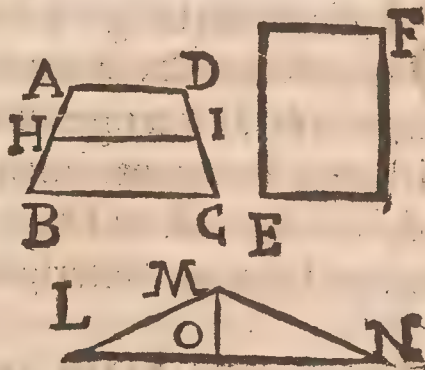
Corollarium.

Patet ergò quod frusti conici ABCD superficies sine basibus ad superficiem conici EFG. est vt rectangulum proprium frusti ad rectangulum FEH. Rectangulum autem proprium frusti comprehenditur sub recta AB, & sub vtraq; AL, BI, siue potius sub AB, & media Aritmetica, quam demonsttrauimus æqualem vtrisque AL, BI.

Propositio XII.

Cuiuscunque frusti conici superficies ad superficiem cylindri recti, est vt rectangulum proprium frusti ad rectangulum per axem cylindri.

Esto frustum conicum ABCD, & cylindrus cuius rectangulum per axem sit EF. Secetur AB bifariâ in H, & agatur media Aritmetica HI equidistanter ad BC. Dico conicam frusti superficiem, ad cylindricam EF, esse vt rectangulum sub HI, & AB, ad rectangulum EF.

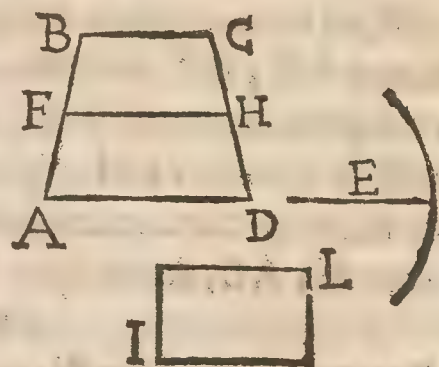


Acci-

per præced. Accipiat^r conus quilibet LMN, cuius axis MO. Eritq; curua frusti superficies ad conicam curuam LMN, vt rectangulum sub AB, HI, ad rectangulum MLO; sed curua coni LMN ad curuam cylindri EF superficiem, est vt rectangulum MLO, ad rectangulum EF; ergo ex æquo curua frusti conici superficies, ad curuam superficiem cylindri, est vt rectangulum sub AB, & HI, nempe vt rectangulum proprium frusti, ad rectangulum EF per axem cylindri. Quod erat ostendendum.

Corollarium.

Curua superficies cuiuscunq; frusti conici ABCD æqualis demonstratur circulo cuidam, cuius quidem circuli semidiameter E media proportionalis sit inter latus AB frusti conici, & inter FH mediã Arithmeticam eiusdem frusti,



per præced. huius. Esto quadratum E æquale rectangulo sub BA, FH. sumaturque cylindrus quilibet IL; & erit curua frusti conici superficies ad curuam cylindricam IL, vt rectangulum sub BA, FH ad rectangulum IL; siue vt quadratum E ad rectangulum IL; hoc est vt circulus ex radio E, ad curuam cylindricam IL. Aequales ergo sunt inter se curua superficies frusti conici AC, & circulus ex radio E factus. Quæ quidem Archimedis Propositio est 16. libri primi de Sph. & cyl.

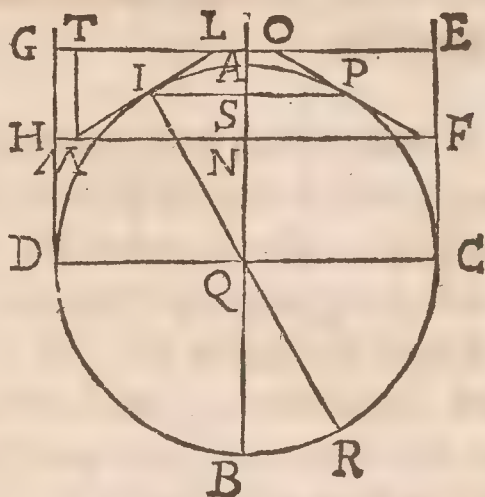
Propositio XIII.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea æqualitèr vtrimq; producta; & conuertatur circulus circa quemlibet sui axē (dummodo axis tangentem non secet) erit conici frusti superficies, quæ à tangente linea describitur, æqualis superficiei cylindri eandem altitudinem cum frusto conico habentis, & circa eandem sphæram descriptibilis.

Esto circulus ADBC, quem duæ diametri AB, CD secant ad angu-

angulos rectos. Duas insuper tangentes habeat alteram $D\bar{G}$ in extremitate diametri CD , alteram verò vbicunque in I , & equalitèr producātur hinc inde IL

IM; dumodo axem AB productum non secant. Agantur deinde per L, & per M parallelæ ad CD, rectæ LE, MF. tum figura conuertatur circa axem AB. Tangens GH describet cylindricam quandam superficiem cuius rectâ gulum per axem erit EFHG: Tangens verò LM designabit frustū conicę superficiiei; deniq; circulus ipse sphaeram circumscribet.



Dico cylindricam superficiem à linea GH descriptam, & conicam superficiem à linea LM factam æquales esse inter se.

Ducatur IP media Aritmetica conici frusti; & agatur IR per centrum Q: eritq; IR perpendicularis ad LM: Ducatur etiam MT perpendicularis ad EG.

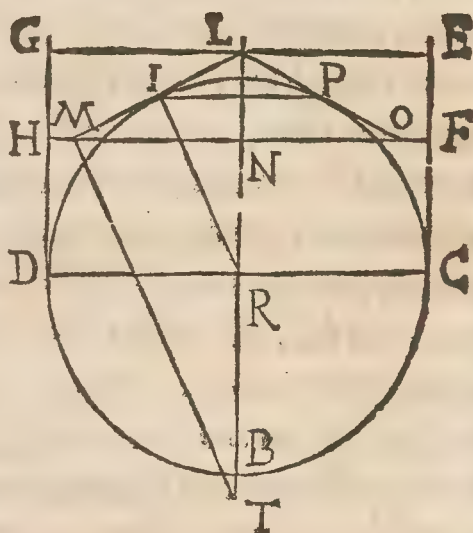
Quoniam duo anguli TMI , TLM vni recto sunt æquales, nempe ipsi LIQ , demptis alternis TLM , LIS , erunt æquales reliqui TML , SIQ . ideoque triangula TML , SIQ , cum rectangula sint, similia erunt; Ergò vt TM ad ML ita SI ad IQ . hoc est (sumptis duplis) PI ad IR : & ideo rectangulum sub TM , IR (quod quidem est rectangulum EFHG .) æquale erit rectangulo sub ML , IP . quod proprium vocamus frusti conici. Propterea per præcedentem æqualis erit superficies conici frusti, quæ à linea ML describitur, superficiei cylindri EFHG , eadem altitudinem cum ipso frusto habentis, & circa eandem spheram ADBC . descriptibilis. Quod &c.

Propositio XIV.

SI circulum tetigerit recta linea æqualitèr vtrinq; producta,
& conuertatur circulus circa axem, qui cum tangente con-
ueniat

ueniat in extremitate ipsius tangentis, erit superficies conici, quæ à tangente describitur, æqualis superficiei cylindri, eandem cum cono altitudinem habentis, & circà eandem sphaeram descriptibilis.

Positis ijsdem vt in præcedentis propositionis constructione; si linea ML incidat in axem BL productū, sintq; æquales vtrunque IL , IM , tunc describet ipsa ML conicam superficiem, Dico conicam huiusmodi superficiem æqualem esse superficiei cylindri $EFHG$. eandem altitudinē habentis cum ipso cono, & circa eandem sphaeram descriptibilis.



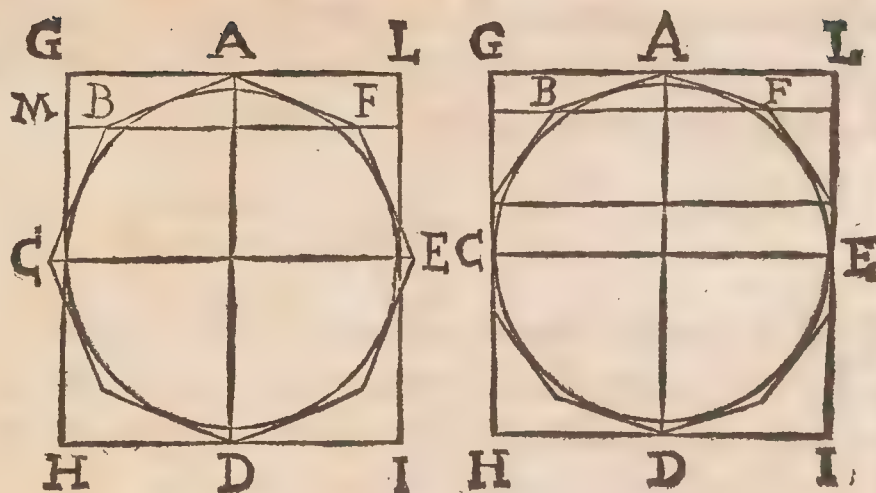
Fiat enim angulus LMT rectus, & cum LM dupla ponatur ip-
sius LI, erit MT dupla ipsius IR, hoc est æqualis diametro sphæ-
ræ, siue ipsi FH. cum autem, per quartâ sexti, sit vt ML ad LN,
ita TM ad MN. erit rectangulum LMN æquale rectangulo sub
TM, LN, hoc est rectangulo sub FH, LN, quod quidem per
axem est cylindri EFHG. Aequalis ergo est superficies coni
huius OLM, superficiei cylindri EFHG. Quod &c.

Propositio XV.

SI circa circulum describatur polygonum habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, siue tantum à binario, & conuertatur figura circa diagonalem, erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram descriptibilis.

Esto poligonum ABCDEF. parilaterum, siue à quaternario numerus laterum mensuretur, vt in prima figura, siue tantum à binario, vt in secunda; & conuertatur figura circa axem AD, nem-

nempe circa
diagonalem
poligoni. Di
co vniuersā
superficiem
facti solidi
sphæralis æ-
qualem esse
superficieci ci-
lyndri GH
IL eandem
altitudinem



habentis cum ipso solido, & circa eandem sphæram descripti-
bilis,

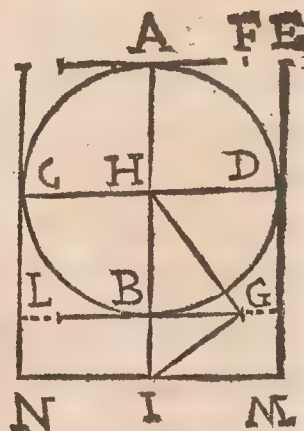
Superficies enim coni BAF, æqualis est superficieci cylindri
ML; Superficies autem frusti conici, quæ inter plana BF, CE
intercipitur, æqualis est superficieci cylindri inter eadem plana
intercepti: & sic de singulis partibus superficierum, quæ soli-
dum sphærale circumsepiunt; Ergò omnes simul superficies am-
bientes sphærale solidum æquales erunt superficieci cylindri
GHIL. Quod erat ostendendum.

per præ-
ced.

13. huius

Lemma.

Si circulum duæ diametri AB, CD, ad an-
gulos rectos secuerint, eundemq; circulum
duæ æquales rectæ lineæ AF, BG tetigerint in
extremitatibus axis AB. Tum figura circà
axem AB conuertatur, describent AF, BG
duos circulos æquales, cum ipsæ æquales sint.
Oportet segmentum cylindri circà eandem
sphæram descriptibilis reperire, cuius super-
ficies æqualis sit duobus simul circulis ex AF,
BG descriptis.



Fiat angulus HGI rectus, eritq; BI altitudo quæ sit cylindri
Nam propter angulum rectum HGI, erit rectangulum HBI aqua-
le qua-

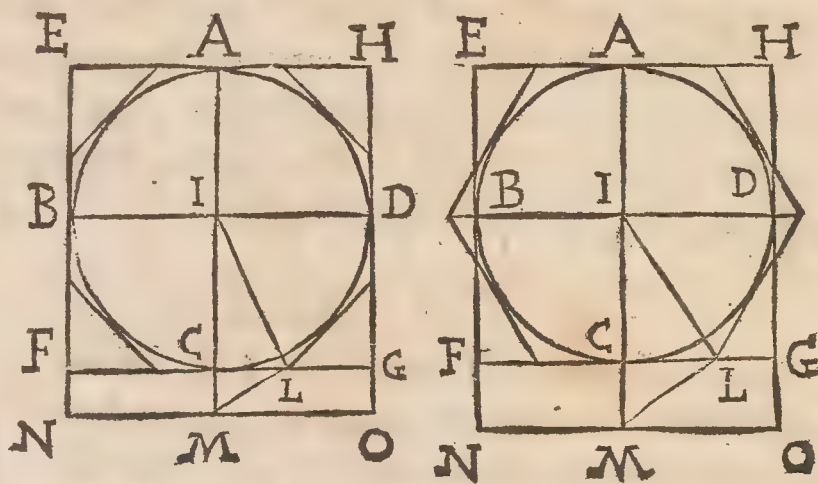
D

le quadrato BG ; & rectangulum ABI hoc est rectangulum LM huius: duplum erit quadrati BG . Propterea superficies cylindri LM dupla erit circuli ex BG descripti, & ideo æqualis ambobus circulis ex BG , AF simul sumptis. Quod &c.

Propositio XVI.

SI circa circulum describatur polygonum habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, siue tantum à binario, & conuertatur figura circa catetum, erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram descriptibilis, altitudinem verò habentis æqualem lineæ compositæ ex diametro sphæaræ, & ex tertia proportionalium, si fiat vt sphæaræ semidiameter ad semilatus polygoni, ita semilatus ad aliam.

Estō circulus $ABCD$, quem secent duæ diametri AC , BD ad angul. rectos, & circa ipsum sit polygona figura habens latera numero paria, siue à quaterna-



rio mensurentur, vt in prima figura; siue tantum à binario, vt in secunda: Tum conuertatur figura circa catetum AC , hoc est circa lineam connectentem bisectiones laterum oppositorum; Ex reuolutione polygoni solidum sphærale describetur contentum sub circularibus, conicisque superficiei bus, & vna cylindrica, vt in prima figura, siue circularibus, & conicis tantum, vt in secunda. Fiat deinde vt IC ad CL , ita CL ad CM , quod facile erit si fiat angulus ILM rectus; & per M . agatur planum NO .

ere-

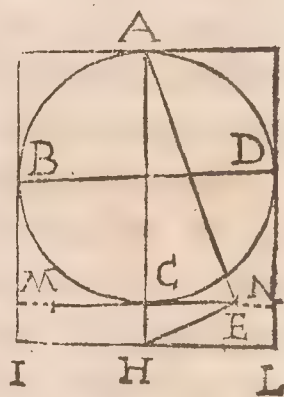
erectum ad axem. Dico vniuersam superficiem solidi sphaeralis æqualem esse superficiei cylindri ENOH.

Hoc autem patet ex præmissis; Nam tota sphaeralis solidi superficies, demptis circulis oppositis, æqualis est superficiei cylindricæ inter plana EH, FG compræhensæ. Duo verò circuli oppositi quorum centra A, & C æquales sunt (per præcedens lemma) superficiei cylindricæ inter duo plana FG. NO. contentæ. Propterea vniuersa simul sphaeralis solidi superficies æqualis erit superficiei cylindri ENOH. circa eandem sphaeram descripti, & altitudinem habentis AM, quæ componitur ex diametro sphaeræ AC, & ex recta CM, quæ quidem tertia proportionalis est ad semidiametrum IC, & semilatus, CL. Quod &c.

deducitur ex-
13. huius.

Lemma.

Si circulum ABCD duæ diametri AC, BD secent ad angulos rectos; recta autem linea CE eundem contingat in extremitate axis AC & conuertatur figura circa AC; ipsa CE circulum describet. Oportet segmentum cylindri circa eandem sphaeram descripti reperire, cuius superficies æqualis sit circulo ex CE descripto.



Fiat angulus AEH rectus, ductoque plano per H ad axem erecto. Dico cylindricam superficiem MILN, æquari circulo ex CE. Est enim ob angulum rectum AEH, rectangulum ACH, hoc est rectangulum ML, æquale quadrato CE. Propterea superficies cylindri MILN æqualis erit circulo ex CE. Quod &c.

per 5. huius.

Propositio XVII.

SI circa circulum describatur polygonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum polygoni: erit vniuersa superficies facti sphaeralis solidi æqualis superficiei cylindri circa eandem sphaeram descriptibilis, altitudinē

D 2 verò

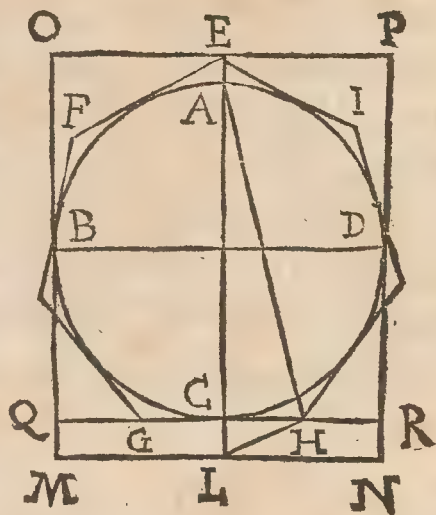
verò habentis æqualem lineæ compositæ ex cateto poligoni, & ex tertia proportionalium, si fiat vt diameter circuli ad semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam.

Esto circulus $ABCD$, circa quem fit polygonum $EFGHI$. habens latera numero imparia; & conuertatur figura circa catetum EC , nempe circa lineam, quæ ab vno angulo E perducitur ad bisectionem lateris oppositi; orieturq; solidum sphærale contentum sub conicis superficiebus, vnicoque circulo.

Facto deinde angulo recto AHL , ductoq; per L plano MN ad axem erecto. Dico vniuersam solidi superficiem æqualem esse superfici ei cylindri $OMNP$.

13. bu-
ius.

Nam superficies solidi sphæralis, dempto circulo ex CH . descripto, æquatur superfici ei cylindri iuter plana OP , QR contenti: circulus autem ex CH factus æqualis est (præcedens lemma) superfici ei cylindri inter plana QR , MN contenti: Propterea vniuersa solidi superficies æqualis erit superfici ei cylindri $OMNP$. qui quidem circa eandem sphæram cum ipso solido describitur, altitudinem verò habet lineam EL , quæ componitur ex cateto EC , & ex linea CL , quæ tertia proportionalis est, si fiat vt AC diameter sphære, ad CH semilatus poligoni, ita CH ad aliam. Quod erat &c.



Propositio XVIII.

Hemisphærij superficies æqualis est superfici ei curvæ cylindri eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto hemisphærium ABC , & circa ipsum cylindrus eiusdem altitudinis, $ADEC$.

Dico

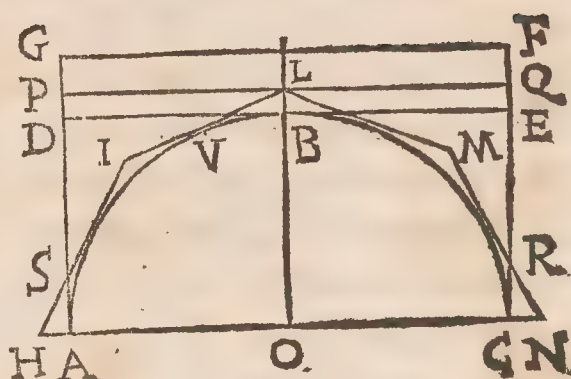
Dico superficiem hemisphæ-
rij æqualem esse superficiei cy-
lindri *ADEC*.

Sienim non est æqualis, vel maior erit, vel minor. Ponatur primum spherica superficies maior: fiatque vt cylindri superficies ad superficiem hemispherij, quæ maior ponitur, ita recta AD ad AG: intelligaturq; cylindrus productus vsque ad GF. Secetur deinde arcus AB bifariam, iterumq; portiones eius bifariam, & hoc semper, donec poligoni circa semicirculum ABC descripti semilatus VL minus sit quam recta DG. (quod fieri posse constat ex prima Decimi; semilatera enim poligonorum circulo circumscriptorum ex continua arcuum bisectione semper minuuntur plusquam pro medietate, vt ab alijs ostensum est.) Factum ergo sit; & esto poligonum HILMN, conuersaque figura circa axem LO, fiat ex poligono, semifolidum sphaerale sub conicis superficiebus compræhensum. Cum itaque recta DG maior sit quàm semilatus LV, multo maior eadem erit quàm LB, & propterea planum PQ productum per L intra puncta D & G cadet.

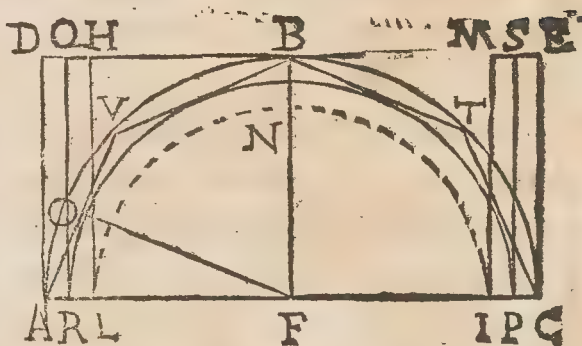
Iam quia superficies cylindri AE ad superficiem hemisphæ-
rij est vt AD ad AG , hoc est vt cylindrica superficies AE ad
cylindricam AF , erit cylindrica superficies AF æqualis sphæri-
cæ. Propterea, si sphærica superficies æqualis sit cylindricæ AF ,
maior erit quam cylindrica AQ , hoc est quam conicæ omnes
 $HILMN$, multoq; maior quam omnes $ASILMRC$, quod
est absurdum. Est enim contrà principium ab Archimede præ-
missum.

Assumpſimus conicam quæ describitur à linea HS maiorem eſſe quàm illa ſuperficies, quæ describitur à linea AS. quod patet ex 12. huius. Rectangulum enim proprium conicæ ſuperficieĩ multò maius eſt quàm rectangulum per axem cylindricę, quando quidcũ ſub maioribus lateribus continetur.

Pona-



Ponatur iam sphærica ABC minor quā cylindrica ADEC. Fiat vt superficies cylindrica ADEC ad sphæricam, quæ ponitur minor; ita recta AF ad FL. Fiatque ex FL semidiametro aliud hemisphærium LNI, priori concentricum, & circa ipsum intelligatur cylindrus LHM I: Inscribatur etiam



intrā femicirculum ABC. figura laterum æqualium, ita vt latera ipsius non tangant femicirculum LNI. (quod fieri posse constat ex Euclide.) Describaturq; alius femicirculus semidiametro FO, qui contingat singula latera factæ figure, & conuertatur vniuersa figura circa FB. ita vt fiat semisolidum sphærale AVBTC conicis superficiebus circumseptum; ex femicirculo autem FO fiat aliud hemisphærium, circa quod concipiatur cylindrus RQSP.

6. *buius.*

ob 15. *buius.*

Iam sic; superficies cylindri ADEC ad superficiem hemisphærij est, per constructionem, vt AF ad FL, hoc est vt AC ad LI, hoc est vt rectangulum AE ad rectangulum LM, hoc est vt cylindrica AE ad cylindricam LM. Quare sphærica superficies æqualis erit cylindricæ LM, & propterea minor quā cylindrica RS, hoc est quā omnes conicæ AVBTC, absurdum. sphærica enim superficies ABC maior est quā omnes conicæ AVBTC.

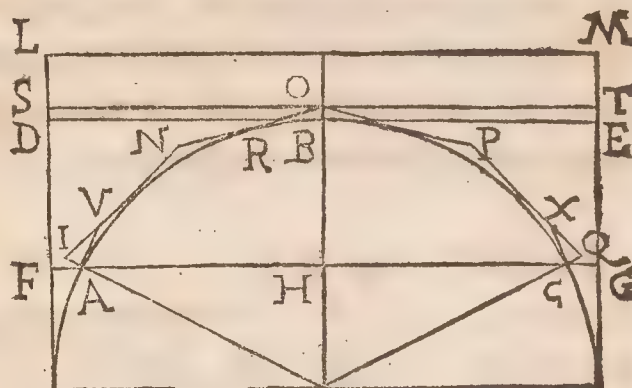
Hemisphærij ergò superficies æqualis erit superficie cylindri eandem ipsi basim, eandemq; altitudinem habentis. Cum demonstratum sit neque maiorem esse, neque minorem. Quod erat &c.

Propositio XIX.

Cuiuscunque minoris portionis Sphærae superficies æqualis est curvæ superficie cylindri circa integram spheram descripti,

scripti, & eandem altitudinem cum ipsa portione habentis.

Est minor sphaerae portio ABC , & portio cylindri $FDEG$; circa integram sphaeram descripti, eandem tamen altitudinem HB cum ipsa portione sphaerica habentis. Dico sphaericam superficiem ABC aequalem esse superficiei cylindri $FDEG$.



15. 7^{um} ti.

Si enim non est equalis, vel maior erit vel minor.

Ponatur primum maior; & ipsi sphaericae superficiei ABC construatur equalis (vt in precedenti) cylindrica $FLMG$: secto deinde arcu AB bifariam, & portiones eius iterum bifariam, & sic semper, circumscribatur arcui ABC figura multorum laterum $INOPQ$, terminata ad diametros, quae ducuntur per puncta A & C . Sitque per praedictam bisectionem arcuum, semilatus RO minus quam recta DL , vt propterea planum ST , ductum per O , cadat intra puncta D , & L . Quemadmodum in precedenti &c. Conuertatur deinde figura vniuersa circa OH , & ex conuersione figurae $INOPQ$ nascetur portio solidi sphaericalis sub conicis superficiebus contenta.

Iam sic. Quia sphaerica superficies ABC equalis est per constructionem cylindricae $FLMG$, maior eadem erit quam cylindrica $FSTG$, & multo maior quam omnes conicae $INOPQ$, multoq; etiam maior quam omnes conicae $AVNOPXC$. Quod est absurdum, & contra principia Archimedis.

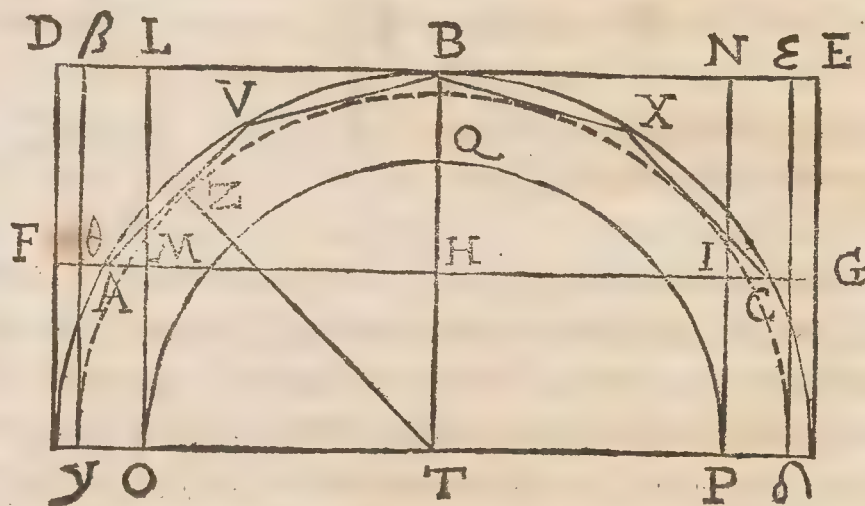
Assumpsimus cylindricam superficiem $FSTG$ maiorem esse omnibus conicis $INOPQ$. Hoc enim patet. Nam ex 13. 14. & 15. huius colligi potest, conicas $INOPQ$ aequales esse superficiei cylindricae contentae inter planum ST , & planum quod duceretur per puncta I & Q .

Assumpsimus etiam, ducta tangente AV . conicam superficiem,

32 De Sphæra, & solidis sphæralib.

ciem, quæ fit à linea IV, maiorem esse quàm illa quæ fit linea AV. Quod quidem demonstratur apud Archimedes ad Propositionem 37. de Sphæra & cylindro. Sed & ex nostris deduci potest. Nam rectangulum proprium superfici ei, quæ fit à linea IV, maius est quàm rectangulum proprium illius quæ fit à linea AV. Continetur enim sub lineis maioribus.

Ponatur
deinde
sphærica
superfici
es portio
nis ABC
min. quâ
cylindri
ca FDE
G.



Fiat vt

cylindrica FDEG ad sphæricam superficiem ABC, quæ minor ponitur, ita FH ad HM. & centro T semidiametro autem HM fiat hemisphærium OQP, circa quod intelligatur cylindrus OL NP. Intra arcum autem ABC figura inscribatur multorum laterum AVBXC per continuam bisectionem arcuum ita vt latera ipsius non tangant semicirculum OQP, & conuertatur vniuersa figura circa axem BT. Intelligatur autem radio TZ (quæ recta perpendicularis sit ad vnum latus figuræ inscriptæ) describi sphæram, quæ tangat singula figuræ AVBXC latera, & circa huiusmodi sphæram descriptus concipiatur suus cylindrus $\gamma\beta\epsilon\delta$

6. huius. Iam sic. cylindrica superficies FDEG per constructionem est ad sphæricam ABC, vt FH ad HM, hoc est vt FG ad MI. hoc ex 6 huius. est vt rectangulum FE ad rectangulum MN, hoc est vt eadem cylindrica FE, ad cylindricam MN. Erit ideo sphærica superficies ABC æqualis cylindricæ MN nempe minor cylindrica explicatur infra $\theta\epsilon$. hoc est minor omnib. conicis AVBXC; quod est absurdum.

Assum-

Liber Primus.

33

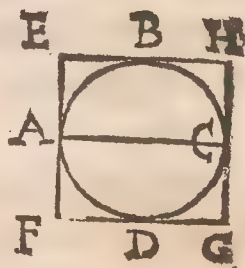
Assumpsimus cylindricam superficiem θ e^o aequalem esse omnib. conicis $AVBXC$. Quod patet ex demonstratis. Sunt enim tam cylindrus θ , quàm omnes illæ conicæ eiusdem altitudinis HB ; & circæ eandem spheram γ & δ describuntur. 15. b^{us} ius

Constat ergò superficiem ABC e^o aequalem esse cylindricæ $DFGE$. cum demonstratum sit neque maiorem esse, neque minorem. Quod &c.

Corollarium I.

Ex prima duarum præmissarum Propositionum patet superficiem integram spheræ, aequalem esse superficiei cylindri sibi circumscripti, & eiusdem cum ipsa sphaera altitudinis.

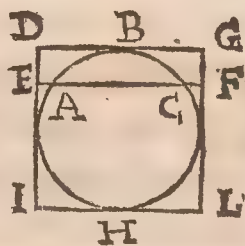
Cum enim hemisphaerium ABC superficiem habeat aequalem superficiei cylindri $AEHC$, & item hemisphaerium alterum ADC , superficiem habeat aequalem superficiei cylindri $AFGC$, erit coniunctim tota spheræ superficies equalis superficiei cylindri $FEHG$; exceptis semper basibus.



Corollarium II.

Manifestum etiam est ex ultima propositione, superficiem maioris spheræ portionis, aequalem esse superficiei cylindri eandem cum portione altitudinem habentis, & circæ eandem spheram descriptibilis.

Cum enim integra spheræ superficies equalis sit superficiei cylindri $IDGL$, & demonstratum sit superficiem segmenti minoris ABC e^o aequalem esse superficiei cylindri $EDGF$, erit reliqua superficies spheræ AHC , equalis reliqua superficiei $EILF$. Quod oportebat &c.



Corollar.
preced.

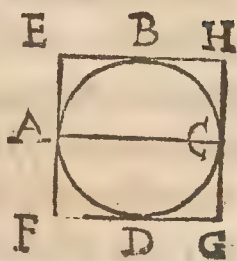
Propositio XX.

Superficies spheræ quadrupla est maximi circuli in eadem sphaera descriptibilis.

E

Sit

Sit sphaera ABCD cuius diameter AC; & circa ipsam intelligatur cylindrus eiusdem altitudinis FEHG.



Dico superficiem sphaerae quadruplam esse maximi circuli in ea descriptibilis.

Superficies enim cylindri FEHG sine basi-
bus, est ad circulum suae basis circa FG, siue cir-
ca AC descriptum, ut EF ad quar. partem ipsius FG, hoc est ut
FG ad quar. partem ipsius FG; hoc est quadrupla. Propterea
etiam superficies sphaerae, quae cylindrica est aequalis, qua-
drupla erit circuli circa AC descripti, qui in sphaera maximus
est. Quod &c.

4. buius.
ex prim.
Corollar.
preced.

Aliter.

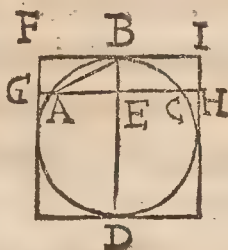
Sphaerica superficies ABCD equalis est cylindricae FEHG; cy-
lindrica vero FEHG ad circulum, cuius semidiameter sit AC, est
ut rectangulum per axem EG, ad quadratum ex semidiametro
AC, nempe ad quadratum EG; & ideo equalis: propterea etiam
sphaerica superficies equalis erit circulo cuius semidiameter sit
AC; ergo quadrupla erit circuli cuius diameter sit AC. Quod &c.

5. buius.

Propositio XXI.

Cuiuscunque portionis sphaerae superficies aequalis est circu-
lo, cuius semidiameter aequalis sit lineae quae ex polo
portionis perducitur ad circulum, qui in eiusdem portionis basi
est.

Esto sphaerae portio siue minor
siue maior ABC. cuius ex polo
ducta sit recta AB. Dico super-
ficiem portionis aequalem esse
circulo qui fit ex AB tamquam se-
midiametro.



Cum enim quadratum AB ae-
quale sit rectangulo DBE ob circulum, aequale erit & rectan-
gulo GFH, quod idem est ac rectangulum DBE. Propterea
circu-

circulus ex AB æqualis erit superficiei cylindri, cui per axem fit rectang. GFH, & ideo æqualis etiam superficiei sphaericae portionis ABC. Quod &c.

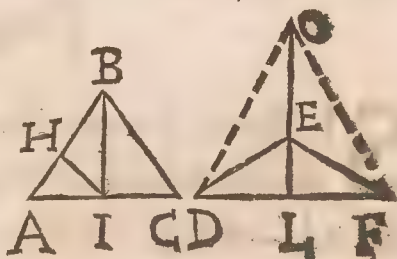
s. huius

Tria hæc Theoremata, quæ sequuntur, ex Archimede desumpta sunt; quod quidem fecimus ne lector Archimedem adire cogeretur, sed uniuersam hanc doctrinam in hoc libello haberet.

Propositio XXII.

Sint duo conii recti ABC, DEF. Sitq; curuæ conii ABC superficiei equalis circulus DF; nempe basis alterius conii DEF; rectæ verò IH, quæ ex centro I ducitur perpendiculariter ad latus AB, æqualis sit altitudo EL: Dico conos ABC, DEF, esse æquales.

Nam altitudo BI ad altitudinem EL est vt BI ad IH (ob æqualitatem) siue vt BA, ad AI, nempe vt curua superficies ABC ad basim AC; siue vt basis DF ad basim AC. reciprocè. Quare æquales erunt conii ABC, DEF. Quod erat &c.



per 4. se
xii.

8. huius

Corollarium.

Hinc patet quòd si conus aliquis, puta DOF. basim quidem habeat DF æqualem curuæ superficiei ABC, altitudinem verò OL non æqualem perpendiculari IH; Ita fore conum ABC ad conum DOF, vt est IH ad OL. Nam conus DEF ad conum DOF. est vt EL. ad LO. Ergo (sumptis antecedentium æqualibus) conus ABC ad conum DOF, erit vt IH ad OL.

Propositio XXIII.

SI fuerit rombus solidus ABCD, ex duobus conis rectis compositus; Sitq; conus EFG. habens basim EG æqualem superficiei curuæ alterius conorum rombi, puta, BAD; altitudinem verò FH æqualem rectæ CL, quæ quidem ex vertice reliqui conii BCD ducitur perpendiculariter in latus AB productū.

E 2

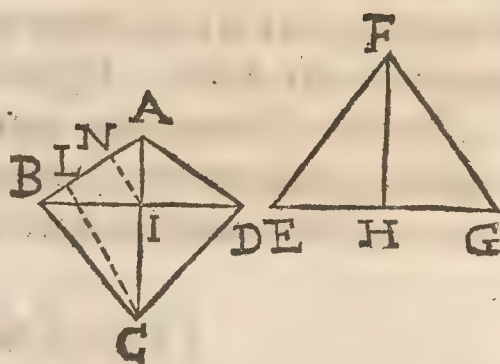
alte-

36 *De Sphæra, & solidis spherilib.*

alterius coni BAD. Dico rombū solidum ABCD equalem esse cono EFG.

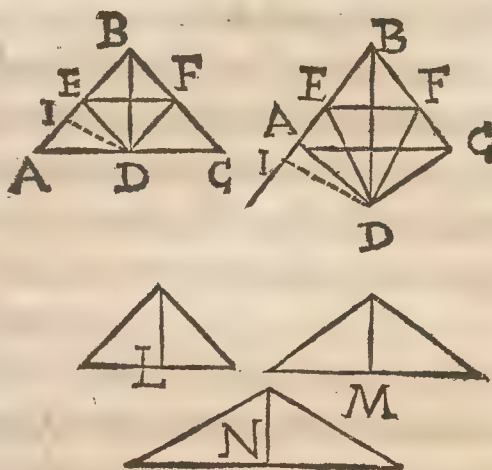
Ducatur IN perpendicularis ad AB. Iam, conus BCD, ad conum BAD, est vt CI ad IA; & componendo, rombus ABCD ad conum BAD est vt CA ad AI; siue vt CL, ad IN. Conus verò BAD

per Cor. preced. ad conum EFG est vt IN ad FH: ergo ex æquo rombus ABCD ad conum EFG est vt CL ad FH. Ergo equalis. Quod erat, &c.



Propositio XXIV.

SI fuerit conus siue rombus solidus ABCD sectus plano EF ad basim parallelo. Intelligaturque ex integro solido ABCD ablatus rombus solidus EBF D. Dico reliquum solidum excauatū AEDFC quod superest, equale esse cono cuidam M, cuius basis M sit æqualis frusto curuæ superficiei conicæ AEFC inter plana EF, AC, interceptæ, altitudo verò M sit æqualis perpendiculari DI, quæ à vertice ablati rombi D ducitur in latus BA.



Intelligentur tres coni æquealti L, M, N. quorum vnicuique altitudo sit æqualis rectæ DI; basis verò coni L sit æqualis curuæ superficiei coni EBF. at basis M æqualis sit segmento conicæ superficiei inter plana EF, AC intercepto: coni tandem N basis æqualis sit vtrisque simul prædictis basibus; siue (quod idem est) integræ superficiei curuæ coni ABC.

Manifestum est quod integrum solidum ABCD æquale erit cono N (per alterutram præcedentium duarum Propos.) sed etiam

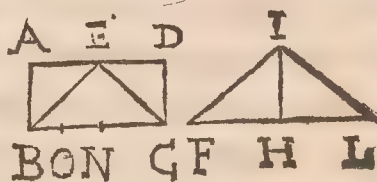
etiam duo conⁱ *L* & *M* simul sumpti æquales sunt eidem cono *N*. ergo integrum solidum *ABCD* æquale erit duobus conis *L* & *M* simul sumptis. Demptis itaque, rombo *EBFD*, & cono *L*, qui per præcedentem sunt æquales, reliquum solidum excavatum *AEDFC* æquale erit reliquo cono *M*. Quod erat &c.

*ex 24.
Quinti.*

Propositio XXV

SI ex cylindro auferatur conus eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habens, erit reliquum excavatum solidum, quod ex cylindro superest, æquale cono cuidam, cuius basis æqualis sit superficiei curvæ cylindri, altitudo verò æqualis semidiametro basis ipsius cylindri.

Est^o cylindrus, cuius rectangulum per axem sit *ABCD*. & ex ipso auferatur conus *BEC*, vt dictum est. Sumatur autem alius conus *FIL*, cuius basis *FL* æqualis sit superficiei curvæ cylindri, altitudo æqualis rectæ *NB*. hoc est semidiametro basis cylindri. Dico reliquum ex cylindro solidum, dempto cono *BEC*, æquale esse cono *FIL*.



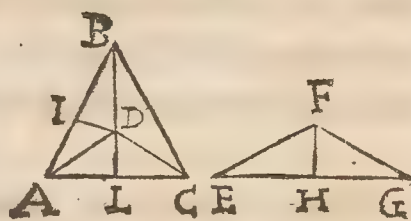
Secetur *BN* bifariam in *O*. Conus ergo *FIL* ad conum *BEC*, rationem habet compositam ex ratione altitudinum *HI* ad *BA*, hoc est *NB* ad *BA*, & ex ratione basium, hoc est basis quæ circa *FL* ad basim quæ circa *BC*, siue quod idem est, superficiei cylindricæ ad basim propriam quæ circa *BC*, hoc est, lineæ *AB* ad *BO*. Erit ergo conus *FIL* ad conum *BEC*, vt *NB* ad *BO*, nempe duplus: solidum etiam cylindricum excavatum, dempto cono *BEC*, duplum est eiusdem conⁱ *BEC*. Propterea solidum cylindricum excavatum æquale erit cono *FIL*, cuius basis æquatur superficiei cylindri, altitudo verò æqualis est semidiametro basis cylindri. Quod &c.

4. *hinc*

Propositio XXVI.

SI ex cono conus auferatur eandem habens basim altitudinem verò minorem, erit excauatum solidum conicū, quod relinquitur, æquale cono cuidam, cuius quidem basis æqualis sit curvæ superficiei totius prioris conī, altitudo verò æqualis perpendiculari, quæ ex vertice ablati conī demittitur in latus maioris conī.

Esto conus rectus ABC ex quo auferatur conus ADC , vti dictum est. Ponatur autem conus EFG , habens basim EG , æqualem curvæ superficiei conī ABC ; altitudinem verò HF æqualem rectæ DI , quæ perpendicularitèr à vertice ablati conī cadit in latus AB . Dico solidum conicum excauatum $ADCB$, dempto cono ADC , æquale esse cono EFG .



8. huius.
4. sexti.

Nam cum triangula BLA , BID , rectangula sint, habeantque angulum communem ABL , similia erunt. Sed conus EFG ad conum ADC rationem habet compositam ex ratione basium, nempe circuli circa EG , siue superficiei curvæ conī ABC , ad circulum circa AC , hoc est rectæ BA ad AL ; siue BD ad DI , & ex ratione altitudinum, nempe HF ad DL , siue DI ad DL . Conus ergo EFG , ad conum ADC erit vt linea BD ad LD . Sed conus ABC ad conum ADC est vt BL ad LD , & diuidendo, etiam solidum excauatum $ADCB$ ad conum ADC est vt linea BD ad DL . Propterea constat solidum excauatum $ADCB$ æquale esse cono EFG . Quod &c.

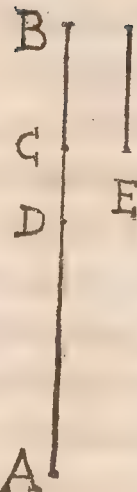
Lemma.

Si ab eadem magnitudine AB due magnitudines inæquales auferantur AC , maior, & AD minor, fueritq; DC , nempe differentia inter ablatas, æqualis differentię siue excessui, quo maius residuum BD superat quandam magnitudinem E . Dico ipsam E

mino-

minori residuo CB æqualem esse.

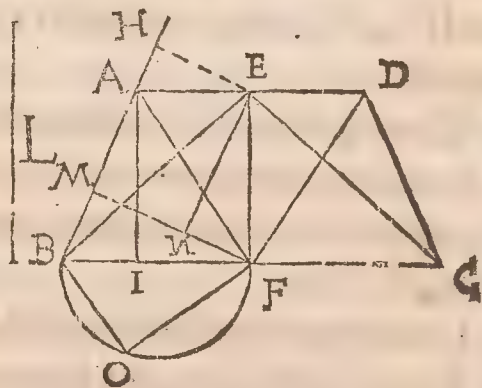
Patet hoc. Cum enim maius residuum DB superet magnitudinem E excessu DC ; si excessus abijciatur, erit reliqua CB æqualis magnitudini E . Propterea magnitudo E æqualis est minori residuo. Quod &c.



Propositio XXVII.

SI ex conico frusto conus auferatur, qui pro basi habeat maiorem frusti basim, altitudinem verò eandem cum frusto; Erit reliquum excavatum solidum æquale cono cuidam, qui basim habeat æqualem superficiei curvæ frusti, altitudinem verò æqualem perpendiculari quæ ducitur ex vertice ablati coni in latus alterum coni frusti.

Esto conicum frustum $ABCD$, cuius maior basis sit circulus circa BC . Et ex ipso auferatur conus BEC , cuius basis sit idem circulus circa BC ; altitudo verò FE eadem cum frusto. Dico reliquum solidum excavatū dempto cono BEC , æquale esse cono cuidam, cuius basis æqualis sit curvæ superficiei conici frusti $ABCD$. altitudo vero sit linea EH .



quæ nimirum ex E vertice ablati coni cadit perpendicularitèr in AB latus conici frusti.

Inscribatur alius conus AFD habens basim circa AD , & verticem in F . Ducaturque AI parallela ad EF , eritque tota IC æqualis vtrique simul semidiametro basium, rempe ipsi EA , ipsiq; FB . Fiat deinde circa FB semicirculus FOB , in quo applicetur BO æqualis ipsi FI , siue ipsi EA ; eritq; circulus ex semidiametro FO differentia inter duos circulos, quorum semidiametri sint, FB , BO , siue FB , & EA ; nempe differentia inter

ter bases oppositas conici frusti, hoc est inter bases conorum BEC , AFD , & propterea conus cuius basis si circulus ex FO semidiametro, altitudo verò FE , differentia erit, siue excessus, quo maior conus BEC superat minorem AFD .

per Cor. prop. xij. huius. Ponatur recta quaedam L , cuius quadratum aequale sit rectangulo ex AB in IC , eritque circulus, qui sit ex L semidiametro, aequalis conicae superficiei frusti $ABCD$. Demittatur denique ex F recta FM . perpendicularis ad AB , & ex E recta EN parall. ipsi HM , eritque facta figura $EHMN$. parallelogrammum rectangulum.

Iam cum propter parallelas HM , EN , sint aequales anguli BAD , NED , demptis rectis IAD , FED , erunt reliqui BAI , NEF aequales; & ideò triangula BAI , NEF , cum rectos habeant angulos ad I & N aequiangula erunt.

s. secundum di. Cum autem rectangulum BIC simul cum quadrato FI aequale sit quadrato FB , vel quadratis FO , OB , demptis aequalibus BO , FI . erit reliquum rectangulum BIC quadrato FO . aequale.

24. b. huius. Concipiatur iam conus AFD detrahi ex conico frusto $ABCD$, eritque reliquum excavatum solidum dempto praedicto cono, aequale cono cuidam cuius basis semidiameter sit L , altitudo verò FM .

Iam: quoniam ob similitudinem triangulorū, est NF ad FE , ut BI ad BA , hoc est (sumpta communi altitudine) ut rectangulum BIC ad rectangulum BA in IC , hoc est, sumptis aequalibus, ut quadratum FO ad quadratum ex L reciprocè, aequales erunt coni reciproci quorum alter altitudinem habeat FE , & semidiametrum basis FO ; alter verò altitudinem habeat FN , & semidiametrum basis L . Sed conus ille qui altitudinem habeat FE , & radium basis FO , est excessus inter ablatas magnitudines, nempe inter conos BEC , AFD ; Conus verò ille qui altitudinem habet FN , & radium basis L , est excessus quo maius residuum totius magnitudinis (nempe conus cuius altitudo FM , & radius basis L) superat quandam aliam magnitudinem, nempe conum, cuius altitudo NM , siue EH , radius autem basis L ;

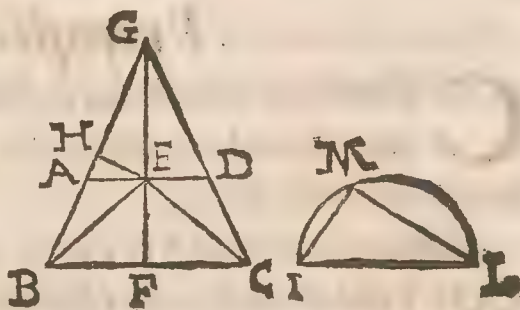
erit

erit itaque hæc magnitudo, per Lemma præmissum, æqualis minori residuo; ergò conus prædictus, cuius altitudo EH , & basis circulus ex L æqualis superficiei conici frusti, æqualis erit minori residuo, hoc est reliquo conici frusti $ABCD$. dempto cono BEC . Quod erat &c.

Aliter.

Sed conemur idem ostendere minus laboriosa demonstratione; si possibile erit ex difficultate materia, & veriùs ex tenuitate ingenij.

Sit conicum frustum $ABCD$ cuius maior basis BC , & ex ipso auferatur conus BEC , altitudinem habens eandem cum frusto, & pro basi, maiorem ipsius frusti basim. Compleatur conus BGC , cuius datum erat frustum, ductaque EH ad angulos rectos ipsi BG ,



ponatur IL media proportionalis inter GB, BF , eritq; circulus ex IL semidiametro descriptus, equalis superficiei conii BGC . fiat per Cor.
circa IL semicirculus IML , in quo aptetur IM media proportio- 2. huius.
nalis inter GA, AE , eritq; circulus ex semidiametro IM factus per Cor.
equalis superficiei conii AGD ; Reliquus circulus ex semidiametre 3. huius.
tro ML factus, equalis erit superficiei conicae frusti $ABCD$. (si
enim ab equalibus equalia demas reliqua sunt equalia.)

Dico reliquum solidum frusti conici $ABCD$, ablato cono BEC ,
 aequale esse cono cuidam, cuius altitudo sit EH ; basis verò aqua-
 lis superficiei conicæ ipsius frusti; hoc est circulus ex semidiame-
 tro ML descriptus.

Cum .n. duo circuli ex radijs IM, LM facti xquales sint circulo ex IL descripto, si altitudo unicuique eadem assumatur EH , erunt duo coni simul (quorum altitudo communis EH , bases vero circuli ex radijs IM, LM) xquales cono, cuius altitudo eadem EH , basis verò circulus ex IL ; iste vero conus xqualis est solido conico $BECG$, dempto cono BEC , ergo duo illi coni xquales erunt solido $BECG$. Propterea ablatis utrinque xqualibus conis, nem

pe cono, cuius basis ex IM est, altitudo EH , & cono AGD (sunt enim æquales per 22. huius) remanebunt equalia, solidum nempe excavatum frusti $ABCD$, detracto cono BEC , & conus cuius altitudo EH , basis circulus ex LM radio factus, qui quidem equalis est superficiei conice frusti $ABCD$. Quod &c.

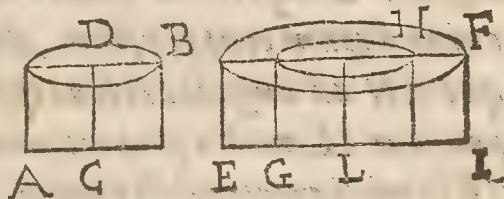
Definitio.

Si ex cylindro cylindrus auferatur æquealtus, & circa eundem axem descriptus, solidum excavatum quod relinquitur, Tubum cylindricum appellabimus.

Propositio XXVIII.

Cylindrus ad tubum cylindricum æquealtus, est ut quadratum semidiametri basis cylindri ad rectangulum basis ipsius tubi cylindrici.

Esto cylindrus AB cuius axis CD . Tubus verò cylindricus EF (dempto nimirum cylindro GH) æquealtus sit cum cylindro AB . Dico cylindrum AB ad tubum E



F esse ut quadratum AC semidiametri basis cylindri, ad rectangulum EGI , nempe ad rectangulum basis tubi, hoc est quod fit à differentia EG . & ab aggregato GI semidiametrorum basis ipsius tubi.

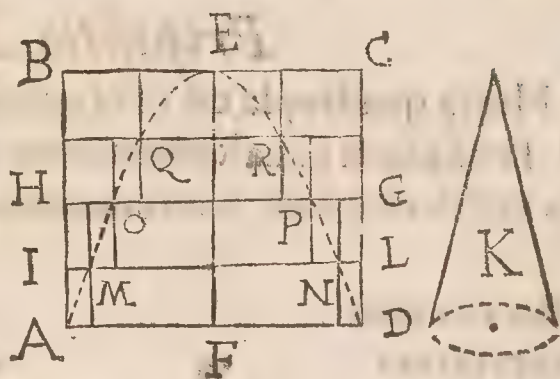
Nam cylindrus integer EF ad cylindrum GH , est ut quadratum EL ad LG . quadratum. Et diuidendo, Tubus cylindricus EF ad cylindrum GH est ut rectangulum EGI ad quadratum GL . Sed cylindrus GH ad AB cylindrum est ut quadratum GL ad quadratum BC . Ergo ex æquo erit tubus cylindricus EF ad cylindrum AB ut rectangulum EGI ad quadratum AC . Conuertendo igitur patet quod propositum erat.

Propositio XXIX.

Datæ figuræ solidæ rotundæ figuram inscribere, alteramque circumscribere ex cylindris æquealtis, ita ut descriptarum differentia minor sit quolibet dato solido.

Est

Esto cylindrus ABC
D, cuius axis EF: datoq;
intra cylindrum solido
AED circa eundem axē
EF reuoluto, siue hemis-
pheriū, siue conus, vel co-
noides fit, oportet ipsi so-
lido AED duas figuras
ex cylindris æquealtis cō-
positas, alteram quidem
inscribere, alteram verò circumscribere ita vt circumscripta su-
peret inscriptam minori excessu quā fit quodlibet datum soli-
dum K.



Secetur bifariam cylindrus AC plano HG ad axem EF ere-
cto; iterumq; cylindrus HD bifariam secetur plano IL; & hoc
fiat semper donec cylindrus aliquis puta AL minor remaneat
quā solidum K. Tunc diuiso toto cylindro AC in cylindros
æquealtos ac ipse AL, oriantur in solido AED sectiones MN,
OP. QR. Concipiamus super vnoquoq; circulorum MN, OP,
QR, duos cylindros, alterum quidem versus E, alterum autem
versus partes F conuersum. Eruntq; omnes simul cylindri qui
verticem habent versus F, æquales omnibus simul cylindris
verticem versus E habentibus (cum singuli singulis æquales sint)
Ergo si omnibus cylindris qui verticem habent versus E, addas
cylindrum AL, superabit iam figura circa solidum AED descri-
pta, figuram eidem inscriptam, differentiā AL; Nempe minori
excessu quā fit solidum K. Quod erat &c.

Corollarium.

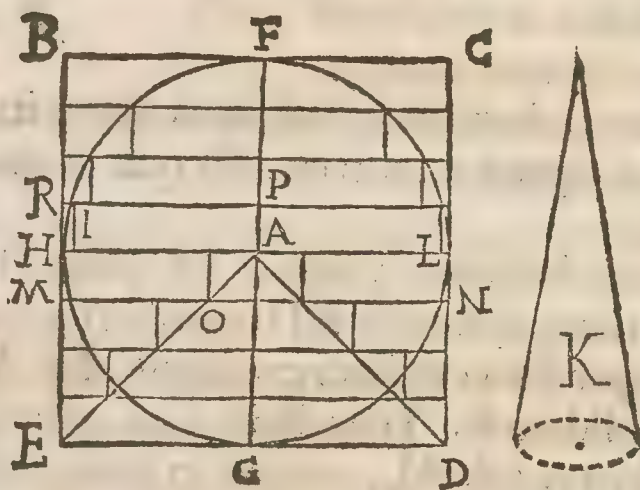
*Hinc patet quòd data figura solida, siue hemispherium sit, siue
conus, siue conoides &c. ipsi duę figure solide ex cylindris aque-
altis compositę altera inscribi potest, altera vero circumscribi; ita
vt differentia inter datam solidam figuram, & descriptarū alteru-
tram, minor sit quolibet dato solido K,*

*Differentia enim inter figuram datam & alteram descripta-
rum minor utiq; erit quam differentia inter descriptas (est enim*

Propositio XXX.

Sphæra quadrupla est conici cuiusdam, qui quidem conus basis habeat equalem maximo sphære circulo, altitudinem vero eiusdem sphære semidiametro æqualem.

Esto circulus
 cuius centrum
 A; quadratum
 ipsi circumscri-
 ptum sit BCD
 E; iunctisque
 EA, AD.
 conuertatur fi-
 gura circa
 axem FG ita
 ut à quadrato
 fiat cylindrus,
 à sphæra circulus; à triangulo EAD, conus EAD.



Dico sphæram quadruplam esse conici EAD. Nisi enim quadrupla sit, non erit hæmisphærium equale solido, quod describitur à triangulo EHA. circa axem FG. conuerso (cum hoc solidum duplum sit conici EAD.) Erit itaq; hæmisphærium vel maius, vel minus solido trianguli EHA.

per 29.
huius Esto primum maius, si potest esse; sitque excessus æqualis solido k. Inscribatur in hæmisphærio figura ex cylindris æquealtis constans ita ut ab hæmisphærio deficiat minori defectu quàm sit solidum K. Et erit figura inscripta adhuc maior quàm solidum trianguli EHA. Secetur etiam axis AG in tot partes æquales in quot sectus erit AF. Ductisq; per puncta sectionum planis ad axem erectis, intelligatur in solido trianguli EHA. inscripta figura ex tubis cylindricis æquealtis constans, quorum vnus sit, cuius sectio est rectangulum HO.

Iam cylindrus IL ad tubum cylindricum HO, est ut quadra-
 tum

per 28
hujus.

A diagram of a cone. A vertical line segment connects the apex to the center of the circular base. The letter 'K' is placed near the center of the base.

per 29.
huius.

Iam primus cylindrus HV figuræ circa hemisphærium descri-
ptæ, æqualis est primo tubo cylindrico figuræ circumscriptæ so-
lido trianguli EHA; nam & iste tubus, cylindrus est HE.

Secundus cylindrus GI ad secundum tubum LM, est vt qua-
dratum GN ad rectangulum LTF, nempe æqualis (quadratum
enim GN, æquale est rectangulo ONP, siue LTF, nam recta O
Nre-

per 28.
huius.

N rectæ BQ, siue LE, siue LT, æq ualis est, & reliqua NP reli-
quæ TF.)

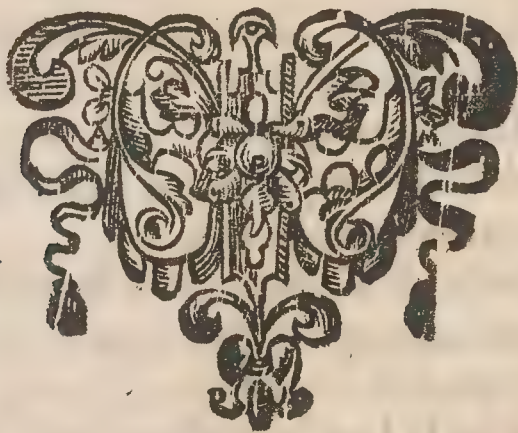
Ergo omnes simul cylindri figuræ circa hemisphærium descri-
ptæ, hoc est eadem figura, æqualis erit omnibus simul tubis cy-
lindricis circa solidum trianguli EHA descriptis, cum singuli
singulis æquales sint. Sed figura circa hemisphærium descrip-
ta minor erat solido trianguli EHA. Necesse igitur est quòd so-
lidum trianguli EHA maius sit, quam figura sibi circumscripta.
pars suo toto. Quod esse non potest.

Hemisphærium igitur neque maius, neque minus erit solido
trianguli EHA, sed ipsi æquale, solidum verò trianguli EHA du-
plum est coni EAD, ergò hemisphæriū duplum erit coni EAD,
Sphæra verò eiusdem quadrupla erit, Quod erat propositum.

Corollarium.

*Hinc patet sphæram subsesquialteram esse cylindri, cuius ba-
sis æqualis sit maximo sphære circulo, altitudo verò diametro
sphære æqualis.*

*Nam sph. ostēditur esse ad conum EAD ut 4, ad unū, conus ve-
ro EAD ad cylindrū EBCD est ut unū ad 6. ergo ex æquo sphæ-
ra ad cylindrum EBCD erit ut 4. ad 6. Nempe subsesquialtera.*





DE SOLIDIS SPHAERALIBVS LIBER SECVNDVS.

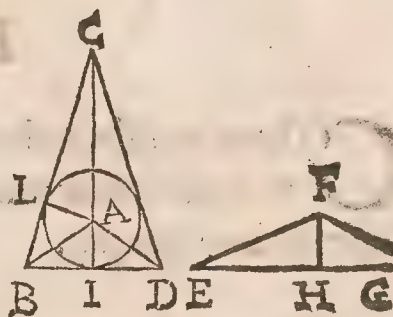


Propositio Prima.



ONVS quilibet circa sphæram descriptus, æqualis est cono cuidam, qui basim habeat æqualem vniuersæ superficiei circumscripti coni accepta etiam basi, altitudinem verò æqualem radio sphæaræ;

Esto circa sphæram, cuius centrum A , descriptus conus BCD , (qui videlicet sphæram tangat & lateribus, & basi) Ponaturq; alius conus EFG , qui basim habeat EG æqualem tum curvæ superficiei, tum etiam basi coni BCD , altitudinem verò HF habeat æqualem radio sphæaræ AL .



Dico

Dico conos BCD, EFG æquales esse.

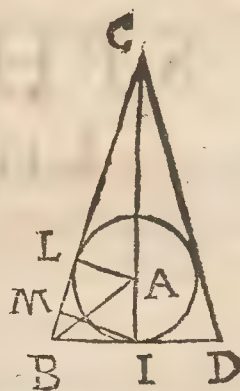
26 p. par
tis. Solidum enim conicum excavatum quod fit ex reuolutione
trianguli CBA circa axem IC, æquale est cono cuidam, qui ba-
sim habeat æqualem curvæ superficiei conicæ BCD, altitudinē
verò æqualem perpendiculari AL, nempe radio sphæræ: Talis
ergò conus vnà cum cono BAD (cum habeant eandem altitu-
dinem) æquales erunt cono EFG; Quandoquidem conus EFG
basim habet vtriq; simul basi æqualem, altitudinem verò alteru-
træ æqualem. Propterea & conus BCD, qui duobus prædictis
conis æquatur, æqualis erit cono EFG. Quod &c.

Aliter.

per 3. se-
xti. Ducatur IM equidistans ipsi AL. & quo-
niam angulus CBI diuiditur bifariam à linea
BA, erit ut CB ad BI, ita CA ad AI.

8. prim.
partis. Superficies ergò coni BCD sine basi, ad cir-
culum suæ basis est ut CB ad BI, nempe ut
CA ad AI, & componendo, & per conuersio-
nem rationis, erit vniuersa superficies coni
BCD cum basi, ad superficiem eiusdem coni
sine basi, ut IC ad CA, hoc est ut IM ad AL.

Propterea si reciprocè adhibeantur bases, & altitudines, erit
conus cuius altitudo AL, basis verò æqualis vniuersæ superficiei
coni BCD cum basi, æqualis cono cuius altitudo sit IM, basis ve-
rò curuatantum superficiei conica BCD, hoc est cono BCD (æqua-
les enim sunt, conus cuius altitudo IM, basis verò conica super-
ficies BCD; & conus BCD. per 22. huius.)



Propositio II.

Conus quilibet circa sphæram descriptus, est ad sphæram,
ut coni ipsius vniuersa superficies accepta etiam basi, ad
superficiem sphæræ.

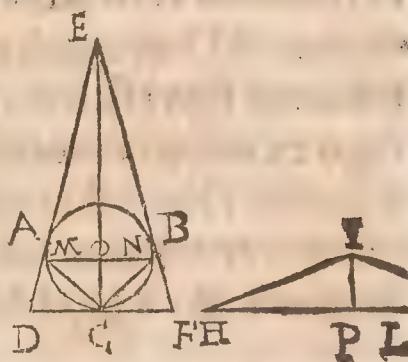
Esto circa sphæram ABC descriptus conus DEF; Dico hu-
iusmo-

iusmodi conum esse ad sphaeram, vt coni superficies vna cum basi, ad superficiem sphaere.

Ponatur conus HIL vt in praecedenti, cuius basis equalis sit integro perimetro coni DEF vna cum basi, altitudovero PI equalis radio sphaere OC, eritq; conus HIL equalis cono DEF.

Agatur per centrum O planum MN ad axem erectum, & in hemisphaerio MCN concipiatur conus MCN.

Iam conus DEF ad conum HIL (ob equalitatem) est vt totus perimenter coni DEF ad basim HL, conus autem HIL ad conum MCN, (cum eandem habeant altitudinē) est vt basis HL ad basim MN, conus denique MCN ad sphaera, est vt basis MN ad superficiem sphaere (nempe in ratione sub quadrupla) quare ex equo erit conus DEF ad sphaeram, vt vniuersus perimenter coni DEF ad superficiem sphaere. Quod &c.



per praeced.

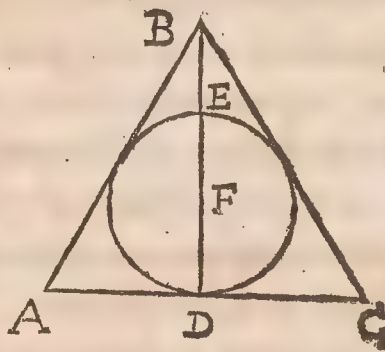
20. et 30
p. partis

Propositio III.

Conus quilibet circa sphaeram descriptus, est ad sphaeram, vt rectangulum contentum sub latere & semibasi coni tamquam vna linea, & sub semibasi, ad quadratū diametri sphaere.

Esto circa sphaeram, cuius diameter DE, descriptus conus quilibet ABC. Dico conum ad sphaeram esse vt rectangulum sub BAD tamquam vnā linea, & sub AD comprahensum, ad quadratū DE.

Curua enim superficies coni ABC ad circulum suae basis est vt BA ad AD, & componendo erit totus coni perimenter ad eundem circulum basis vt BA, AD simul ad AD; hoc est vt



3. p. pars

est vt rectangulum sub linea BAD, & sub AD ad quadratum AD; circulus verò basis conì, ad circulum circa DE, est vt quadratum AD ad quadratum DF, circulus denique circa DE ad sphaerae superficiem, est vt quadratum DF ad quadratum DE, ergò ex aequo vniuersus conì ABCA perimeter ad superficiem sphaerae (hoc est conus ipse ad sphaeram per praecedentem) erit vt rectangulum sub recta linea BAD, & sub AD, ad quadratum DE. Quod &c.

Corollarium.

Pro Corollario potest ostendi conum aequilaterum ad inscriptam sphaeram, esse vt 9. ad 4. Posito enim latere AC. 6. erit rectangulum sub latere cum semibasi, & semibasi 27. quadratum verò BD 27. & quadratum DE 12. ergo conus ad sphaeram erit vt 27 ad 12. siue vt 9. ad 4.

Scholium.

Possent hic Theoremata non pauca proponi circa solidorum circumscriptionem, & inscriptionem: qualia sunt.

Si circa sphaeram prisma concipiatur, quod singulis suis parallelogrammis sphaeram contingat; sitque eiusdem altitudinis, Erit prisma ad sphaeram, vt perimeter basis prismatis ad duas tertias peripherie maximi circuli sphaerae.

Si verò non eiusdem sit altitudinis; ratio prismatis ad sphaeram componetur ex praedicta, & ex ratione altitudinum; altitudo autem sphaerae diameter est.

Si cylindro circumscribatur prisma, quod singulis suis parallelogrammis superficiem cylindri contingat; sintq; eiusdem altitudinis. Erit prisma ad cylindrum, vt basis ad basim; nempe, vt perimeter basis prismatis, ad peripheriam basis cylindri: idem verum est de cono, & pyramidibus circumscriptis.

Si verò prisma, & cylindrus non eiusdem altitudinis fuerint; ratio componetur ex ratione perimetri ad peripheriam, & altitudinis ad altitudinem.

Si intra cylindrum inscribatur prisma eiusdem altitudinis, habens basim polygonam, regularem, & parilateram; Erit cylindrus ad prisma, vt peripheria basis cylindri ad perimetrum polygoni

Liber Secundus :

SI

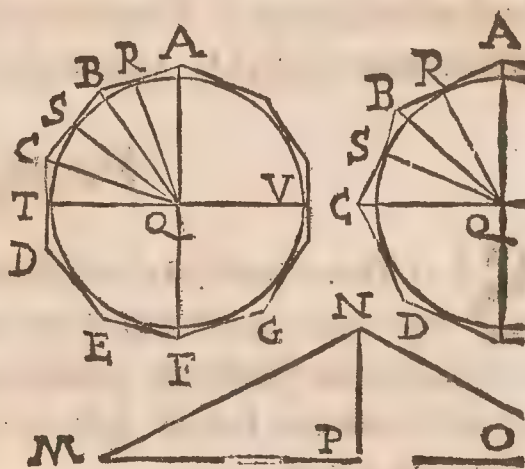
goni regularis in eodem circulo descripti, quod habeat latera multitudine subdupla poligoni basis prismatis. Quæ uera sunt etiam de cono, & pyramidibus inscriptis.

Quando uerò basis prismatis imparilatera fuerit, siue regularis, siue irregularis: Erit cylindrus ad inscriptum prisma, ut peripheria basis cylindri ad omnes sinus arcuum à lateribus basis prismatis subtenforum. Dummodo nullus arcus semicirculo maior sit. Quando uerò arcus aliquis semicirculo maior sit; & quando figurarum altitudo non sit eadem, & alia huiusmodi, omnia demonstrari possunt facili quidem negotio; sed institutum nostrum est non omnem solidorum inscriptionem, & circumscriptionem prosequi; sed illam, tantum, quæ circa spheram est, uel intra ipsam; Propterea ad inceptum reuertamur.

Propositio IV.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siue à quaternario, siue à binario mensurata, & reuoluatur figura circa diagonalem, erit factum sphaerale solidum aequale cono cuidam qui basim habeat aequalem superficiei solidi, altitudinem uerò semidiametro sphaerae aequalē.

Hoc autem quando numerus laterum mensuratur à quaternario demonstratum fuit ab Archimede Prop. 29. siue mauis 25. lib. p. de sph. & cylin. Quando uerò laterum numerus etiam à binario tantum mensuratur, ostendemus sic, eritque demonstratio (exceptis quæ de ultimo solido cylindrico dicentur) eadem cum ea quam affert Archimedes,



Esto poligonum ABCDEFG habens latera à binario tantum mensurata, ut in prima figura. Ergò semipoligonum AB
G 2 CDEF

CDEF habebit latera numero imparia, latusque vnum tanget circulum in puncto T, atq; ideo cylindricam superficiem in conuersione describet. Intelligatur conus MNO, cuius basis sit circulus MO æqualis vniuersæ superfici ei solidi sphæralis, altitudo verò PN, æqualis sit radio sphære. Dico sphærale solidum æquale esse cono MNO.

23. p. par
tis. Rombus enim solidus factus in conuersione figuræ à triangulo ABQ, æqualis est cono cuidam cuius basis æqualis sit conicæ superfici ei descriptæ à linea AB, altitudo verò sit radius QR.

24. p. par
tis. Solidum autem excauatum factum in conuersione à triangulo BCQ, æquatur cono cuidam cuius basis æqualis sit conicæ superfici ei descriptæ à linea BC. altitudo verò æqualis radio sphære QS. & sic semper procedatur. Vltimum denique solidum

25. p. par
tis. cylindricum excauatum descriptum à triangulo CTQ, æquale est cono cuidam, cuius basis æqualis sit superfici ei cylindricæ à linea CT factæ, altitudo verò æqualis sit semidiametro cylindri, QT; Et sic de solidis circa alterum hemisphærium TFFV descriptis. Ergo vniuersum sphærale solidum, æquale erit omnibus prædictis conis simul sumptis: iisdem autem omnibus prædictis conis æqualis est conus MNO (cum basim habeat omnibus simul illorum basibus æqualem, nempe superfici ei solidi sphæralis, altitudinem verò vnicuique illorum æqualem, nempe radio sphære.) Propterea prædictum solidum sphærale æquale erit cono MNO. Quod &c.

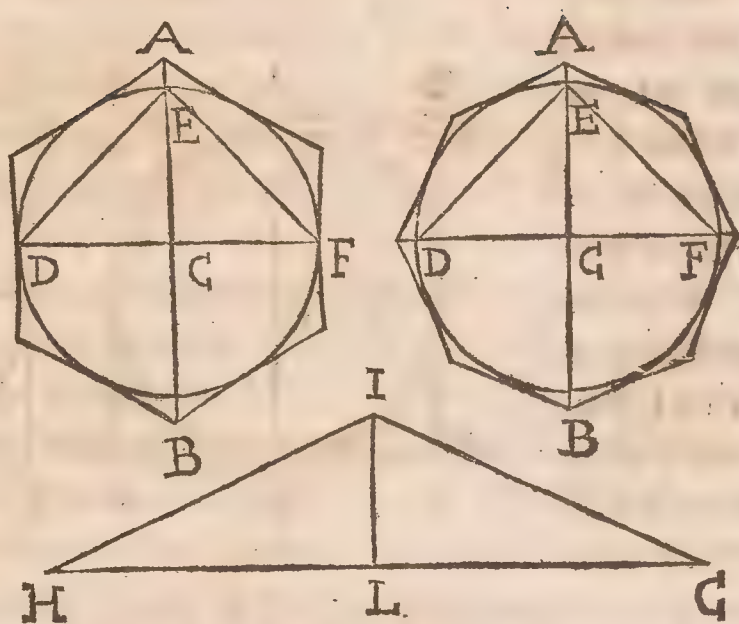
Propositio V.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa diagonalem: habebit factum sphærale solidum ad sphæram suam eam ratione, quam vniuersa solidi sphæralis superficies habet ad superficiem sphærae.

Manente præcedentis Propositionis constructione; Esto sphærale solidum cuius diagonalis, atque axis sit AB, centrum autem sphærae sit C. Dico sphærale solidum ad inscriptam
sibi

fibi sphaeram esse, ut superficies solidi ad superficiem sphaerae.

Inscribatur .n. in hemisphaerio conus DEF, & ponatur conus GIH cuius basis GH aequalis sit vniuersae superficiei solidi sphaeralis ut in praecedenti altitudo verò LI



aequalis radio sphaerae, & erit per praecedentem sphaerale solidum aequale cono GIH.

Propter aequalitatem ergò, erit sphaerale solidum ad conum GIH ut superficies vniuersa sphaeralis solidi ad basim coni GIH; conus autem GIH ad conum DEF (ob aequalem altitudinē) est ut basis circa GH ad basim circa DF; conus denique DEF ad sphaeram, est ut basis circa DF ad superficiem sphaerae (nēpe in ratione subquadrupla.) Propterea erit ex aequo sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram ut vniuersa sphaeralis solidi superficies ad superficiem sphaerae. Quod &c.

Propositio VI.

SI circa circulum describatur polygonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa diagonalem, erit factum sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram ut axis solidi ad axem sphaerae.

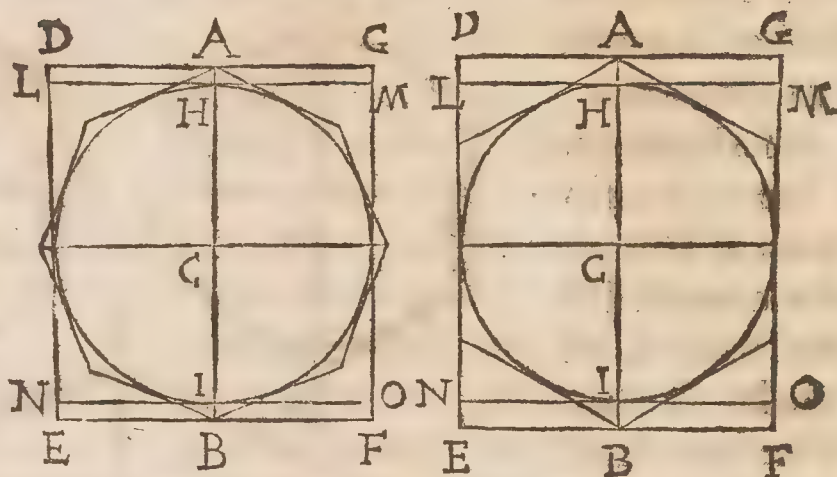
Manente praecedentium constructione; esto sphaerale solidum, cuius diagonalis, atque axis sit AB, centrum verò sphaerae sit C, & diameter HI.

Dico

54 De Sphæra, & solidis sphæralib.

Dico sphæ-
rale solidū
ad inscrip-
tā sibi sphæ-
ram esse vt
AB ad HI.

Circum-
scribatur n:
circa sphæ-
ram cylin-
drus NLM
O. agantur



que per extremitates axis A, B, plana ad axem erecta DG, EF.
per extremitates verò diametri HI. plana LM, NO.

Erit, per præcedentem, sphærale solidum ad sphæram vt su-
perfacies sphæralis solidi ad superficiem sphære; hoc est, (sum-
ptis æqualibus) vt superficies cylindri DEFG, ad superficiem
cylindri LNOM, hoc est vt AB ad HI. Quare sphærale soli-
dum ad sphæram est vt axis solidi ad diametrum sphære. Quod
&c.

per 15.
p. partis.
18. p. par-
tis.
prima p.
partis.

Propositio VII.

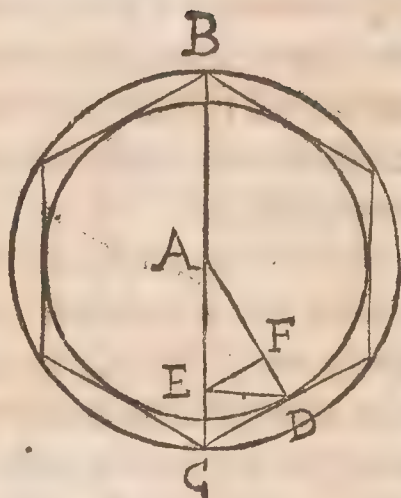
SI intra circulum describatur polygonum habens latera nu-
mero paria, & conuertatur figura circa diagonalem, erit
sphæra ad inscriptum sibi sphærale solidum, vt quadratum dia-
metri sphære, ad quadratum cateti polygoni.

Sit. n. circ. cuius cent. A, & diamet. BC polygonum regulare,
cuius diagonalis sit linea BC, & conuertatur figura circa BC. Di-
co sphæram circumscriptam ad inclusum sphærale solidum, esse
vt quadratum AC, ad quadratum cateti polygoni AD. Ducatur
enim DE ex D. perpendicularis ad BC, & EF perpendicularis
ad AD, eruntq; in continua proportionem quatuor rectę AC, AD,
AE, AF. Concipiatur etiam radio AD aliam sphæram descri-
bi,

4. sexsi.

bi, quæ singulas conicas superficies solidi sphaeralis continget; necnon cylindricam, si quam huiusmodi sphaerale solidum habebit.

Erit itaque sphaera maior ad sphaerā minorem, vt CA ad AF ; minor verò sphaera ad sphaerale solidum, quod sibi circumscribitur (per præcedentem) est vt DA ad AC , hoc est, vt AF ad AE ; Propterea ex æquo erit circumscripta sphaera maior, ad inscriptum solidum sphaerale, vt CA ad AE ; nempe vt quadratum CA ad quadratum AD . Quod erat &c.



*ultima
duodeci-
mi.*

Propositio VII.

SI circa sphaerale solidum, natum ex reuolutione poligoni circa diagonalem reuoluti, sphaera circumscribatur, & altera inscribatur. Habebit circumscripta sphaera ad solidum, duplicatam rationem illius, quam habet solidum ad inscriptam sphaeram.

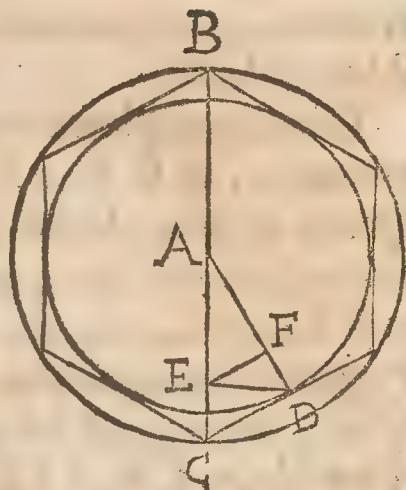
Repetita figura Propositionis præcedentis; cum sit circumscripta sphaera ad solidum vt quadratum CA ad quadratum AD ; solidum verò ad inscriptam sibi minorem sphaeram, vt CA ad A *6. huius.* D ; patet rationem circumscriptæ sphaeræ ad solidum sphaerale duplicatam esse illius quam solidum habet ad inscriptam sphaeram. Quod &c.

Propositio IX.

SI circa sphaerale solidum, natum ex reuolutione poligoni circa diagonalem reuoluti, sphaera circumscribatur, & altera inscribatur: Erit superficies solidi sphaeralis media proportionalis inter superficies duarum sphaerarum.

Manan-

Manente figura, & constructione praecedentium propositionum. Dico tres superficies, nempe maioris sphaerae, solidi sphaeralis, minorisq; inscriptae sphaerae, esse inter se in continua proportionem.



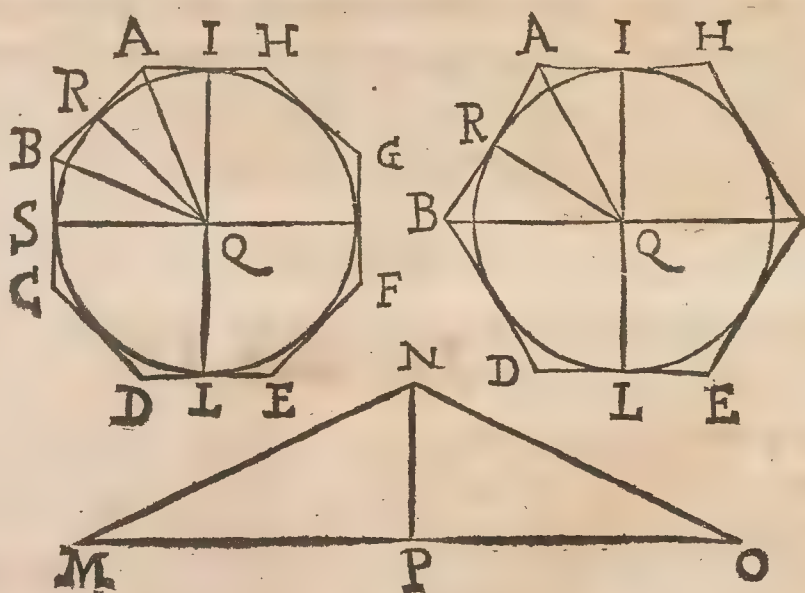
Ostenditur in 6. huius.

Superficies enim circumscriptae sphaerae est ad superficiem inscriptae, ut quadratum CA ad quadratum AD; superficies autem solidi ad superficiem eiusdem inscriptae sphaerae, est ut recta CA ad rectam AD: Ergo tres superficies praedictae sunt in continua proportionem; & quidem perimenter sphaeralis solidi medius proportionalis est inter superficies duarum sphaerarum. Quod &c.

Propositio X.

SI circa circumulum describatur polygonum habens latera numero paria, siue à quaternario, siue tantum à binario mensurata; & conuertatur figura circa catetum; Erit factum sphaerale solidum aequale cono cuidam, cuius quidem basis aequalis sit vniuersae superficiei solidi sphaeralis, altitudo verò aequalis radio sphaerae.

Est circa circumulum figura polygonae aequilatera ABCDEH. habens la



tera

tera numero paria, & conuertatur figura circa catetum IL , orieturq; solidum contentum sub conicis, circularibus, & vna cylindrica superficie, quando numerus laterum à quaternario mēsuratur; quandò verò à binario tantum, tunc erit solidum sphærale sub conicis, & circularibus tantum superficiebus compræhensum. Dico vtrumq; sphærale solidum æquale esse cono cuidam MNO , qui basim habeat æqualem vniuersæ solidi sphæralis superficiei, altitudinem verò PN æqualem radio sphærae.

Hoc ostendetur similiter vt propositione 4. factum est. Nam conus qui fit à triangulo IAQ in conuersione circa axem IL , æquatur cono qui basim habeat æqualem circulo qui fit ex radio IA , altitudinem verò æqualem radio sphærae QI , quia idem prorsus est. Solidum autem excauatum, quod fit à triangulo ABQ , æquale probatur cono cuidam, cuius basis æqualis sit conicæ superficiei factæ à linea AB , altitudo verò sit QR . radius sphærae. ^{24. p. pag. 115.} Vltimum denique cylindricum solidum excauatum, factum à triangulo BQS (quando poligoni latera à quaternario mensurantur, aliàs cylindricum solidum nullum est) ^{25. p. pag. 115.} æquatur cono cuius basis æqualis sit cylindricæ superficiei factæ à linea BS . altitudo verò sit QS ; & sic de altero hemisphærio. Propterea vniuersum sphærale solidum æquale erit omnibus prædictis conis simul sumptis; & ideo æquale erit etiam cono MNO , qui omnibus illis simul sumptis æquiualeat; (quando quidem basim habet omnibus simul illorum basibus æqualem ex suppositione; altitudinem verò vnicuique illorum æqualem, nempe radium sphaerae.) Quod &c.

Propositio XI.

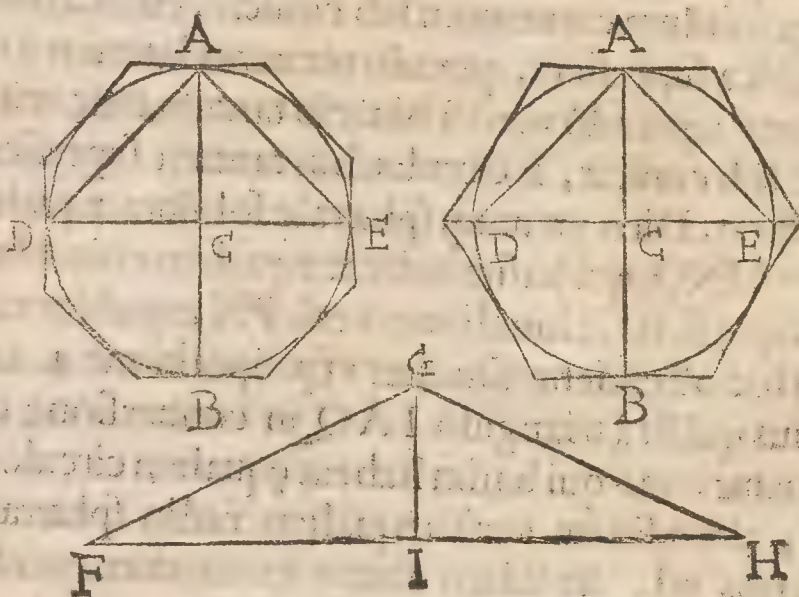
SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum, habebit factum sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram eam rationem, quam vniuersa solidi sphaeralis superficies habet ad superficiem sphaerae.

Manente præcedentis propositionis cōstructione, esto sphærale

H

ræle

rale solidū
cuius cate-
tus, & axis
sit AB ; cen-
trum autem
sphærae sit
 C . Dico
sphærale so-
lidum ad in-
scriptam sibi
sphæram ef-
fe vt vniuer-
sa ipsius soli-
di superfici-
es ad superficiem sphærae.



Concipiatur enim in hemisphærio conus DAE , & intelligatur alius conus FGH , cuius basis FH aequalis sit vniuersae superficiei solidi sphæralis, altitudo verò IG equalis radio sphærae; & erit per præcedentem sphærale solidum aequale cono FGH .

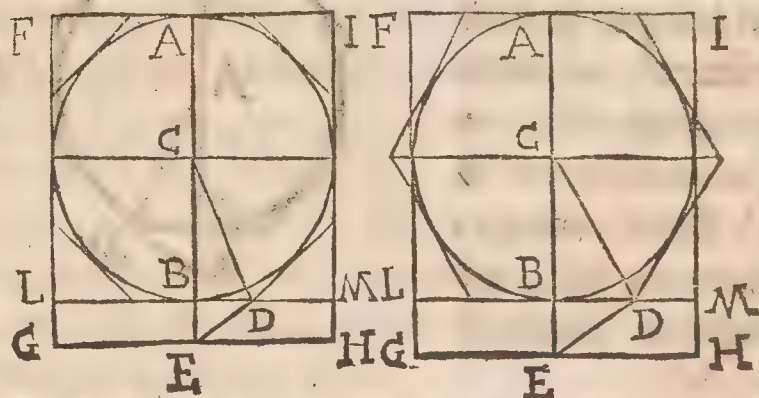
Propter aequalitatem ergo, erit sphærale solidum ad conū FGH , vt superficies vniuersa sphæralis solidi, ad basim coni FGH , conus autem FGH , ad conum DAE (ob æqualem altitudinem) est vt basis circa FH , ad basim circa DE ; denique conus DAE , ad sphæram, est vt basis circa DE ad superficiem sphærae (nēpe in ratione subquadrupla:) Propterea erit ex æquo sphærale solidum ad inscriptam sibi sphæram, vt vniuersa sphæralis solidi superficies ad superficiem sphærae. Quod &c.

Propositio XII.

SI circa circulum describatur polygonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum; Habebit factum sphærale solidum ad inscriptam sibi sphæram, eam rationem, quam habet composita recta linea ex diametro sphærae, & ex tertia proportionali (si fiat vt semidiameter sphærae ad semi-

semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam,) ad diametrum sphæ-
ræ.

Manente præ-
dentium propo-
sitionum cōstru-
ctione, esto sphæ-
rale solidū cuius
c atetus, & axis
sit AB; centrum
autem sphæræ sit
C. Fiat angu-



lus CDE rectus, eritq; BE tertia proportionalis ad semidiametrum CB, & semilatus poligoni BD. Dico sphærale solidum ad inscriptā sibi sphærā esse vt EA ad AB; nempe vt composita ex diametro sphæræ AB, & tertia proportionali BE, ad diametrum sphæræ AB. Concipiatur circa sphæram descriptus cylindrus FLML, & per puncta A; B; E. producantur plana FI, LM, GH, ad axem erecta.

Erit ergo, per præcedentem, sphærale solidum ad inscriptā sibi sphæram, vt superficies solidi ad superficiem sphæræ; hoc est, sumptis æqualibus, vt superficies cylindri FGHI. ad superficiem cylindri FLML; hoc est vt linea AE ad AB. Quod &c.

16. pri.
partis.
18. p. par-
tis.

Propositio XIII.

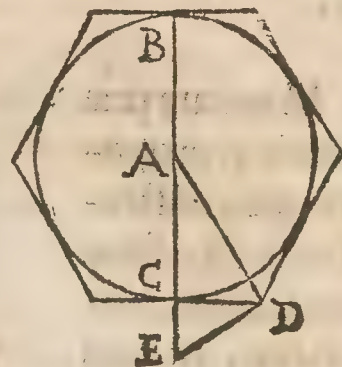
SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum; erit factū sphærale solidum ad suam sphæram, vt duo quadrata, nempe vt quadratum diagonalis, & quadratum cateti simul, ad duplum quadrati eiusdem cateti.

Esto circa circulum, cuius centrum A, descriptum poligonum habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum BC: factoque angulo recto ADE, erit (per præcedentem)

H 2 soli-

60 *De Sphaera, & solidis sphaeralib.*

solidum sphaerale
ad suam sphaeram
vt EB ad BC. Di-
co insuper solidū
sphaerale ad suam
sphaeram esse, vt
quadratum ex A
D, simul cum qua-
drato ex AC, ad
duplum quadrati
ex AC.



per pre-
ced.

Nam EA ad AC est vt quadratum DA ad quadratum AC;
& componendo, erunt EA, & AC simul, hoc est tota EB, ad
AC, vt duo quadrata DA, AC simul ad quadratum AC; sum-
ptisque consequentium duplis, erit EB ad BC (hoc est solidum
sphaerale ad sphaeram) vt duo quadrata DA, AC simul, ad du-
plum quadrati ex AC. Quod &c.

Propositio XIV.

SI intrā circulum describatur polygonum habens latera nu-
mero paria, & connertatur figura circā catetum; erit sphæ-
ra ad inscriptum sibi solidum, vt integra diameter sphære, ad se-
cundam simul, & quartam proportionalium, in ratione semi-
diametri sphaerae ad semicatetum polygoni.

Sit in circulo cuius diameter AB po-
ligonum habens latera numero paria,
& conuertatur figura circa catetū CD:
Ducanturque perpendiculares DF ad
rectā HE, & FI ad HD; & erunt qua-
tuor lineae EH, HD, HF, HI, in conti-
nua ratione semidiametri HE ad semi-
catetum HD. Dico sphaerā ad inscri-
ptum solidum esse, vt dupla HE ad v-



tramq;

tramq; simul DH, HI. Vel vt integra diameter sphæræ ad CI.

Intelligatur alia sphæra intra solidum inscripta. Erit ergo exterior sphæra ad interiorem, vt EH ad HI, siue vt dupla EH ad duplam HI; interior verò sphæra ad solidum sphærale est, vt duo quadrata ex HD, ad duo quadrata HD, HE, hoc est vt duo quadrata ex HI, ad duo quadrata ex HI, HF, hoc est (vt *ultima duodecimi.* *per pgs.* infra ostendemus) vt dupla HI ad HI, HD; Propterea erit ex æquo sphæra exterior ad inscriptum sibi sphærale solidum, vt dupla HE, hoc est integra diameter sphæræ, ad HI, & HD simul; quæ quidem sunt secunda, & quarta in ratione semidiam. sphæræ ad semicatetum poligoni. Quod &c.

Quod autem assumptum est ostendemus. Dico vt duo quadrata ex HI ad duo quadrata simul HI, HF. ita esse duplam HI ad HI, HD.

Nam ob angulum rectum HFD, erit vt quadratum F H ad quadratum HI, ita recta DH ad HI, & componendo, sumptisque consequentium duplis, erit vt quadrata FH, HI, ad duo quadrata ex HI, ita duæ rectæ DH, HI, ad duplam HI. Conuertendo ergò, erunt duo quadrata ex HI, ad duo quadrata HI, HF. vt dupla HI, ad HI, HD simul. Quod erat &c.

Propositio XV.

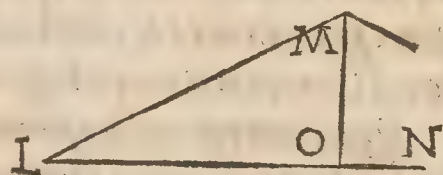
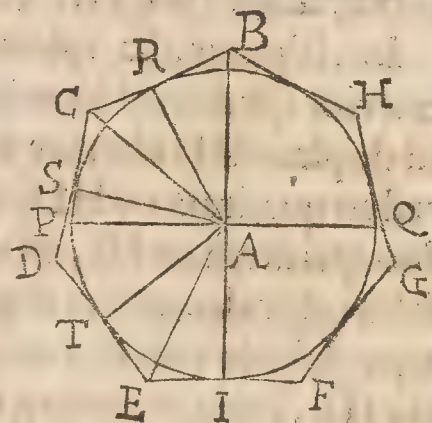
SI circà circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum poligoni, erit factum sphærale solidum æquale cono cuidam, cuius basis æqualis sit vniuersæ superficiei solidi, altitudo verò radio sphæræ sit æqualis.

Esto circuli centrum A, polig. verò perimeter BCDEFGH. Et sint latera eius numero imparia; conuertaturque figura circa catetum BI, vt oriatur solidum sphærale contentum sub conicis superficiebus vnicoque circulo circa diametrum EF descripto. Ponatur iam conus LMN, qui basim habeat æqualem vniuersæ superficiei sphæralis solidi, altitudinem verò OM æqualem radio

62 De Sphæra, & solidis sphæralib.

radio sphæaræ AI. Dico solidum sphærale æquale esse cono LMN.

Agatur per centrum sphæaræ planum PQ ad axem erectum, quod transuersè, secabit aliquod latus poligoni, puta CD.



23 p. partis.

Erit iam rombus solidus, factus à conuersione triang. BCA, æqualis cono, qui basim habeat æqualem conicæ superficiei factæ à lineâ BC; altitudinem autem æqualem radio sphæaræ AR. Solidum verò conicū excauatum quod fit

24 p. partis.

ex gyro trianguli CPA, æquale erit cono, qui basim habeat æqualem superficiei, quæ fit à lineâ CP, altitudinem verò æqualem radio sphæaræ AS. Solidum quoque

27 p. partis.

excavatum, factum ex reuolutione trianguli PDA, equatur cono, qui basim habeat æqualem superficiei conicæ quæ fit à motu lineæ PD, altitudinem autem æqualem radio sphæaræ AS. Eadem prorsum eodem modo dicuntur de solido conico excavato, factò à triangulo DAE; & de vltimo cono factò à reuolutione trianguli EIA. Propterea totum sphærale solidum æquale erit omnibus prædictis conis simul sumptis, vel cono LMN, qui omnibus illis prædictis equiualeat: (habet enim basim omnibus simul illorum basibus æqualem, altitudinem verò æqualem unicuiq; illorum.) Quod &c.

Scholium.

Attulimus in hac Propositione Theor. 23. 24. & 27. p. partis; Nam ex gyro trianguli BCA oritur rombus solidus vt in 23. p. partis. Ex gyro trianguli CPA oritur solidum quoddam excavatū, quale relinquitur si ex cono auferatur rombus solidus: vt in 24. p. partis. Denique ex conuersione trianguli DPA oritur solidum quoddam excavatum habens basim circularem PQ: quale relinquitur si ex frusto conico conus auferatur habens basim eandem

cum

cum maiore basi frusti conici, altitudinem quoque eandem ut in Prop. 27. p. partis.

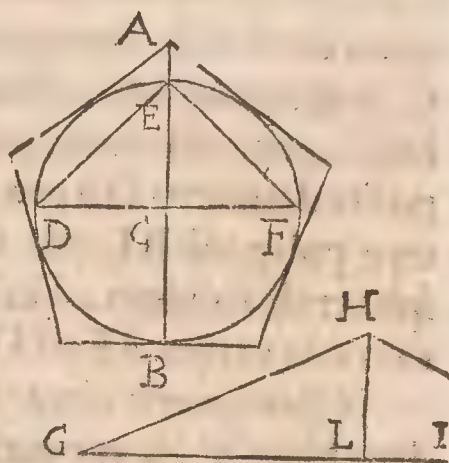
Propositio XVII.

SI circa circulum describatur polygonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum; habebit factum sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram, eam rationem quam vniuersa sphaerale soli di superficies habet, ad superficiem sphaerae.

Manente praecedentis propositio-
nis constructione, sit sphaerale soli-
dum cuius catetus, siue axis sit AB,
centrum verò sphaerae sit C. Di-
co sphaerale solidum ad inscriptam
sibi sphaeram esse, ut ipsius solidi
integra superficies ad superficiem
sphaerae.

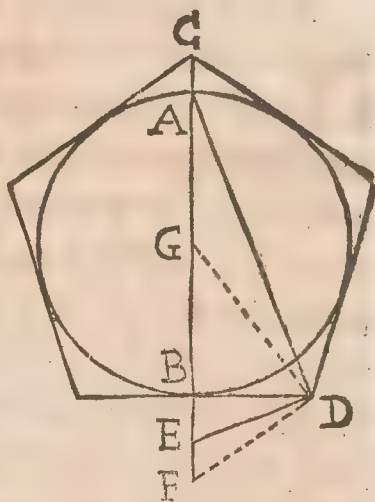
Concipiatur in hemisphaerio
conus DEF; & intelligatur conus
GHI cuius basis GI equalis sit vni-
uersae superficiei solidi sphaeralis, altitudo verò LH aequalis
sit radio sphaerae, & erit per praecedentem, sphaerale solidum
aequale cono GHI.

Propter aequalitatem ergò, erit sphaerale solidum ad conum
GHI, ut superficies vniuersa sphaeralis solidi, ad basim conu G
HI; conus autem GHI ad conum DEF (ob aequalem altitudi-
nem) est ut basis circa GI, ad basim circa DF. conus denique
DEF, ad sphaeram est, ut basis circa DF ad superficiem sphae-
rae (nempe in ratione subquadrupla.) Propterea erit ex aequo,
sphaerale solidum ad inscriptam sibi sphaeram, ut vniuersa sphae-
ralis solidi superficies ad superficiem sphaerae. Quod &c.



tio rectae GB ad GD continuata fuerit in tribus terminis.

Estō circulus cuius diameter AB, centrum verò G, ipsiq; circumscribatur polygonum habens latera numero imparia, cuius catetus sit CB, & conuertatur figura circa CB; Factoque angulo GDF. recto, erit ratio rectae GB ad GD continuata in tribus terminis GB, GD, GF; vti propositum est. Dico solidum ad sphaeram esse, vt GF, GB, simul cum GD bis sumpta, ad ipsam GB quater sumptam.



Fiat alius angulus ADE rectus; eritq; solidum ad sphaeram per praecedentem, vt CE ad diametrum sphaerae AB, hoc est vt EG, GD simul, ad diametrum sphaerae (sunt enim aequales GC, GD) hoc est vt dupla EG, & dupla GD. ad duas diametros, hoc est vt FG, GB cum dupla GD, ad quatuor semidiametros GB. Quod erat demon. &c. *ostenditur infra*

Quod autem assumptum fuit, ostendemus sic. Dico ipsam EG bis sumptam, aequalem esse duabus FG, GB.

Quoniam ob angulum rectum, rectangula ABE, GBF, aequalia sunt eidem quadrato BD, aequalia erunt & inter se; ideoque latera eorum reciproca, nempe vt AB ad BG subduplam, ita erit FB ad BE subduplam; aequales ergo sunt FE, EB. & tres rectae GF, GE, GB. sunt in proportionē Aritmetica; ideo EG bis sumpta aequalis erit duabus FG, GB. Quod &c.

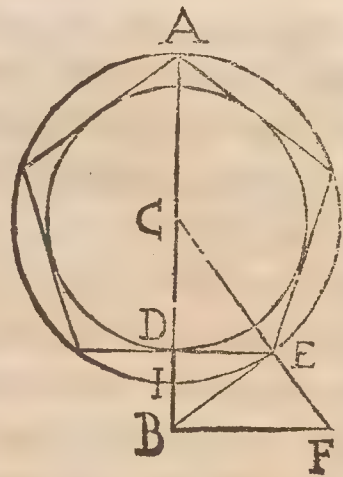
Propositio XIX.

SI intra circulum describatur polygonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum polygoni, erit sphaera inscriptum sibi sphaerale solidum, vt sunt quatuor simul maximi termini, ad maiorem reliquorum semel, & medium bis, & minorem semel sumptum (quando proportio CD
I ad CE

66 De Sphaera, & solidis sphaeralib.

CE continuata erit in quatuor terminis.)

Sit circulus cuius diameter AI, centrum verò C, & inscribatur polygonum habens latera numero imparia; tum convertatur figura circa catetum AD. Fiantque anguli CEB & CBF recti, eritque ratio CD ad CE continuata in quatuor terminis CD, CE, CB, CF. Dico sphaeram ad inscriptum sibi solidum sphaerale esse, ut CF quater sumpta, ad CB semel, CE bis, & CD semel, simulque sumptas,



*Ultima
duodeci-
mi.*

Intelligatur alia sphaera cuius semidiameter CD: inscripta in solido. Erit ergo maior sphaera ad minorem ut cubus EC ad cubum CD. vel recta FC ad CD, uel ut FC quater, ad CD quater; sphaera uerò minor inscripta, est ad solidum sphaerale, (perprecedentem) ut CD quater sumpta, ad CB semel, CE bis, & CD semel: Propterea erit ex equo, maior, siue circumscripta sphaera, ad suum sphaerale solidum, ut CF quater sumpta, ad CB semel, CE bis, & CD semel sumptas. Quod &c.

Scholium.

Haecenus sex praecipua Theoremata de solidis sphaeralibus demonstrata sunt. Sequuntur nunc quaedam scitu non iniucunda, & ad doctrinam spectantia.

Propositio XX.

SI intra sphaeram descriptum sit sphaerale solidum pariliterum, circaq; diagonalem reuolutum: erit sphaera ad excessum, quo ipsa solidum superat, in duplicata ratione diametri sphaerae ad latus polygoni.

Sit in circulo cuius centrum A descriptum polygonum habens latera

latera numero paria, & conuertatur circa diagonalem BC . Dico spheram ad excessum, quo ipsa solidum superat, esse ut quadratum BC ad quadratum CD .

Ducatur AE ex centro perpendicularis ad latus CD , & producat.

Quoniam per demonstrata, est ut sphaera ad solidum sphaerale ita quadratum FA ad quadratum AE , erit per conuersionem rationis sphaera ad excessum, vt quadratum FA ad differentiam quadratorum FA , AE , hoc est ad rectangulum FE , G , siue ad quadratum EC . Constat ergo sphaeram ad excessum quo ipsa superat inscriptum sphaerale solidum esse vt quadratum FA ad quadratum EC , siue vt quadratum BC ad quadratum CD . Quod &c.

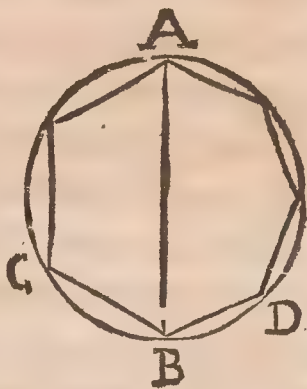


1. baian

Propositio XXI.

SI in eadem sphaera duo solida parilatera, & circa diagonalem reuoluta, concipiantur, erit differentia vnus a sphaera, ad differentiam alterius a sphaera, homologe in duplicata ratione laterum,

Sint in circulo cuius diameter AB duo semipoligona ACB , ADB ; & conuertatur figura circa diagonalem AB . Dico differentiam inter sphaeram, & sphaerale solidum ACB , ad differentiam inter sphaeram & sphaerale solidum ADB , esse vt quadratum CB ad quadratum BD .



per praeced.

per eandem

Demonstratum enim est differentiam ACB , esse ad sphaeram, vt quadratum BC , ad quadratum AB , sed sphaera ad differentiam ADB , est vt quadratum AB ad quadratum BD , ergo ex aequo erit differentia ACB ad differentiam ADB vt quadratum BC ad quadratum BD . Quod &c.

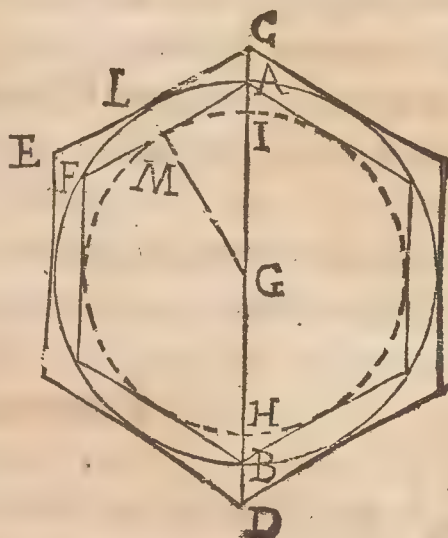
Propositio XXII.

SI eidem sphæræ duo solida parilatera, & similia, circaque diagonalem reuoluta, alterum circumscribatur, alterum verò inscribatur; superficies sphæræ media proportionalis erit inter superficies duorum solidorum.

Sit circulus, cuius diameter AB atque ipsi duo poligona, alterum circumscribatur, alterum verò inscribatur, habeatq; vtrumq; latera numero paria, & sit numerus laterum vnius æqualis numero laterum alterius, vt spheralia solida similia euadant. Tum conuictatur figura circa diagonalem CD.

Dico superficiem factæ sphæræ mediam proportionalem esse inter superficies factorum solidorum. Ducatur ex centro G recta GL ad contactus M & L, & radio GM fiat sphæra IMH.

Iam superficies solidi AF ad superficiem sphæræ IM intra ipsum inscriptæ est vt solidum AF ad sphæram IM, per 5. huius, nempe vt axis AG ad GM, per 6. huius, hoc est vt rectangulum AGM ad quadratum GM; Superficies verò sphæræ IM ad superficiem sphæræ ALF est vt quadratum GM ad quadratum GA. Ergò ex æquo superficies solidi AF ad superficiem sphæræ ALF erit vt rectangulum AGM ad quadratum GA, nempe vt recta MG ad GA. vel vt recta LG ad GC. Sed superficies sphæræ ALF ad superficiem solidi CE est vt LG ad GC. (quod probatur eodem modo vt factum fuit supra) ergo in continua proportionem sunt superficies vniuersa solidi AMF, superficies sphæræ ALF. & superficies solidi CE. Quod erat &c.



Corollarium .

Hinc patet etiam quod si eidem solido sphaerali parilatero circa diagonalem reuoluto duæ sphaeræ, altera circumscribatur, altera verò inscribatur, tres superficies in continua proportionem erunt inter se .

Propositio XXXIII.

Sphaeralia solida parilatera circa diagonalem reuoluta, & eidem sphaeræ, vel æqualibus sphaeris circumscripta, inter se sunt vt axes .

Sint circa circulum cuius centrum A duo poligona dissimilia, quorum latera numero paria sint, & conuertantur circa diagonalem . Sitq; alterius factorum solidorum BFC, axis BC; alterius verò nempe DGE, esto axis DE, Dico solidum BFC, ad solidum DGE esse vt BC ad DE .



Hoc autem patet . Quoniam solidum BFC ad sphaeram est vt BC ad diametrum HI; sphaera vero ad alterum solidum DGE est vt diameter HI ad axem DE, erit ex æquo, solidum BFC . ad solidum DGE, vt BC ad DE . Quod erat &c. 6. huius. ex eod.

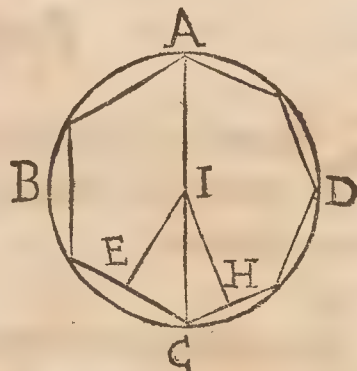
Hinc facile ostendi potest excessum, quo solidum BFC superat sphaeram, ad excessum quo solidum DGE superat eandem sphaeram, esse vt BH, ad HD .

Cum enim solidum BFC ad sphaeram sit vt BA ad AH, erit diuidendo excessus BFC ad sphaeram, vt BH ad HA . Eadem ratione sphaera ad excessum DGE erit, vt HA ad HD; ergo ex æquo, excessus BFC ad excessum DGE, supra sphaeram erit vt BH, ad HD . Quod &c. 6. huius.

Propositio XXIV.

Solida sphæralia parilatera, eidem, vel æqualibus sphæris inscripta, & circa diagonalem reuoluta, sunt inter se in duplicata ratione catetorum.

Inscribantur in circulo cuius diameter AC duo semipoligona ABC, ADC, & conuertatur figura circa diagonalem AC, vt describantur duo solida sphæralia vt imperatum est.



Dico solidum sphærale factum ex poligono ABC, ad solidum sphærale factum ex poligono ADC, esse vt quadratum cateti IE, ad quadratum cateti IH.

*7. huius.
per ean-
dem.*

Solidum enim ex ABC ad sphæram, est vt quadratum IE ad quadratum IC; sphæra autem ad solidum ADC, est vt quadratum IC ad quadratum IH; ergo ex æquo solidum ABC ad solidum ADC erit, vt quadratum IE ad quadratum IH. Qqod erat &c.

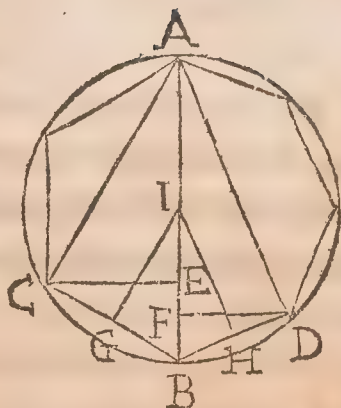
Propositio XXV.

Si intra æquales, vel eandem sphæram, cuius diameter AB, descripta fuerint duo solida sphæralia parilatera, quorum duo latera sint BC, BD; demittanturque ex punctis C, D, perpendiculares CE, DF ad diametrum; erit solidum cuius latus BC, ad solidum cuius latus BD, vt AE ad AF.

Ducantur enim ex centro I ad latera BC, BD perpendiculares IG, IH.

Recta EA ad rectam AB, est vt quadratum AC ad quadratum AB (ob angulum in semicirculo rectum ACB) recta autem BA ad AF, est vt quadratum AB, ad quadratum AD, ergo ex æquo

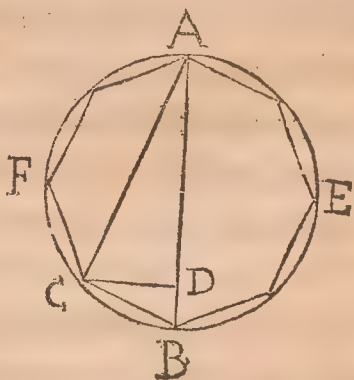
æquo recta EA ad rectam AF, est vt quadratum AC ad quadratum AD, hoc est vt quadratum IG ad quadratum IH, hoc est vt solidum cuius latus est BC ad solidum cuius latus est BD. Quod erat &c.



per præced.

Propositio XXVI.

SI intra sphæram cuius diameter AB descriptum sit solidum sphærale parilaterum, & circa diagonalem reuolutum; demittaturque ab extremitate lateris BC quod diâmetrum contingit, recta CD perpendicularis ad diâmetrum circuli AB, erit conus cuius basis circulus AFCBE altitudo verò sit AD, subduplus solidi sphæralis; conus verò, cuius eadem sit basis, & altitudo DB, erit subduplus differentiæ, quæ inter sphæram, & solidum sphærale est.



7. huius.

Sphæra enim ad inscriptum solidum est vt quadratum diametri ad quadratum cateti AC (est enim AC ob angulum rectum ACB, æqualis cateto poligoni,) hoc est vt BA recta ad rectam AD.

Iam quia conus, cuius basis AFCBE altitudo verò sit AB; æqualis est hæmisphærio in eadem basi constituto; erit dictus conus, hoc est hæmisphærium, ad conum cuius basis eadem AFCBE, altitudo verò AD, vt AB ad AD. Sed hæmisphærium etiam ad semisolidum est vt AB ad AD; vt ostendimus supra. Propterea conus cuius basis circulus AFCBE, altitudo autem AD, erit æqualis semisolido sphærali, siue subduplus solidi sphæralis. Quod &c.

ex 30. p. partis.

Similiter inferetur, conum cuius basis eadem AFCBE, altitudo verò DB, subduplum esse excessus illius, quo sphaera solidum superat.

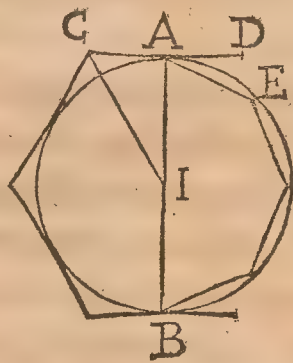
Scholium.

Demonstramus etiam singula illa solida rotunda annularia, quæ describuntur in reuolutione figuræ à bilineis mixtis, quale unum est FC , & solidum sphærale circundant; equalia esse singulis spheroidibus, quarum uniuscuiusq; maximus circulus sit circa diametrum FC . Axis verò æqualis sit portioni rectæ ex AB , quæ intercipitur inter duas perpendiculares ad ipsam AB ductas ex punctis F & C . & sic de reliquis. Sed hoc alibi.

Propositio XXVII.

SI eidem circulo duo poligona parilatera alterum circumscribatur, alterum verò inscribatur; & conuertatur circumscriptum quidem circa catetum, inscriptum verò circa diagonalem; erit differentia inter circumscriptum & sphæram, ad differentiam inter sphæram & inscriptum, vt quadratum lateris circumscripti ad duplum quadrati lateris inscripti.

Estō circuli diameter AB , latus verò poligoni circumscripti CD . & inscripti AE . Dico excessum, quo maius solidum sphæram superat, ad excessum, quo sphæra superat minus esse vt quadratum CD ad duo quadrata ex AE .



13. bu-
ius.

Solidum enim circumscriptum est ad sphæram vt duo quadrata CI , IA

20. bu-
ius

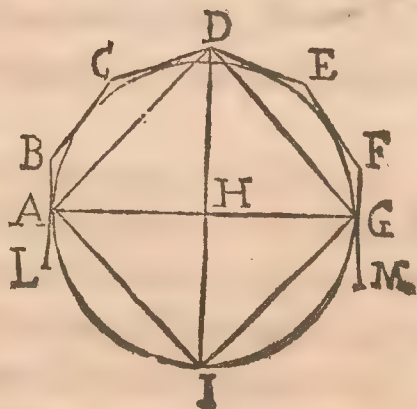
ad duplum quadrati ex IA ; ergo diuidendo, erit excessus solidi supra sphæram, ad ipsam sphæram, vt quadratum CA ad duplum quadrati ex IA , siue vt quadr. CD , ad duplū quadr. ex AB . Sphæra autem ad excessum, quo ipsa superat minus solidum, est vt quadratū AB ad quadratum AE , vel vt duo quadrata ex AB ad duo quadrata ex AE . Propterea ex æquo excessus solidi maioris supra sphæram, ad excessum sphære supra minus solidum, erit

erit vt quadratum ex CD ad duo quadrata ex AE . Quod &c.

Propositio XXVIII.

Quodlibet sphærale solidum circa diagonale reuolutum (cuius latera numero quidem paria sint, sed nullo modo à quaternario mensurentur, vt sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c.) inscripti sibi rombi solidi duplum est.

Sit solidum quale dictum est AB $CDEFG$. circa axē siue diagonalem DI reuolutum. Manifestū est quod duo latera opposita BL . FM . contingant sphæram in extremitatibus A , G , diametri AG , quæ quidem perpendicularis sit ad DI ; quādoquidē laterum numerus à binario tantum mensuratur, non autem à quaternario.



Inscribantur iam duo coni; nempe ADG in semisolido, habens altitudinem HD .; conus verò AIG in hemisphærio. Erit igitur semisolidum $ABCDEFG$ ad hemisphærium vt axis ad axem, nempe vt DH ad HI , hoc est vt conus ADG ad conum AIG (cum sint in eadem basi;) & permutando semisolidum ad suum conum ADG , erit vt hemisphærium ad suum conum AIG ; quare duplum erit. Propterea omne solidum, quale dictum est duplum erit inscripti sibi rombi solidi, Quod &c.

6. huius.

Lemma.

Si hemisphærium ABC , & conus quicumque rectus DBE eandem altitudinem habuerint FB ; erit hemisphærium ad prædictum conum vt duplum basis hemisphærij ad basim eiusdem coni.

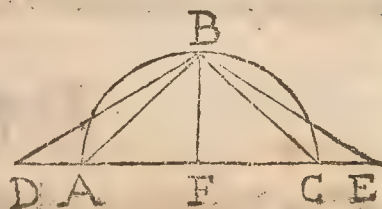
Sit vt ponitur: Et inscribatur in hemisphærio conus ABC . Erit ergo conus ABC ad conum DBE vt basis AC ad basim DE ;

K

sum-

74 De Sphæra, & solidis sphæralib.

sumptisq; antecedentium duplis, erit hemisphærium ABC ad conum DBE ut duplum basis AC ipsius hemisphærij, ad DE basim conij. Quod erat &c.

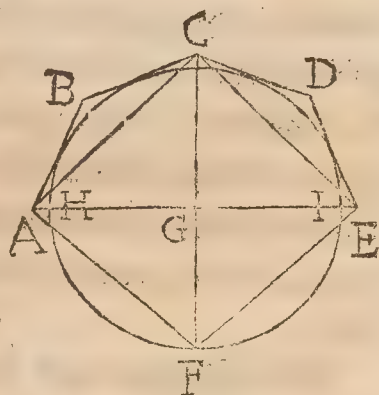


Propositio XXIX.

Quodlibet sphærale solidum circa diagonalem reuolutum, cuius latera à quaternario mensurentur, ad inscriptum sibi rombum solidum, est ut superficies inscriptæ sibi sphærae, ad semisuperficiem circumscriptæ.

Sit solidum quale dictum est $ABCD-E$. cui inscribatur semirombus, hoc est conus ACE ; ad altitudinem verò hemisphærij sit conus AFE , in basi AE .

Obuius. Erit ergo semisolidum ad hemisphærij ut axis ad axem, hoc est ut CG ad GF , siue ut conus ACE , ad conum AFE (sunt enim in eadem basi) & permutando erit semisolidum ad suum conum ACE , ut hemisphærium ad alterum conum AFE , hoc est per lemma præmissum, ut duo circuli ex HI , ad circulum ex AE , vel sumptis duplis, ut quatuor circuli ex HI , ad duos circulos ex AE ; hoc est ut superficies inscriptæ intra solidum sphærae, ad semisuperficiem circumscriptæ. Propterea etiam dupla eandem rationem habebunt, hoc est totum sphærale solidum ad inscriptum sibi rombum solidum erit ut dictum est. Quod &c.



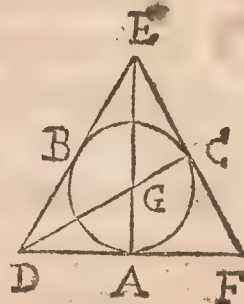
Poterat etiam concludi; solidum sphærale prædictum esse ad inscriptum sibi rombum, ut inscriptus in poligono circulus ad semicirculum circumscriptum; vel ut quadratum cateti GH ad semiquadratum diagonalis GA eiusdem poligoni.

Lemma.

Si in triangulo æquilatèro inscriptus fuerit circulus. Erit circu-

circulus alter cuius diameter sit latus trianguli, triplus inscripti circuli.

Inscribatur circulus ABC in triang. æquilat. DEF . Sitque G punctum, centrum & circuli, & trianguli; propterea DG dupla ipsius GC , hoc est ipsius GA . Ergo quadr. DG quadruplū est quadrati ex GA . & quadratum DA triplum erit eiusdem GA ; Quare etiam circulus cuius semidiameter sit DA triplus erit circuli cuius semidiameter sit CA . Quod erat &c.

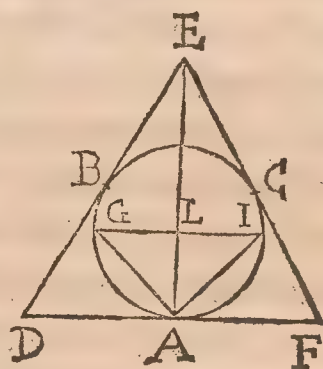


Propositio XXX.

SI circa circum descriptum fuerit triangulum æquilaterum & reuoluatur figura, erit factus conus æquilaterus ad inscriptam sibi sphaeram vt 9. ad 4.

Esto circa circum ABC triangulum æquilaterum DEF , & conuertatur figura. Dico factum conum æquilaterum esse ad inscriptam sphaeram in proportionem dupla sesquiquarta, nempe vt 9. ad 4.

Concipiatur in hemisphærio GAI conus GAI . Erit iam per lemma præcedens circulus cuius diameter DF triplus circuli cuius diameter GI ; sed conus DEF ad conum GAI rationem habet compositam ex ratione altitudinum EA ad AL ; quæ tripla est: Et ex ratione basium; nempe circuli DF ad circulum GI quæ similiter tripla est: quare conus DEF ad conum GAI erit vt 9. ad vnum, sumptisq; consequentium quadruplis, erit conus DEF ad sphaeram sibi inscriptam, vt 9. ad 4. Quod erat &c.



Propositio XXXI.

SI circa eandem sphæram descripti sint conus, & cylindrus, ambo æquilateri; erunt tria solida, nempe conus, cylindrus, & sphæra in continua proportionē sesquialtera.

Hoc autem patet. Posita enim sphæra vt 4. erit (per Corollarium Prop. 30. p. partis) cylindrus vt 6; conus autem ostensus est in præcedenti esse vt 9. Quare tria solida erunt inter se in continua proportionē sesquialtera. Quod &c.

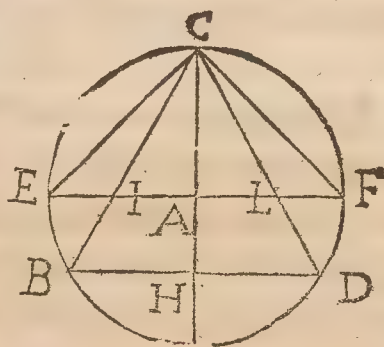
Propositio XXXII.

SPHæra adinscriptum sibi conum æquilaterum est in ratione numeri 3 2. ad 9.

Sit in circulo cuius centrum A inscriptum triangulum æquilaterum C B D. & cōuertatur figura circa CH. Dico sphæram esse ad factum conū æquilaterum sibi inscriptum vt 3 2. ad 9.

Ducatur diameter EF ad angulos rectos ipsi CH, & concipiatur in hemisphærio conus ECF: Punctum A erit centrum tum circuli, tum etiam trianguli æquilateri BCD, propterea CH sesquialtera erit ipsius CA.

Sed cum etiam ICL sit triangulum æquilaterum, erit CA potentia tripla ipsius AI, ergo & circulus ex CA, siue ex AE triplus erit circuli ex AI; ideoq; conus ECF, triplus coni ICL. videlicet vt 24. ad 8. Conus autem ICL ad conum BCD ob similitudinem, est vt cubus AC ad cubum CH, nimirum vt 8. ad 27. Quare ex æquo erit conus ECF ad conum BCD vt 24. ad 27. Reductaque ratione ad minimos terminos, erit conus ECF ad conum BCD vt 8. ad 9. Sumptis igitur antecedentium quadru-



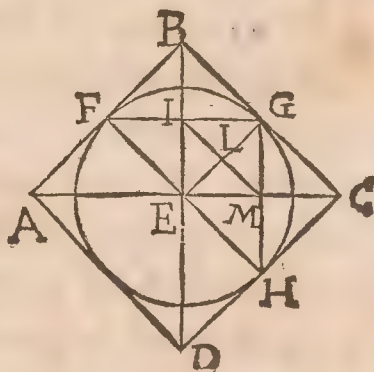
quadruplis sphaera ad inscriptum sibi conum æquilaterum erit vt 32.ad 9. Quod erat &c.

Propositio XXXIII.

Rombus solidus æquilaterus circa sphæram descriptus est ad ipsam sphæram vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Esto quadratum **ABCD** circa circum cuius centrum **E**; & voluatur figura circa diagonalem **BD**; Dico rombū solidum æquilaterum factum ex reuolutione, esse ad sphæram vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Intelligatur in hemisphærio conus **FGH**, cuius basis **FH**, altitudo **EG**, & ducatur **IM**.



Erit iam conus **ABC** cuius basis **AC**, similis cono **FGH**, vterque enim rectus & rectangulus est. Ergo conus **ABC** ad conū **FGH** erit vt cubus **BE**. ad cubum **EG**, nempe vt recta **BE** ad **EL**. (sunt enim **EB**, **EG**, **EI**, **EL** in continua ratione) sumptis autem consequentium duplis, erit conus **ABC** ad hemisphæriū, vt **BE** ad **EG**, & propterea totus rombus solidus ad totam sphæram sibi inscriptam erit vt **BE** ad **EG**, hoc est vt diameter alicuius quadrati ad latus eiusdem. Quod &c.

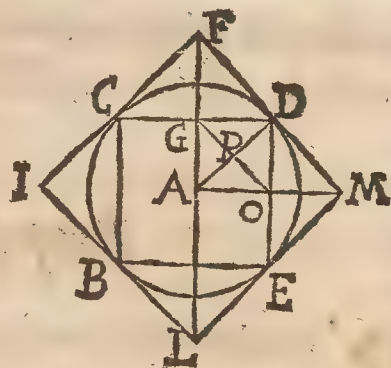
Propositio XXXIV.

Sphæra ad inscriptum sibi cylindrum æquilaterum est vt diameter quadrati ad 3. quart. lateris eiusdem.

Describatur intra circum cuius centrum **A** quadratum **BCDE**, & voluatur figura circa catetum **AG**. Dico sphæram ad cylindrum **BCDE**, esse vt diameter alicuius quadrati ad 3. quart. lateris eiusdem.

Intel-

Intelligatur circa sphæram alter cylindrus æquilaterus FILM. & producta AM iungantur AD, GO. Erunt ob similitudinem triangulorum, in continua ratione FA, AD, AG, AP; Et quia cylindri sunt similes, nempe æquilateri, erit cylindrus IFML ad cylindrum BCDE vt cubus FM ad cubum CD, hoc est vt cubus FD ad cubum DG, siue vt cubus FA ad AD, hoc est vt recta FA ad quartam AP. Sumptisque antecedentium subsequialteris, erit sphæra ad cylindrū BCDE vt duæ tert. ipsius FA ad AP; hoc est vt tota FA ad sesquialteram ipsius AP; siue (quod idem est) vt FA ad 3. quar. rectæ AD. Constat ergo sphæram ad inscriptum sibi cylindrum æquilaterum esse vt FA ad 3. quar. ipsius AD; hoc est vt diameter alicuius quadrati ad 3. quar. lateris eiusdem. Quod &c.



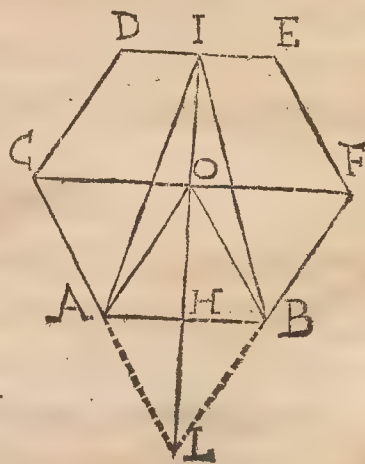
Propositio XXXV.

Solidum exagonale; hoc est sphærale solidum genitum ab exagono circa catetum reuoluto, septuplum est coni eandem sibi basim, & altitudinem habentis.

Esto exagonum æquilaterum, & equi-angulum ACDEFB & conuertatur circa catetum HI; inscribaturq; conus AIB. Dico exagonale solidum factum ex reuolutione, septuplum esse coni AIB.

Producantur CA, FB donec concurrant in aliquo puncto L, eruntque ob exagonum, quatuor triangula æquilatera OCA, OAB, OBF, ABL, æqualia inter se.

Concipiatur ergo conus CLF perfectus; eritque conus AIB duplus coni ALB, quandoquidem eandem habet basim AB, sed altitu-



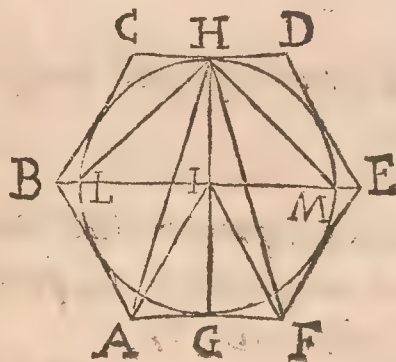
titudinem habet HI duplam ipsius HL.

Iam conus CLF. ad conum ALB, erit ob similitudinem, vt cubus CL ad cubum LA, nempe vt 8. ad 1; & diuidendo semi-solidum CABF erit ad conum ALB, vt septem ad vnum. Propterea etiam dupla eandem rationem habebunt, hoc est solidū exagonale integrum septuplum erit coni AIB. Quod erat &c.

Propositio XXXVI.

SI circa circulum describatur exagonum, & reuoluatur figura circa catetum; erit sphæra sextupla coni, qui eandem basim, & eandem altitudinem cum solido habeat.

Esto circa circulum cuius centrū I exagonum ABCDEF. & conuertatur circa catetum GH; inscribatur que in facto solido exagonali conus AHF, qui basim habeat circulum circa AF, altitudinemverò GH eandem cum solido. Dico sphæram sextuplam esse coni AHF.



Concipiantur duo alij coni; nempe LHM in hemisphærio, & AIF super basi AF constitutus ad centrum I.

Erit ergo propter exagonum, triangulum AIF æquilaterum, & ideo ipsa IG tripla erit potentiā ipsius GA. Constat igitur quod circulus cuius diameter LM (dupla scilicet ipsius IG) triplus erit circuli cuius diameter AF, & propterea conus LHM triplus erit coni AIF. Sphæra autem duodecupla erit coni AIF, & ideo sextupla coni AHF. Quod erat &c.

Propositio XXXVII.

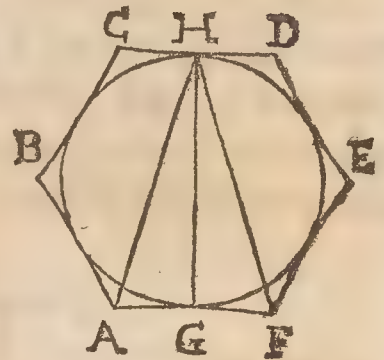
SI circa circulum describatur exagonum, & voluatur figura circa catetum; erit factum solidum ad factam sphæram seiquisextum.

Esto

80 *De Sphæra, & solidis sphæralib.*

Esto circa circulum cuius centrum I
exagonum ABCDEF. & conuertatur fi-
gura circa catetum GH. Dico solidum
sphærale factum, esse ad sphæram vt 7.
ad 6.

Concipiatur enim in solido conus A
HF, vt in duabus præcedentibus propo-
sitionibus.



*per præ-
ced.*

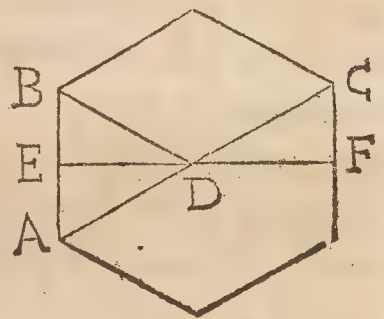
Erit ergo (per 35. huius) solidum exa-
gonale ad conum AHF vt 7. ad vnum, co-
nus autem AHF ad sphæram est vt 1. ad 6.; quare ex æquo erit so-
lidum ad sphæram vt 7. ad 6. Quod &c.

Lemma.

*Linea diagonalis exagoni potentia sesquitertia est cateti eius-
dem.*

*Sit exagonum ABC cuius centrum D.
Dico diagonalem AC potentia esse sesqui-
tertiam cateti EF.*

*Hoc autem patet. Nam ducta DB. erit
ABD triangulum æquilaterum, ob exago-
num; & AD latus erit potentia sesquiter-
tium perpendicularis DE; ergo sumptis li-
neis duplis, etiam AC sesquitertia erit po-
tentia ipsius EF. Quod &c.*



Propositio XXXVIII.

Sphæra inscripti sibi solidi exagonalis circa diagonalem re-
uoluti, sesquitertia est.

Sit in circulo cuius centrum A descriptum exagonum BCDEF
G; iunctisq; DH, DL, DM, DI, conuertatur figura circa diago-
nalem DG. Dico sphæram inscripti solidi exagonalis sesqui-
ter-

tertiam esse. Circulus enim, cuius diameter HI, sesquitertius est circuli cuius diameter LM (per lemma præcedens) ergo conus HDI sesquitertius est coni LDM, sumptisque quadruplis, erit sphaera sesquitertia solidi exagonalis. Quod erat &c.

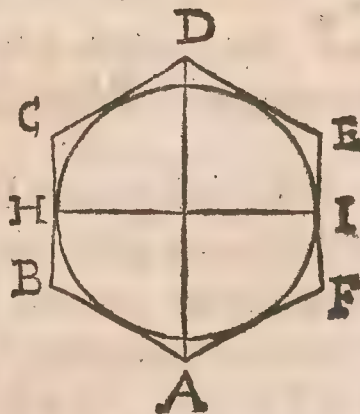


Assumptum fuit solidum exagonale quadruplum esse coni LDM. hoc enim patet ex propositione 28. huius.

Propositio XXXIX.

SI idem exagonum dupliciter reuoluatur, nempe circa catetum, & circa diagonalem; Erit solidum circa catetum reuolutum, ad solidum circa diagonalem, in subduplicata ratione numerorum 49. ad 48. Nempe vt radix q. num. 49. ad radicem q. num. 48.

Esto exagonum æquiangulum, & æquilaterum ABCDEF, quod vtroq; modo concipiatur reuolutum, nempe circa catetum HI & circa diagonalem DA; vt inde fiant duo solida sphæralia inter se diuersa specie; & intra vtrūq; intelligatur sphaera inscripta. Manifestum iam est (per lemma Propositionis præcedentis) diagonalem AD potentiâ sesquitertiam esse cateti HI. Si ergo ponatur HI rationalis 6. erit AD radix quadrata numeri 48.



Manentibus his. Solidum circa catetum reuolutum, ad inscriptam sphæram est vt 7. ad 6; Sphaera autem ad solidum reuolutum circa diagonalem est vt HI, ad AD, nempe vt 6. ad rad. q. num. 48. Quare ex æquo erit, solidum circa catetum, ad solidum circa diagonalem vt 7. ad radicem quadratam numeri 48.

L

Nem-

37 huius

6 huius.

82 De Sphæra, & solidis spherilib.

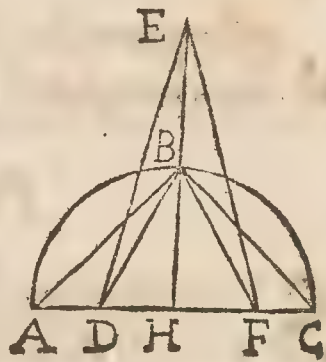
Nempe in subduplicata ratione numerorum 49. 48. Quod erat &c.

Lemma.

Si hemisphærium altitudinem habuerit subduplam alicuius coni: erit hemisphærium ad conum prædictum, ut basis ad basim.

Habeat hemisphærium ABC altitudinem HB subduplam altitudinis HE coni DEF. Dico hemisphærium ad conum DEF, esse ut circulus AC ad circulum DF.

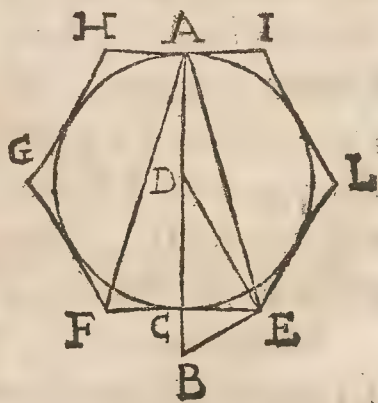
Concipiantur enim duo alij coni ABC in hemisphærio, & DBF super basi DF. Erit ergo conus ABC ad conum DBF, ut basis AC ad basim DF; sumptisq; duplis, erit hemisphærium ad conum DEF ut basis AC ad basim DF. Quod erat &c.



Propositio XL.

Solidum parilaterum circa catetum reuolutum ad inscriptum sibi conum, rationem habet quam AB ad BC; facto scilicet angulo DEB recto.

Esto polygonum FGHILE habens latera numero paria, descriptum circa circulum cuius centrum D. & conuertatur figura circa catetum CA, fiatq; angulus DEB rectus. Dico solidum ad inscriptum sibi conum FAE, esse ut AB ad BC.



82 huius · Erit enim solidum ad sphæram ut B A ad AC, sumptisq; consequentium dimidijs, erit solidum ad hemisphærium ut B A ad DC, sed (per lemma præcedens) hemisphærium est ad conum FAE, ut circulus ex DC ad circulum ex CE; siue ut recta DC ad CB; ergo ex æquo erit sphærale so-

le solidum ad inscriptum sibi conum FAE , vt AB ad BC . Quod erat &c.

Propositio XL I.

Conus inscriptus in solido circa catetum reuoluto, æqualis est excessui quo solidum inscriptam sibi sphæram superat.

Manente figura & constructione præcedentis. Dico si sphæra auferatur à solido $FGHILE$, quòd residuum, quod superest, ablata sphæra, æquale erit cono FAE .

Est enim sphærale solidum ad sphæram vt BA ad AC ; & per *12 huius* conuersionem rationis, solidum ad illud residuum erit vt AB ad BC . Sed (per præcedentem) solidum ad inscriptum sibi conū est vt AB ad BC . Aequalis est ergò conus FAE , in solido sphærali inscriptus, omnibus simul solidulis annularibus quæ circa sphæram sunt; siue differentiæ, quæ est inter solidum inscriptamque in solido sphæram. Quod erat &c.

Propositio LXII.

Hemisphærium ad excessum quo sua sphæra superatur à solido sphærali circa catetum reuoluto, duplicatam rationem habet diametri sphæræ ad latus poligoni, ex cuius reuolutione solidum genitum fuerat.

Manente præcedentium figura, & constructione. Dico hemisphærium, ad differentiam inter solidum, & inclusam sphæram, esse vt quadratum AC , ad quadratum FE .

Est enim sphæra ad solidum circumscriptum vt CA ad AB ; *12 huius* & diuidendo, sphæra ad differentiam inter sphæram & solidū, erit vt AC ad CB ; sumptisque antecedentium dimidijs, erit hemisphærium ad prædictam differentiam, vt DC ad CB , hoc est vt quadratum DC ad quadratum CE ; vel vt quadratum AC ad quadratum FE . Quod erat &c.

Aliter.

13 huius Sphæra ad solidum est ut duo quadrata ex CD ad duo simul quadrata CD, DE . Ergo diuidendo erit sphæra ad differentiam inter ipsam & solidum ut duo quadrata ex CD ad quadratum CE sumptisq; antecedentium dimidijs, erit hemisphærium ad differentiam inter sphæram & solidum, ut quadratum DC ad quadr. CE , siue ut quadratum AC ad quadratum FE . Quod &c.

Corollarium.

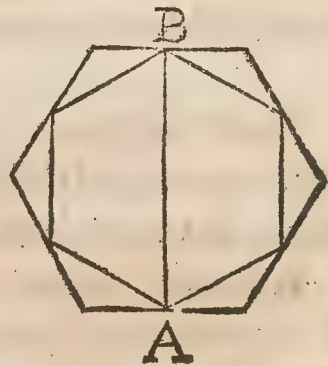
Constat etiam hemisphærium ad conum FAE inscriptum in spherali solido, esse in duplicat aratione AC ad FE , nempe axis cono ad diametrum basis eiusdem. Quandoquidem conus FAE demonstratus est equalis differentia inter solidum spherale inscriptamq; sibi sphæram.

Propositio XLIII.

SI exagono regulari simile exagonum inscribatur, ita ut inscripti anguli puncta media circumscriptorum laterum contingant, & conuertatur figura circà catetum maioris exagoni, erit solidum exagonale circumscriptum ad inscriptū ut 14. ad 9.

Sit ut ponitur: Conuertaturque figura circà AB ; circaq; AB diametrum cōcipiatur sphæra, quæ quidem maiori poligono inscripta erit, minori verò circūscripta.

per 37. Erit itaq; solidum maius ad sphæram
huius. ut 7 ad 6. nempe ut 14. ad 12; sphæra ve-
38 huius rò ad minus solidum erit ut 12. ad 9. Er-
gò ex æquo solidum maius ad minus erit
ut 14. ad 9. Quod erat &c.

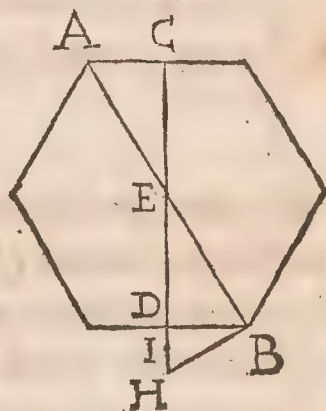


Propa-

Propositio XLIV.

Solidum sphærale factum ex reuolutione alicuius poligoni circa diagonalem, ad solidum ex reuolutione eiusdem poligoni circa catetum; est vt rectangulum sub diagonali, & cateto, bis sumptum, ad duo simul quadrata, quorum alterum ex diagonali fit, alterum autem ex cateto.

Esto polygonum regulare quodcumque, habens latera numero paria, cuius diagonalis sit **AB**, catetus verò **CD**. Et concipiatur polygonum conuerti duplici axe; nempe primùm circa diagonalem **AB**; & iterum circa catetum **CD**. Dico solidum ex diagonali ad solidum ex cateto esse, vt rectangulum **BED** bis sumptum, ad quadrata ex **BE**, & ex **ED**: siue vt eorum quadrupla.



Fiat angulus **EBH** rectus, seceturq; bifariam **DH** in **I**; eritq; **EI** media Aritmetica inter **ED**, **EH**: Iam solidum ex diagonali ad inscriptam sibi sphæram est, vt **AB**, ad **CD**; sphæra verò ad solidum ex cateto, est vt **CD**, ad **CH**; ergò ex æquo solidum ex diagon. ad solidum ex cateto, erit ut **AB** ad **CH**, siue ut **EB** ad **EI**, (sunt enim semisses rectarum **AB**, **CH**.) Cum autem **BE** media Geométrica sit inter **HE**, **ED**; ipsa uerò **EI** media Aritmetica sit inter easd. erit solidum ex diagonali ad solidum ex cateto ut media Geomet. ad mediam Aritmet. inter rectas **HE**, **ED**. Sed ratio rectæ **HE** ad **ED**, ead. est ac quadr. **BE** ad quadr. **ED**: propterea erit solidum ex diagonali ad solidum ex cateto, ut spatium medium proportionale Geometricum ad spatium medium Aritmeticum inter quadrata **BE**, **ED**. Spatium autem mediū Geometricum inter quadrata **BE**, **ED**. est rectangulum **BED**; medium verò Aritmeticum est quadratū **ED**, cum semisse quadrati **DB**. Ergo solidum ex diagonali ad solidum ex cateto erit
vt re-

6. *buius*

12 *buius*

86 De Sphæra, & solidis spherælib.

ut rectangulum BED ; ad quadratum ED cum semisse quadrati DB ; Vel (sumptis duplis) ut rectangulum BED , bis sumptum, ad quadratum ED bis, cum integro quadrato DB . Siue ut rectangulum BED bis sumptum, ad quadrata BE , ED . Quod erat &c.

Assumpsimus rectangulum BED , medium proportionale esse inter quadrata BE , ED . Hoc enim patet in propositis quibuscunque rectis duabus lineis.

Assumpsimus etiam quadratum ED cum semisse quadrati DB , esse medium Arithmeticum inter quadrata BE , ED . Quod patet quadratum enim BE superat quadratum ED quadrato BD .

Corollarium.

Hic pro Corollario demonstrari potest, solidum ex diagonali factum semper minus esse solido, quod fit ex cateto; quando idem polygonum conuertatur circa diagonalem, & circa catetum. Demonstratur hoc modo.

Quoniam rectangulum BED bis sumptum, minus est duobus quadratis BE , ED (sunt enim in continua ratione quadratum EB , rectangulum DEB , & quadratum ED , ideoque dupla media, minor est duabus extremis magnitudinibus.) Et est ut rectangulum BED bis sumptum ad quadr. BE , ED simul, ita solidum ex diagonali ad solidum ex cateto; Erit solidum ex diagonali minus quam solidum ex cateto. Quod erat &c.

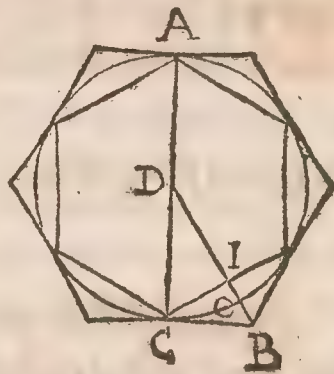
Si quis autem querat, quo excessu solidum ex cateto superet solidum ex diagonali. Hoc modo illum proportionem notum habebit.

Faciat ut duo quadrata BE , ED simul, ad quadratum quod fit ex differentiæ arcuum BE , ED , ita maius solidum ad aliud: Et habebit excessum quo maius solidum superat minus.

Propositio XLV.

SI intra polygonum regulare parilaterum inscribatur simile polygonum, ità vt anguli inscripti bisectiones laterum circumscripti contingant; conuertaturq; figura circa catetum maioris polygoni: Erit maius solidum sphaerale ad minus, vt sunt duo simul quadrata duarum diagonalium, ad duo quadrata minoris cateti.

Estō polygonum parilaterum ABC &c. intra quod inscribatur simile polygonum AIC &c. vti dictum est. Conuertaturq; figura circa AC catetum maioris polygoni. Dico solidum sphaerale ABC , ad solidum AIC esse vt duo quadrata simul duarum diagonalium, nempe BD, DC . ad duo quadrata minoris cateti DI . Circumscribatur solido AIC sua sphaera, quæ alteri solido inscripta erit.



Iam solidum ABC ad inscriptam sphaeram, est vt duo quadrata simul BD, DC ad duplum quadrati DC (per 13. huius.) Sphaera verò ad inscriptum solidum est, vt duplum quadrati DC ad duplum quadrati DI (per 7. huius.) Ergo ex æquo maius solidum sphaerale ad minus erit vt duo simul quadrata BD, DC ad duplum quadrati DI . Quod erat &c.

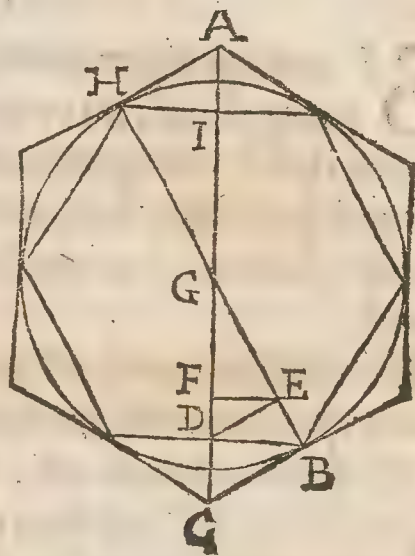
Propositio XLVI.

Iisdem positis: si conuertatur figura circa diagonalem maioris polygoni GC . Erit maius solidum ad minus, vt integer axis AC maioris solidi, ad vtramque simul, nempe semicatetum DG minoris, & quartam proportionalium GF ; si fiat vt semidia-
gonalis minoris ad semicatetum; ita semicatetus ad tertiam, & tertiam ad quartam.

Estō solidum quale positum est $ABCH$. cui inscriptum sit solidum

lidum IBD. vti dictum est. Ducatur, DE perpendicularis ad GB, & EF ad GC; eruntq; in continua proportionem CG, GB, GD, GE GF. ob angulos rectos.

Iam solidum maius ad sphæram est vt AC ad HB (per 6. huius) sphæra autem ad solidum minus est vt HB ad vtramque simul DG. GF (per 14. huius) Quare ex æquo solidum maius ad minus erit vt AC ad vtramque simul DG. GF. nempe quod propositum fuerat.



Corollarium.

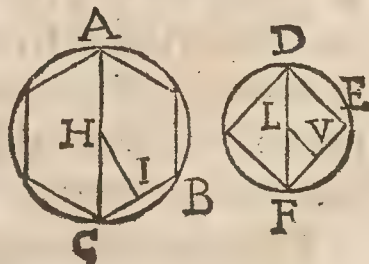
Quando solida prædicta ab exagono genita fuerint: demonstratur quod posita recta AC 32. DG. & GF nota sunt. nempe DG. 12. & GF. 9. Ergo in hoc casu solidum maius ad minus esset vt 32. ad 21.

Supereft nunc vt solida sphæralia absolutè considerata inter se conferamus, & hoc quot modis fieri poterit: quemadmodum in præmio operis nos esse facturos promis cramus.

Propositio XLVII.

Solida sphæralia parilatera circa diagonalem reuoluta, inter se sunt vt parallelepipedum basi quadr. cateti, altitudine vero diagonali eorumdem.

Sint duo solida sphæralia parilatera circa diagonales AC, DF reuoluta. Sintq; HI, LV perpendicularares ad latera CB, FE, Dico solidum sphærale ABC ad solidum DEF. esse vt parallelepipedum basi quadrato HI altitudine uerò HC, ad paralle-



lep:

ep. basi quadrato LV, altitudine LF.

Intelligatur vtrique circumscripta sphaera sua. Tunc enim solidum ABC ad sphaeram suam erit vt quadratum IH ad quadratum HC, siue (sumpta communi altitudine CH) vt parallelepipedum basi quadrato IH, altitudine HC, ad cubum HC. Sphaera autem ABC ad sphaeram DEF, est vt cubus HC ad cubum LF. At sphaera DEF, (vt nuper in altera ostendebamus) ad solidum suum DEF. est vt cubus LF, ad parallelepipedum basi quadrato LV, altitudine LF: ergo ex æquo erit solidum ABC, ad solidum sphaerale DEF, vt parallelepipedum basi quadrato HI, altitudine HC; ad parallelepipedum basi quadrato LV, altitudine LF. Quod erat &c.

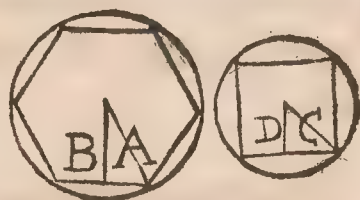
Scholium.

Idem concludetur etiam si concipiantur sphaera iuxta 6. huius intra data solida inscripta; siue altera tantum inscripta, altera verò circumscripta iuxta 6. & 7. huius sicut experiēti patebit.

Propositio XLV III.

Solida sphaeralia parilatera circa catetum reuoluta inter se sunt, vt parallelepipeda basi quadrato diagonalis, altitudine verò quæ sit æqualis cateto, & quartæ proportionalium, si fiat vt diagonalis ad catetum, ita catetus ad tertiam, & ita tertia ad quartam.

Sint duo solida sphaeralia circa catetos B, & D reuoluta. Continueturque ratio A ad B in quatuor terminis A, B, E, F. Itē ratio diagonalis C ad catetum D continuetur in quatuor terminis C, D, H, I. Dico, primum solidum ad secundum esse vt parallelepipedum basi quadrato A, altitudine verò B & F; ad parallelepipedum basi quadrato C. altitudine verò D & I.



$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ A \quad B \quad E \quad F \end{array} \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ C \quad D \quad H \quad I \end{array}$

Nam primum solidum ad sphaeram suam est vt B & F simul ad 14 huius
M A bis

A bis sumptam: acceptaq; communi basi quadrato A ; erit solidum primum ad sphæram suam, vt parallelepipedum basi quadrato A , altitudine verò B & F simul, ad duos cubos A . Sphæra autem prima ad secundam sphæram est vt duo cubi A ad duos cubos C . Sphæra tandem secunda ad solidum suum, est vt duo cubi C , ad parallelepipedum basi quadrato C altitudine verò D , & I simul (quod ostenditur vt nuper factum est in prima sphæra) ergo ex æquo primum solidum sphærale ad secundum, erit vt parallelepipedum basi quadrato A , altitudine B & F simul, ad parallelepipedum basi quadrato C altitudine verò D & I simul. Quod erat &c.

Scholium.

Idem concludi potest si sphæra concipiantur intra ipsa solida inscripta iuxta Propositionem 13. huius; siue altera inscripta, altera verò circumscripta iuxta 13. & 14. huius. Quando verò termini proportionis alij euadant à propositis, vt in hac, & in sequentibus, scias proportionem semper eandem esse, in quibuscunque tandem terminis eueniat.

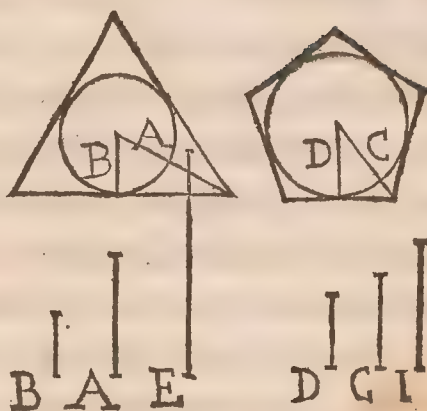
Propositio I L.

Solida sphæralia imparilatera sunt inter se vt parallelepipedum, basi quadrato perpendicularis, quæ ex centro polygoni ducitur in latus eiusdem, altitudine verò æquali prædictæ perpendiculari, vna cum dupla eius, quæ ex centro ad angulum polygoni ducitur, & cum tertia proportionalium ad duas prædictas.

Sint solida sphæralia imparilatera, circa catetos B , & D . reuoluta. Continuetur ratio perpendicularis B ad radium polygoni A in tribus terminis B , A , E . Item ratio D . ad C in tribus terminis D , C , I , continuata sit. Dico solidum primum ad secundum esse vt parallelepipedum basi quadrato B , altitudine verò æquali B semel, A bis, & E . semel, simulq; sumptis, ad parallelepipedum

lepipedium basi quadr. D. altitudi-
ne verò æquali D. semel, C. bis,
& I semel simulq; sumptis.

Concipiatur in vtroq; solido sphæ-
rali sua sphæra inscripta, eritq; soli-
dum primum ad sphæram suam vt
B & E simul cum dupla ipsius A ad
quadruplam B. sumptaque commu-
ni basi quadrato B. erit solidum



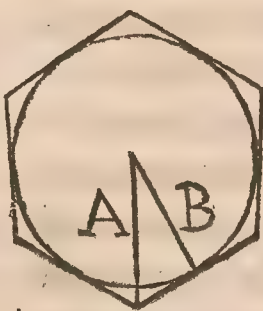
18 *huius*

primum ad sphæram suam vt paral-
lelepipedū basi quadrato B. altitudine verò B & E cum dupla A.
ad quatuor cubos B. Sphæra autem prima ad secundam est,
vt quatuor cubi B ad quatuor cubos D; Sphæra tandem secunda
ad solidum suum est, vt quatuor cubi D. ad parallelepipedum
basi quadrato D. altitudine D & I cum dupla ipsius C (quod
ostenditur vt nuper factum est) ergo ex æquo patet quod propo-
situm fuerat. &c.

Propositio L.

Solidum sphærale parilaterum circa diagonalem reuolutū,
ad solidum sphærale parilaterum circa catetum reuolutum,
est vt parallelepipedum basi quadrato cateri, altitudine diago-
nali bis sumptum, ad parallelepipedum basi quadrato cateti si-
mul diagonalisque, altitudine verò cateti.

Sint duo solida sphæ-
ralia, quorū alterum
circa diagonalem A
fit reuolutum, alterum
verò circa catetum C.
Dico solidum primū
circa diagonalem, ad
solidū secundum cir-



ca catetum, esse vt parallelepipedū basi quadr. B altitudine A

M

2

bis

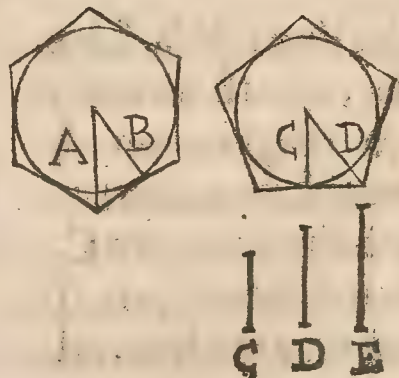
bis sumptum, ad parallelepipedum basi æquali quadratis **C, D**, altitudine verò **C**.

6. huius. Intelligatur in utroque solido inscripta sua sphæra. Et erit solidum primum ad sphæram suam, ut recta **A** ad **B**; sumptaq; eadem basi quadrato **B**; erit solidum primum ad sphæram suam, ut parallelepipedum basi quadrato **B** altitudine verò **A**, ad cubum **B**. siue ut duplum dicti parallelepipedum ad duos cubos **B**. Sphæra verò prima ad secundam est, ut duo cubi **B**, ad duos cubos **C**. Sphæra tandem secunda ad solidum suum est, ut duo quadrata ex **C**, ad duo quadrata **C**, & **D**; sumptaque communi altitudine **C**, est, ut duo cubi **C**, ad parallelepipedum basi æquali quadratis **C** & **D**. altitudine verò **C**. Propterea ex æquo patet quod propositum erat.

Propositio LI.

Solidum sphærale parilaterum circa diagonalem reuolutum, ad solidum sphærale imparilaterum est, ut parallelepipedum basi quadrato cateti, altitudine diagonali quater sumptum; ad parallelepipedum basi quadrato rectæ illius quæ ex centro polygoni imparilateri perpendiculariter ducitur in latus eiusdē; altitudine verò æquali prædictæ perpendiculari, una cum dupla illius quæ ex centro ad angulum ducitur, & cum tertia proportionalium ad duas prædictas.

Sint duo solida sphæralia, nempe primum parilaterum circa diagonalem **A** conuersum, alterum verò imparilaterum circa catetum **C** reuolutum. Continuetur ratio **C** ad **D** in tribus terminis **C, D, E**. Dico primum solidum ad secundum esse, ut parallelepipedum basi quadrato **B**, altitudine **A** quater sumptum, ad parallelepipedum basi quadrato **C**, altitudine verò æquali rectis **C**, & **E** cum dupla **D**. simul



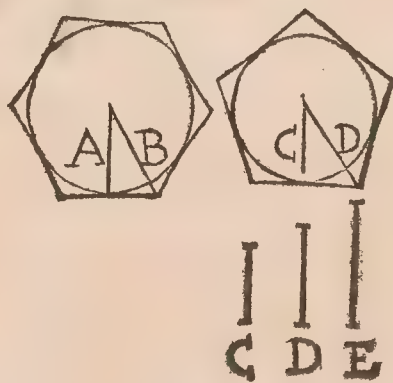
simul sumptis .

Nam solidum primum ad sphæram suam est, vt recta A ad B; siue sumpta còmmuni basi quadrato B; vt parallelepipedum basi quadrato B altitudine A, ad cubum B; Vel ut parallelepipedum prædictum quater sumptum, ad cubum B quater sumptum sphæra uerò prima ad secundam est ut quatuor cubi B ad quatuor cubos C, Sphæra denique secunda ad solidum suum (ut ostensum est in 49. huius) est ut quatuor cubi C, ad parallelepipedum basi quadrato C, altitudine uerò æquali rectis C & E cum dupla D. simul sumptis. Propterea ex æquo patet quod propositum erat.

Propositio LII.

Solidum sphærale parilaterum circa catetum reuolutum, ad solidum sph. imparilaterum, est ut parallelepipedum basi æquali quadratis diagonalis & cateti altitudine cateti bis sumptum, ad parallelepipedum basi quadrato lineæ quæ ex centro ducitur perpendiculariter in latus poligoni imparilateri, altitudine uerò æquali prædictæ lineæ, una cum illa quæ ex centro ad unum angulum perducitur, & cum tertia proportionalium ad duas prædictas.

Sint duo solida sphæralia; alterum parilaterum circa catetum A reuolutum; alterum imparilaterum circa C conuersum. Et ratio C ad D, continuetur in tribus terminis C, D, E. Dico primum solidum ad secundum esse, vt parallelepipedum basi æquali quadratis B & A, altitudine uerò A, bis sumptum; ad parallelepipedum basi quadrato C, altitudine uerò æquali C, & E, cum dupla ipsius D.



Nam solidum primum ad sphæram suam est, vt duo quadra- 13 *huius*
ta B

94 . *De Sphæra, & solidis spherilib.*

ta B & A, ad duplum quadrati A. siue sumpta communi altitudine A. vt parallelepipedum basi æquali quadratis B & A, altitudine A ad duos cubos A. Vel vt dictum parallelepipedum bis sumptum, ad quatuor cubos A. Sphæra autem prima ad secundam, est vt quatuor cubi A ad quatuor cubos C. Sphæra denique secunda ad solidum suum est vt quatuor cubi C, ad parallelepipedum basi quadrato C altitudine æquali C & E, cum dupla D. (ut ostensum fuit in Propos. 49, huius.) Ergo ex æquo patet quod propositum fuerat.

FINIS.



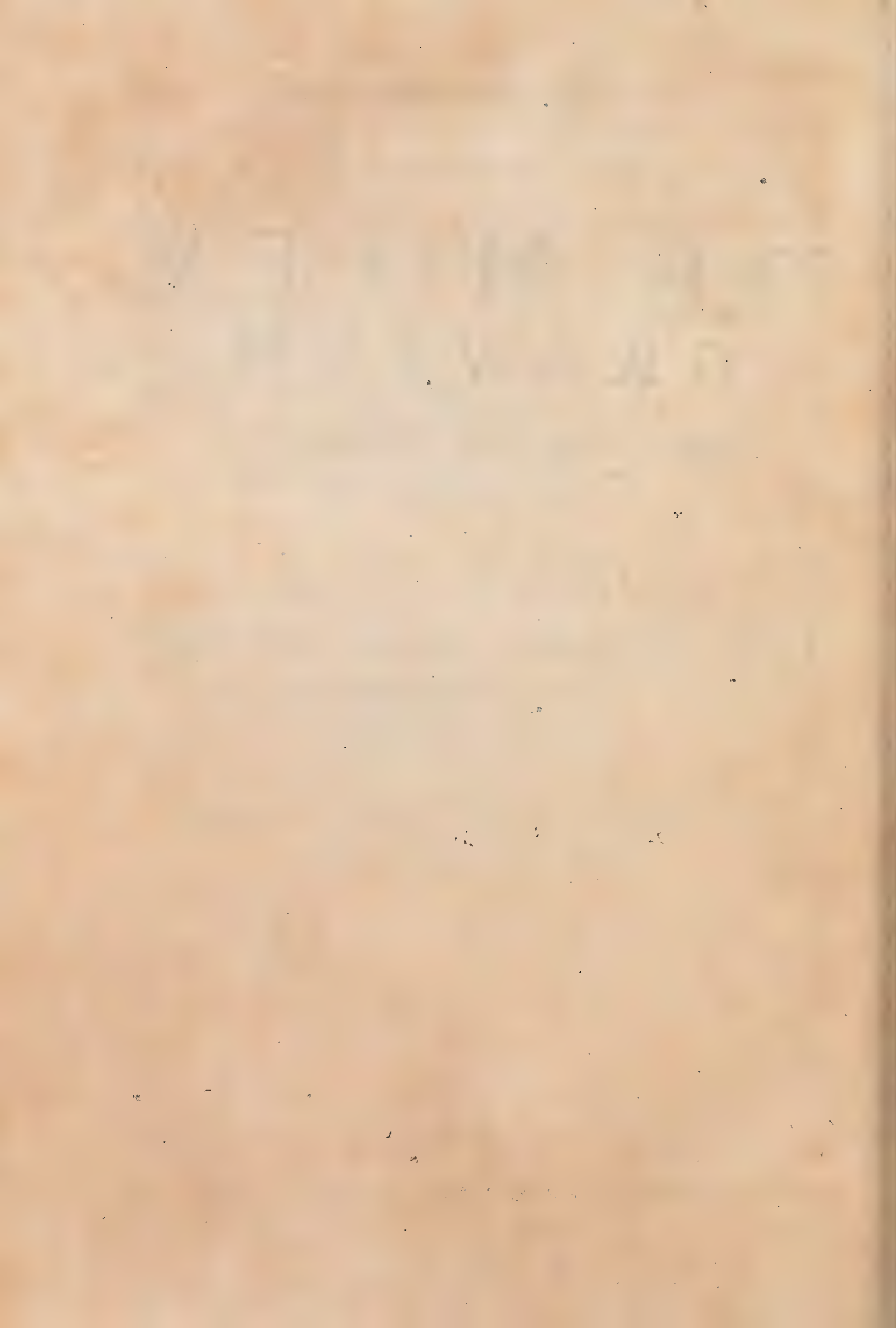
DE MOTV GRAVIUM

Naturaliter descendantium,
Et Proietorum

LIBRI DV O.

In quibus ingenium naturæ circa parabolicam lineam Ludentis per motum ostenditur,

*Et vniuersa Proietorum doctrina vnius
descriptione semicirculi,
absoluitur.*



DE MOTV GRAVIVM Naturaliter descendendum.

LIBER PRIMVS.



CIENTIAM de motu G. & Pr. à pluribus quidem tractatā, ab vnico (quod ego sciam) Galileo Geometricè demonstratam, aggredi libet. Fateor, quòd ille totam hanc segetem tamquā falce demessuit, nec aliud superest nobis, nisi vt tam seduli messoris vestigia subsequentes, spicas colligamus, si quæ ab ipso vel relictæ fuerint, vel abiectæ:

sin minus, Ligustra saltem, & humi nascentes violas decerpamus; sed fortasse & ex floribus coronam contexemus non contemnendam.

Principio quædam de momentis grauium proponemus, vt aliqua suppleamus, quæ quodammodo opportuna videbantur ad scientiam. Deinde quædam de parabola, quæ nobis ad propagationem huius doctrinæ vtilia videbuntur, Reliquum libri primi propositiones erunt de motu accelerato; illarumque ordo quo ad fieri poterit in tam diuersis rerum materijs, neglectus penitus non erit. Libellus alter de Motu proiectorum tractabit, ampliata Galilei doctrina, & demonstrationibus plerumq; mutatis. Tabulas certè, quas ipse studio, ac labore composuit, omnes ex tabula sinuum à nobis solius transcriptionis molestia, decerptas exponemus nam hypothesis nostra, iuxta quam proiectiones sursum factas contemplamur, apertè indicauit nobis tabulas à Galileo elaboratas in ipsis sinuum, ac tangentium tabulis expressè inclusas, & inser-

tas esse debere. Postremo normæ cuiusdam militaris constructionem subiicemus, quæ cum diuersa sit à vulgari norma, cuius ope vniuersa res tormentaria administratur, certè, & scientificè philosophos docebit quantum axis cuiusq; machinæ proficientis eleuari debeat, vt illius iactus propositæ, ac determinatæ mensuræ euadat. Quin etiam omnia problemata iucunda scitu, vsu non inutilia, quæ circa hanc materiam proponi possunt, soluta vnico intuitu in aspectum dabit: vt ibi fusius explicabimus. Definitiones omisimus, & genere scriptionis contracto, laconicoq; vsi sumus, quia dum vniuersam Galilei doctrinam pro suppositione premitimus lectori erudito scribere profitemur.

Suppo-
sit. Ga-
lilai.

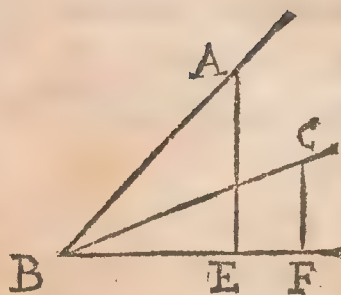
Acturus de Motu naturalitèr accelerato Galileus principium supponit, quod & ipse non admodum euidentis putat, dum illud parum exacto penduli experimento nititur comprobare. hoc est. Gradus velocitatis eiusdem mobilis super diuersas planorū inclinationes acquisitos, tunc esse æquales, cum eorundem planorū eleuationes æquales sint. Ex hac petitione dependet quasi vniuersa illius doctrina de motu tum accelerato, tum proiettorum. Si quis de principio dubitet de ijs quæ inde cōsequuntur certam omninò scientiam non habebit. Scio Galileum ultimis vitæ suæ annis suppositionem illam demonstrare conatum, sed quia ipsius argumentatio tum lib. de Motu edita non est pauca hæc de momentis grauium libello nostro præfigenda duximus; vt appareat quod Galilei suppositio demonstrari potest, & quidem immediate ex illo Theoremate quod pro demonstrato ex Mechanicis ipse desumit in secunda parte sextæ Propositionis de motu accelerato, videlicet. Momenta grauium equalium super planis inæqualiter inclinatis, esse inter se vt sunt perpendiculara partium equalium eorundem planorum. Verbi gratia.

Sint plana $ab.cb.$ inæqualiter inclinata, & sumptis equalibus $ab, cb.$ ducantur perpendiculara ae, cf : ad horizontem bf . Supponit Galileus pro demonstrato, momentum in plano $ab.$ ad momentum in plano $cb.$ ita esse vt est $ae.$ ad cf . Nos quia in huiusmodi Theorema non incidimus, hoc primum aliqua demon-

demonstratione confirmabimus: protinus ad ostendendum id quod Galileo principium siue petitio est, accedemus.

Premittimus.

Duo graua simul coniuncta ex se moueri non posse, nisi centrum commune grauitatis ipsorum descendat.

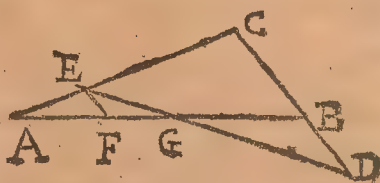


Quando enim duo graua ita inter se coniuncta fuerint, ut ad motum vnus motus etiam alterius consequatur, erunt duo illa graua tamquam graue vnum ex duobus compositum, siue id libra fiat, siue troclea, siue qualibet alia Mechanica ratione. graue autem huiusmodi non mouebitur vnquam, nisi centrum grauitatis ipsius descendat. Quando vero ita constitutum fuerit ut nullo modo commune ipsius centrum grauitatis descendere possit, graue penitus in sua positione quiescet: alias enim frustra moueretur; horiZontali, scilicet latione, qua nequaquam deorsum tendit.

PROPOSITIO I.

SI in planis inæqualiter inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus, duo graua constituentur, quæ inter se eandem homologè rationem habeant quam habent longitudines planorum, graua æquale momentum habebunt.

Sit ab . horizon, & plana inæqualiter inclinata ca , cb . Fiat ut ac ad cb , ita graue aliquod a . ad graue b . Et graua hæc in homologis planis collocentur, in punctis a , & b . eiusdem horizontalis lineæ: Connectantur etiam aliquo imaginario funiculo per a cb . ducto, adeo ut ad motum vnus motus alterius consequatur.



Dico graua sic disposita æquale momentum habere: hoc est

N 2 in ea

in ea in qua sunt positione æquilibrata conquiescere, neq; sursum aut deorsum moueri. Ostendemus enim centrum commune grauitatis eorum descendere non posse, sed in eadem semper horizontali linea (quantumlibet grauia moueantur) reperi.

Non habeant si possibile est æquale momentum, sed altero præponderante moueantur, & ascendat graue *a* versus *c*, descendatq; graue *b*. Assumpto iam quolibet puncto *e*, cum graue *a* fuerit in *e*, & *b* in *d*, erunt lineæ *ae*, *bd*. æquales, quia idem funiculus est, tam *acb*, quam *ecd*. Demp̄toq; communi *ecb* remanent æquales *ae*, *bd*. Ducatur *ef* parallela ipsi *cb*, & connectantur puncta *e d*. Est igitur graue *a*. ad graue *b*. vt *ac* ad *cb*, hoc est vt *ae* ad *ef*, hoc est *bd*. ad *ef*, hoc est *dg* ad *ge* reciprocè. Est ergo punctum *g* centrum grauitatis commune grauium connexorum, & est in eadem linea horizontali in qua fuerat antequàm grauia mouerentur. Duo ergo grauia simul colligata mota sunt, & eorum commune centrum grauitatis non descendit. Quod est contra præmissam æquilibrij legem.

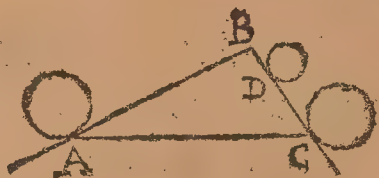
4. sexti
exemplū
Archim.
ap̄uipon
dumo

P R O P O S I T I O I I.

Momenta grauium equalium super planis inæqualiter inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus, sunt in reciproca ratione cum longitudinibus planorum.

Sint plana *ab*, *bc* inæqualiter inclinata, & ad idem punctum *b*. eleuata.

Sintq; in eisdem planis æqualia grauia *a* & *c*. Dico momentum grauis *c* ad momentum grauis *a*, esse reciprocè, vt *ab*, ad *bc*. Fiat vt *ab*, ad *bc*, ita graue *a* ad graue aliud *d*, & ponatur *d*. in plano *bc*. Ergò per præcedentem erunt ipsorum *a*, & *d*. momenta æqualia.



Momentum autem *c*. ad momentum *d*. est vt moles ad molem (quia sunt in eodem plano) hoc est vt moles *a*, ad molem *d*: hoc

d : hoc est vt ab , ad bc . Est ergo momentum c . ad d , vel ad momentum a . ipsi momento d . æquale, vt ab , ad bc . Quod erat &c.

Aliter.

Idem quod hic demonstrauimus ex Prima Propositione, qua sumpto principio deducebat ad impossibile, ostendetur etiam absolute, & affirmatiue ex ipsis Mechanicæ principijs.

Lemma.

Momentum totale grauis ad momentum quod habet in plano inclinato, est vt longitudo ipsius plani inclinati ad perpendicularum.

Sit circa centrum a . sphaera grauis in plano eleuato bc . & sit plani perpendicularum ce . dico momentum totale grauis a ad momentum peculiare quod habet in plano bc , esse vt bc . ad ce .

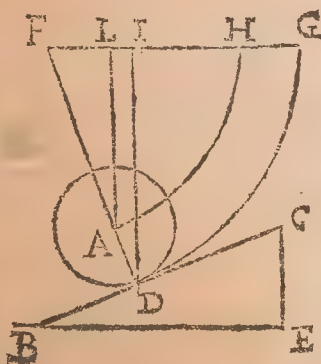
Producatur recta da . per contactum d , & per centrum a . quæ ideo perpendicularis erit ad planum bc . & quolibet centro

f . fiant quadrantis portiones dg , ah . & ducatur fg . horizontalis, & di , al . utraq; ad horinzontem perpendicularis.

Iam Angulus fdc . rectus est, & anguli b , c . simul æquales sunt recto, ergò ablatis idc , dce , alternis parallelarum, remanent æquales fdi , & b . Sunt ideo similia duo triangula rectangula fdi , bce . Iam sic.

Sed quando graue circumfertur à semidiametro fh , siue fa , manente puncto f tunc momentum totale eius, hoc est, momentum quod habet in situ h , ad momentum quod habet in situ a , est vt hf . ad fl , siue af . ad fl , hoc est df . ad fi , vel bc . ad ce . ob similitudinem triangulorum. Quod erat &c.

Quod autem idem momentum sit grauis constituti, siue in puncto a quadrantis ah , siue in puncto d . quadrantis dg , siue in

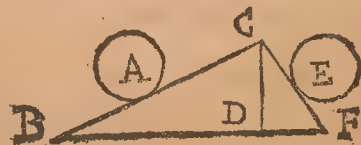


ue in puncto d. plani tangentis, dubitandum non videtur; quandoquidem angulus contingentiae inclinationem non minuit, neque auget.

Hinc Propositio secunda iterum.

Momenta grauium æqualium super planis inæqualiter inclinatis sunt in reciproca ratione cum longitudinibus planorum,

Momentum in a. ad totale momentum, per præcedens lemma, est vt cd. ad cb; totale autem momentū ad momentum in e. est vt fc. ad cd; ergo per perturbatam rationem, momentum a ad momentum e. est reciprocè, vt cf. ad cb & c. Quod erat & c.



Corollarium.

Hinc colligitur momentū sphaeræ grauis super diuersas planorum eleuationes semper esse vt linea illa horizontalis quæ à contactu in ipsa sphaera ducitur.

Sit sphaera grauis circa centrum a. in plano bc utcumque inclinato; & ducatur bd. horizontalis à contactu: ostendamus momentum sphaeræ in situ in quo est, esse lineam bd, (posita semper diametro pro momento maximo, siue totali.)

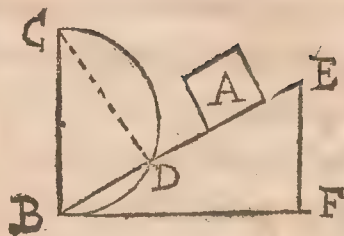


Producatur horizon dbf, demittaturque perpendiculum cf. à quolibet puncto; & iungatur ed.

Angulus e æqualis est angulo dbh. per 32. tertij; eidem dbh. est æqualis cbf. ad verticem, ergo æquales sunt inter se anguli e, & cbf, sunt insuper triangula edb. bcf rectangula, ergo similia sunt inter se. Sed iam ostendimus momentum totale sphaeræ ad momentū quod habet in eleuato plano esse vt bc ad cf, nempe vt ipsa diameter eb. ad horizontalem bd, quæ intra sphaeram à contactu ducitur.

Si vero graue non sit sphaera, sed quodcunq; solidum a. habebimus

bimus nihilominus singulatius momenta in singulis planorum elevationibus facillime. Soluamus etiam Problema Pappi lib. 8. Propos. 9. famosum apud Guidobaldum, & Cabeum &c.



Sit graue a. in plano ab, & quaeratur in hoc situ momentum eius; siue potentia, à qua in hoc plano ab. sustinetur.

Ponatur momentum totale grauis; vel, potentiam quae sustinet pondus a. in plano perpendiculari esse bc, & circa bc erectam ad horizontem fiat semicirculus cdb. qui secet ab. in d.

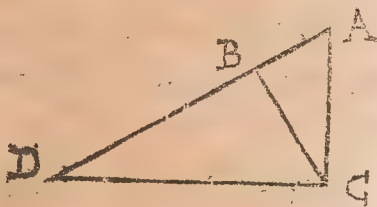
Dico momentum grauis a, siue potentiam quae illud sustinet in plano ab. esse bd. Ducatur perpendicularis ef. à quolibet puncto e. & erunt triangula cbd, bef. similia; quia cum sint utraq; rectangula, anguli etiam cbd. & e sunt alterni. Iam quia momentum totale grauis ad momentum quod habet in plano eb. est ut eb. ad ef, erit etiam ut cb, ad bd. ob similitudinem triangulorum, Est igitur momentum grauis in plano ab. ut linea intercepta bd. (posita semper diametro pro totali momento.)

Quo ad propositionem Pappi. manifestum est, si potentia bc aequatur totali momento bc. potentiam bd. aequari momento in plano bd. Quare potentia bd. sustinebit pondus a. in proposito plano be &c.

Scholium:

Iam demonstrari primum potest Propositio sexta Galilei de motu accelerato.

Sit enim angulus abc rectus, & ac. perpendicularis ad horizontem cd. & producatu r ab d. Erunt da, ac, ab, continuè proportionales: at per 2. huius, momentū



in ac. ad momentū in ad. est reciproce ut ad ad ac. hoc est ut ac, ad ab, Ergo est homologue, momentum in ac, ad momentum in ab.,

104 De motu grauium descendēt.

ab , ut spatium ac , ad spatium ab ; quare eodem tempore peragentur ipsa spatia ac & ab ; Supponimus hīc cum ipso Galileo, velocitates in diuersis planorum inclinationibus, ita esse ut sunt momenta quando eadem fuerit moles. Sed cum angulus abc . ponatur rectus, erunt bc . ab in circulo cuius sublime punctum est a , & diameter ac . Quod &c.

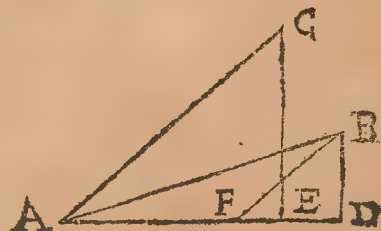
P R O P O S I T I O I I I.

Assumitur à Galileo in 6. de Motu accel.

Momenta grauium equalium super planis inæqualiter inclinatis, sunt in homologa ratione cum perpendicularis partium equalium eorundem planorum.

Sint partes æquales ab , ac . planorum inæqualiter inclinatorum, & eorundem perpendiculara sint bd . ce . Dico momentum grauis in plano ba , ad momentum eiusdem in plano ca , esse ut bd , ad ce .

Ducatur bf . ipsi ca . equidistans. Eritque per secundam huius momentum in ba . ad momentum in bf , hoc est in ac . (sunt enim plana bf , ac parallela) ut fb , ad ba . hoc est ut fb , ad ca (cum sint æquales partes ba , ca) vel ut bd , ad ce . (sunt enim equiangularia triangu-
la $fb d$, $a c e$. ob lineas parallelas.) Ergo momentum in ba , ad momentum in ca , est ut bd , ad ce . Quod erat &c.



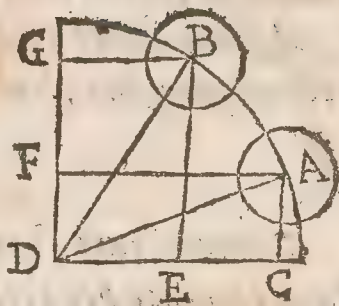
Corollarium.

Hinc manifestum est momenta grauium super planis inæqualiter inclinatis esse ut sunt sinus recti angulorum eleuationis.

Quando verò sphaera non moueatur in aliquo plano libera, sed alligata ad extremum semidiametri, manente alio extremo, ipsa per quadrantem circumferatur, erunt momenta eius ut sunt sinus complementi angulorum eleuationis. Nam momentum a , ad

momentum-

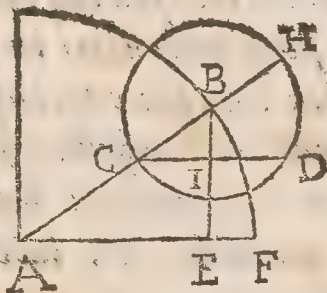
momentum b. est ut cd. ad de, hoc est af. ad bg, nempe ut sinus cōplementi angulorum elevationis.



Aliter habebimus mensuram momentorum sphaerę à semidiametro circumductę, in unoquoque quadrantis puncto. Ostendimus enim.

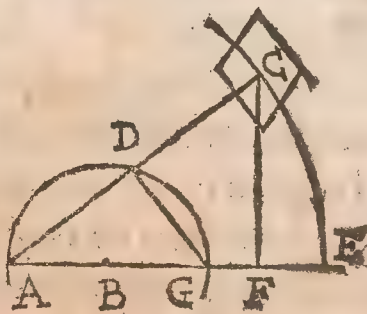
Momenta sphaerę per quadrantem circumductę esse ut sunt lineę horizontales, quę à puncto connexionis sphaerę cum diametro, intra sphaeram ducuntur.

Sit quadrantis centrum a, sphaera grauis circa b, & à puncto connexionis c. ducatur horizontalis cd. Dico momentum sphaerę esse cd. (posita semper diametro sphaerę pro maximo siue totali momento.) Demittatur perpendicularum bc. Momentum totum sphaerę ad momentum quod habet in b. est ut af, ad ae, vel ut ba ad ae,



hoc est bc. ad ci, & sumptis duplis, ut hc. diameter ad cd horizontalem in sphaera, quę ducitur à puncto connexionis. Quod erat &c.

Si verò graue circumductum non sit sphaera dabuntur nihilominus singula eius momenta hoc modo. Sumpto in horizontali linea quolibet intervallo ab. fiat circulus adg. Dico circulum hunc singula singularum elevationum momenta metiri: Et momentum grauis in c. esse lineam interceptam ad. (posita semper diametro ag. pro totali momento) Est enim momentum totale ad momentum in c. ut ea. ad af, hoc est ut ca ad af, vel ut ga ad ad nempe diameter ad lineam interceptam.



Eadem ad. erit potentia quę sustinet graue in situ c. si suppona-

ponamus potentiam quæ illud sustinet in e . esse ag .

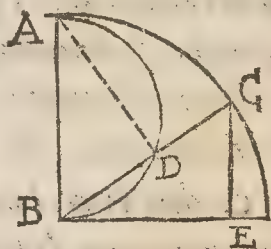
Assumpsimus triangula acf , adg . esse similia, quia cum rectangula sint, habent angulum communem ad a .

Scholium.

Demonstrari secundum potest Propositio sexta Galilei de Motu accelerato per tertiam huius, præmisso hoc Lemmate.

Lemma,

Si circa eandem rectam lineam ab . fuerit semicirculus, & quadrans, & in quadrante ducatur qualibet semidiameter bc . Erit bd , intercepta in semicirculo æqualis ipsi ce . perpendiculari in quadrante. Ducatur enim ad . tunc triangula adb , bce . erunt utraq; rectangula, & anguli abd , bce , sunt alterni, ergo sunt æquiangula; bases autem ab , bc . sunt æquales, quare etiam bd , ce . latera æqualia sunt. Quod erat probandum.

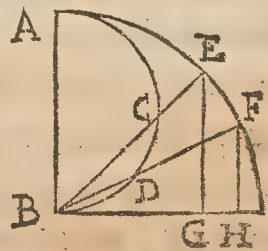


Propositio Galilei Sexta.

Cum ipso Galileo Mechanicè demonstrata.

Sit circulus ad horizontem erectus acd b . Dico tempora lationum per cb . db . esse æqualia.

Sunt enim super planis cb , db . per tertiam huius, momenta ut eg , fh , hoc est ut cb . ad db . per lemma præcedens. Ergo cum sint momenta ut longitudines planorum, eodem tempore percurrentur ipsa plana cb db ; quod erat propositum demonstrare &c.



PROPOSITIO IV.

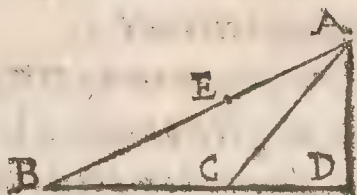
Galilei 3
& eius
Corol.

TEmpora lationum ex quiete per plana eandem eleuationem habentia, sunt homologè ut longitudines planorū.

Sint

Sint plana ab , ac , eandem eleuationem ad habentia. Dico tempus lationis per ac ad tempus per ab esse vt ac ad ab .

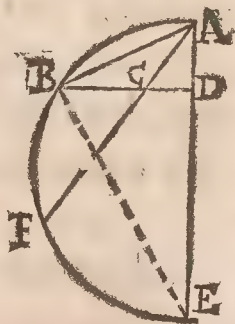
Sit ipsarum ab , ac tertia proportionalis ae . Momentum ergò in plano ac ad momentum in plano ab , est vt ab , ad ac . (per secundam huius,) hoc est vt ac . ad ae . Quare lationes per ac , ae temporibus æqualibus absoluentur: quandoquidem ita sunt momenta vt longitudines spatiorum. Ponamus iam tempus per ae , esse mediam proportionalem ac . Erit tempus per ab . ipsa ab ; tempus ergo per ae , siue per ac . (nā æqualia tempora sunt) est ac , & per ab est ipsa ab &c. Quod erat &c.



Aliter.

Præcedens Theorema poterat demonstrari sine ulla suppositione. Demonstrat enim Galileus in Prop. 6. de motu accelerato, tempora lationum per chordas omnes in circulo æqualia esse. Idq; tribus modis probat. in primo, & tertio subest principium suum non satis euident; in secundo verò nihil supponitur, præter iam dictum Theorema Mechanicum; quod si, ipso teste, demonstratum antea fuerat, ex ipso immediatè, tamquam Corollarium, necessaria illatio suæ tertiæ Propositionis, immo & sue petitionis, deriuari poterat. Sed quia ipse tertiæ suæ Propositionem, quæ nobis quarta est, mediante sua petitione probat, nos illam absolutè ostendamus ex propositionibus ipsius Galilei, quæ nullum postulatum includunt.

Sint duo plana ab , ac . quorum eadem eleuatio sit ad . Dico tempus lationis per ac . ad tempus per ab , esse vt ac . ad ab . facto enim angulo abe . recto, agatur circulus circa diametrum ae , qui transibit per b , & producat acf . Erit ab . media proportionalis inter fa , ac , & erunt tempora per ab , af . æqualia, vt o-



stendit Galileus simpliciter ex illo Theoremate Mechanico sine sua suppositione.

Si ergo ponamus tempus lationis per ac , esse ipsam ac erit media proportionalis ab , tempus per a hoc est per se ipsam ab . &c. Quare tempora lationum ex quiete per plana eandem eleuationem habentia sunt homologè ut longitudines planorum, & hoc demonstrauimus sine illa petitione, cuius veritatem sequenti Theoremate ostendemus.

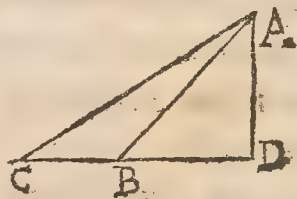
PROPOSITIO V.

Galilei
supposi-
tio.

GRadus velocitatis eiusdem mobilis super diuersas planorum inclinationes acquisiti, tunc æquales sunt cum eorumdem planorum eleuationes æquales sint.

Sint duo plana ab . ac . inæqualiter inclinata, quorum eleuationes sint æquales, vel sit eadem ad . Dico gradus velocitatis acquisitos in b . per descensum ab , & in c . per descensum ac . æquales inter se esse.

Quicumq; enim sit gradus velocitatis acquisitus in b , accepto eius subduplo, graue motu æquabili, & tēpore casus currit idem spatium casus ba . Iterum; quicumq; sit gradus velocitatis acquisitus in c , accepto eius subduplo, graue motu æquabili, & tempore casus currit idem spatium casus ca .



per 6. de
motu
æquabili
Gal.

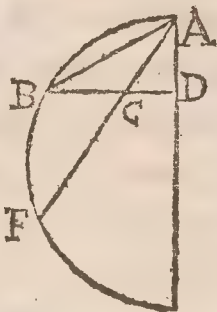
Tempora igitur, & spatia sunt proportionalia nempe. Tempore ba curritur spatium ba . motu æquabili: tempore autem ca curritur spatium ca motu æquabili, ergo gradus velocitatis sunt æquales. Quare etiam illorum dupli æquales erunt; & ideo gradus velocitatis in b , & in c . sunt æquales. Quod erat &c.

Aliter per circulum sexta Propositionis Galilei facile demonstrabitur eadem conclusio hoc modo.

Ex Theoremate Mechanico deduxerat Galileus tempora per a b , a f . aequalia esse. Dico ergo, Impetus in punctis b , & c . grauium

aium ab eadem altitudine, & ex quiete in a descendendum, æquales esse.

Quia enim ab, & af. aequali tempore peraguntur, erunt impetus in b, & f. punctis, ut sunt spatia peracta ab, af. (Acceptis enim eorum subduplis aequali tempore, & motu æquabili currantur spatia ba. fa, quare subdupli illi impetus sunt ut spatia, & propterea etiam illorum dupli ut eadem spatia erunt.) Impetus ergo b. ad im-



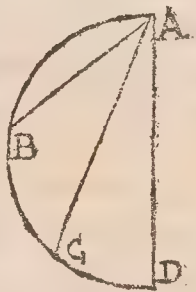
per prim.
Gal. de
m. acc.

petum f. est ut ab, ad af, impetus verò in f. ad impetum in c. est ut fa. ad ab. (nempe ut tempora, quia ab, media proportionalis est inter fa. ac.) Ergo ex æquali, impetus in b. ad impetum in c. est ut ab, ad ipsammet ab. Quare impetus in b, & c. sunt æquales. &c. Vel sic.

Gradus impetus in c. ad gradum in f, est ut ca. ad ab, vel ba, ad af, cum tres ca, ab, af. sint in continua proportionem. Sed gradus etiam impetus in b. ad gradum in f, est ut ba ad af (ut supra demonstrauimus.) Quare uterque gradus c, & b. ad eundem f. eandem rationem habet; & ideo æquales sunt. Quod &c.

Corollarium.

Hinc pro Corollario extrahemus id quod in ipso progressu demonstrationis ostensum est, nempe. Impetus grauium in fine chordarum circuli, quæ ex puncto sublimi descendant, ita esse ut sunt ipsæmet chordæ: hoc est impetus in punctis b, c, d, ita esse ut sunt ab, ac. ad. &c.



Scholium.

Cum deinceps futurus sit sermo de lineis quas parabolas vocant, non erit inconueniens, antequam illarum passionem in ordine ad motum consideremus, pauca quadam necessaria nobis præmonstrare. Sic enim fiet ut paratiores accedere possimus ad

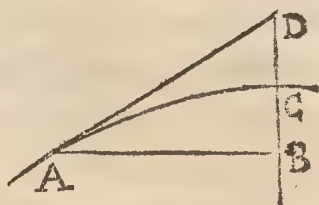
contemplandam lineam pro motibus non solum proiectorum, sed etiam (quod non scripsit Galileus) naturaliter cadentium, à natura unice factam. Premittimus semper tamquam suppositum uniuersam Galilei doctrinam de motu: illius enim vestigia sequimur, & paucula quedam Theoremata ab ipso neglecta colligimus. Hic præcipuè supponuntur due Propositiones de Parabola, quas ipse operis suo de Motu Proiectorum, præfigit, alteram Apollonijs quidem sed Marte proprio demonstratam à Galileo; alteram verò penitus ex Apollonij lib. 1. prop. 33. desumptam, & demonstratam.

Prima est huiusmodi.

Lineæ, quæ intra parabolam basi parallelæ ducuntur, sunt in subduple ratione portionum diametri ad verticem parabolæ interceptarum.

Secunda verò est hæc.

Si in parabola aliquod punctum *a* sumatur ex quo linea ducatur basi parallelæ *ab*, & portioni diametri *bc*. ad verticem interceptæ, æqualis recta linea *cd*. ponatur in directum. Recta linea *da*, quæ ab extremo positæ lineæ termino *d*: ad punctum *a* in parabola sumptum, ducitur, parabolam continget, quod & à nobis aliquo modo ostendetur post Prop. 10.



Hæc ipse. His præmissis reliqua nobis oportuna demonstrabimus: Et primò animaduertendum est, quod unaquæq; parabola quandam rectam lineam peculiarem habet, cuius proprietas præcipua hæc est. Ducta intra parabolam quacunq; linea basi parallelæ, quadratum ductæ æquale est rectangulo, quod sub illa peculiari linea, & portione diametri ad verticem parabolæ abscissa, continetur. Exempl. g. Quadratum rectæ *ab* æquale est rectangulo sub *bc* & illa peculiari linea contento; & hoc semper ubicumq; fuerit ducta *ab*

Vocatur autem peculiaris illa linea *Latus Rectum*.

Quæ verò ducuntur æquidistantes basi, *Ordinatum applicata* dicuntur.

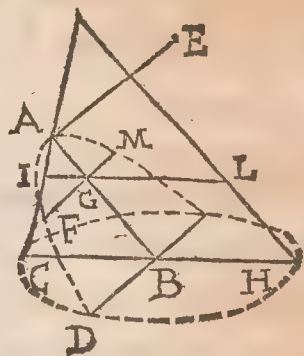
PROPOSITIO VI.

Parabolæ latus rectum demonstrare.

MAnente figura, & constructione eadem quam ponit Galileus in prima iam dictarum propositionum de Parabola.

Fiat ut ab , ad bc . ita bb . ad ae . Dico ae . esse latus rectum.

Sumatur enim quodlibet punctum in parabola quod sit f , & ducatur fg . parallela ipsi db , item per g . agatur igl . parallela ad ch . eritq; $bg lh$ parallelogramum. Et quia factum est ut ab , ad bc ita bb ad ae erit ag ad gi , ut ab ad bc . hoc est ut bh ad ae siue ut gl , ad ae . Rectangulum ergo gae . æquale erit rectangulo igl , hoc est quadrato fg , Est ergo ea . latus rectum.



Corollarium.

Hinc manifestum est, si linea fg . ordinatim applicata producatursq; ad ulteriorem semiparabolam in m ; ipsam gm æqualem fore ipsi fg . eodem enim modo ostenditur quadratum gm , atq; quadratum gf . æquari rectangulo igl etc.

PROPOSITIO VII.

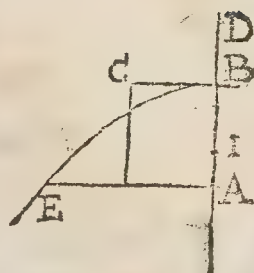
Sublinitas parabolæ apud Galileum, quarta pars est lateris recti eiusdem parabolæ.

Maneat constructio Propositionis V. de Motu projectorum Galilei, qua ipse reperit sublimitatem parabolæ.

Factum ibi fuit ut ab . altitudo, ad bc (æqualem nempe dimidio basis ae .) ita bc . ad aliam, quæ sit bd , & hæc erat sublimitas apud Galileum, probabimusq; ipsam esse quartam lateris recti partem.

Qua-

Quadratum ea . quadruplum est quadrati bc . hoc est rectanguli abd , (per constructionem) ergo etiam rectangulum sub ab , & latere recto quadruplum erit eiusdem abd ; sed communis est ab altitudo rectangulorum, ergo bases, hoc est latus rectum, quadruplum erit sublimitatis bd . Quod &c.



Definitio.

Quando, ut in precedenti figura, sumitur in axe parabolæ ex vertice linea bi . quæ aequalis sit quartæ parti lateris recti, tunc punctum i vocatur focus parabolæ. Manifestum ergo est; punctum sublime d , et focum i , æqualiter distare à vertice parabolæ; nempe tantum utrinque; quanta est quarta pars lateris recti.

PROPOSITIO VIII.

Recta linea quæ ex foco parabolæ ordinatim applicatur, dupla est portionis axis ad verticem interceptæ, Vel. æqualis est semissi lateris Recti.

Sit latus rectum ab , & focus d . Rectangulum bad . quadruplum est quadrati ad . (quia cum habeant communem altitudinem ad , basis ba . quadrupla est basis ad .) ergo etiã quadratum cd . quadruplum est eiusdem quadrati ad . Est igitur cd dupla ipsius da ; siue æqualis semissi lateris recti. Quod erat &c.



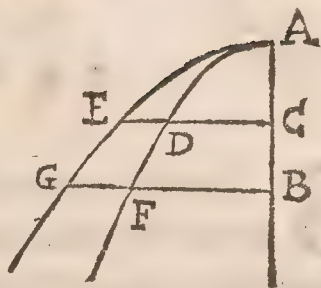
PROPOSITIO IX.

Si Parabolæ quocumque circa eandem diametrum sint, lineæ quæ in illis ordinatim ducuntur, proportionales erunt.

Sit diameter communis ab . ordinatim autem ductæ sint cd ce , & bf . bg . Dico esse ut ec ad gb , ita dc . ad fb .

Sunt

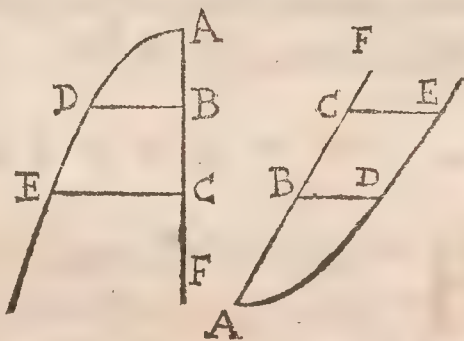
Sunt enim quadrata, ec , ad gb , vt recta ac . ad ab . Quadrata etiam dc ad fb sunt vt ac , ad ab . Ergo in eadem ratione sunt quadrata inter se; quare vt recta ec ad gb , ita est dc ad fb . Quod erat &c.



PROPOSITIO X.

Tempora lationum, quæ ex quiete fiunt per plana quęcunque sunt inter se vt lineæ in parabola applicatę ad spatia per quę grauiā descenderunt.

Sint spatia quęlibet ab , ac , siue perpendicularia siue inclinata, & circa diametrum ac fiat parabola quęlibet ade . atq; ordinatim ducantur bd . ce . Dico tempus per ab ad tempus per ac . esse vt b d , ad c e . Sunt enim tempora in subdupla ratione spatiorum ex Galileo, sed lineæ db , ec . sunt in subdupla ratione spatiorum (quia quadrata earū sunt vt ab , ad ac .) ergo eadem ratio est & temporū, & linearū ordinatim ad spatia applicatarū. Quod erat. &c.



Aliter.
Si ponamus tempus lationis per latus rectum af esse ipsummet latus rectum, erit tempus per ab . media proportionalis inter fa , ab , nempe ipsa bd . & tempus per ac media proportionalis ce &c. & sic de singulis. Quare &c.

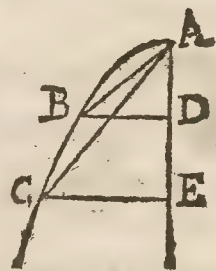
Corollarium.

Hinc manifestum est impetus grauium in fine portionum diametri parabola, esse inter se vt lineæ, quæ ordinatim applicantur ad extrema ipsarum portionum puncta. Sunt enim ex Galileo impetus vt ipsa tempora, sed ordinatim ductæ sunt vt ipsa tempora, ergo impetus sunt vt ordinatim ductæ &c.

P R O P O S I T I O X I.

SI Lineæ à vertice parabolæ vsq; ad sectionem ducantur, erunt impetus in fine linearum, vt sunt ordinatim ex ipsarum terminis applicatæ.

Sit parabola cuius vertex *a*. & ducantur ex vertice *ab*, *ac*. Dico impetus in *b*, & *c*. esse vt *bd* ad *ce*. Manifestum est; Quia impetus in *b*, & *c*. sunt iidem ac in *d*. & *e*. In *d*. autem & in *e*. sunt vt *bd*. ad *ce*. (per Corollarium præcedens) ergo etiam in *b*, & *c*. sunt vt *bd*, ad *ce*. Quod &c.

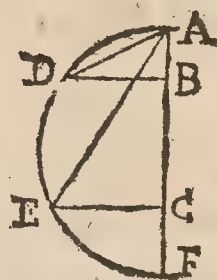


P R O P O S I T I O X I I.

Tempora lationum, quæ in circulo fiunt per portiones diametri ex puncto sublimi, sunt inter se vt chordæ quæ ex eodem puncto sublimi ducuntur, ad puncta peripheriæ in quæ incidunt ordinatim ductæ ex terminis dictarum portionum.

Sumantur vtcunq; *ab*, *ac*. & ducantur ordinatim *bd*, *ce*. iunganturq; *ad*, *ae*. Dico tempora lationum per *ab*, *ac* portiones diametri ita esse inter se vt sunt *ad*, *ae*.

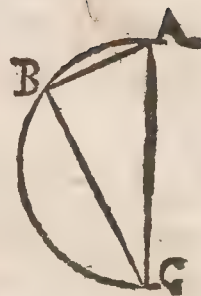
Si enim ponatur tempus per *af* esse *af* erit tempus per *ab* ipsa *ad*. cum sit media proportionalis. Et cum tempus per *af*. sit *af*, erit tempus per *ac*. ipsa *ae* media proportionalis. Quare &c.

*Lemma.*

Tempora lationum ex quiete per vnumquodq; latus trianguli rectanguli, cuius basis ad horizontem erecta sit, æqualia sunt inter se.

Hoc

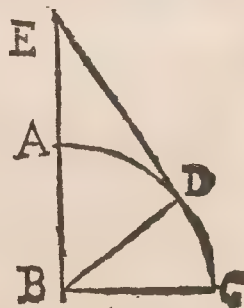
Hoc est tamquam Corollarium sextæ propositionis Galilei de motu accelerato. Sit enim semicirculus abc , cuius punctum sublime sit a . & chorda ab, bc . in semicirculo ad idem punctum b . coaptatæ. Dico tempora per ab , rectam ex quiete in a , & per bc . ex quiete in b . esse equalia. Vtrumq; enim tempus per ab , & per bc . aequale est tempori per diametrum ac ex Galileo ergo sunt equalia inter se tempora per tres lineas ac, ab, bc . Quod &c.



PROPOSITIO XIII.

Tempora lationum per semidiametros quadrantis erecti æqualia sunt temporibus tum secantium, tum etiam tangentium angulorum complementi eleuationis, qua fuerint eleuatæ dictæ semidiametri.

Sit quadrans erectus abc . semidiameter, quæcunq; bd . & tangens de . quæ angulum bde . rectum efficiet. Dico tempus per db , æquale esse tempori per secantem eb , siue per tangentem ed . quarum vtraq; nempè eb est secans, ed tangens anguli abd , nempè complementi eleuationis semidiametri db .



Propositum autem manifestum est per lemma præcedens cū triangulum bde . sit rectangulum, & ideo tempora per vnum quodq; latus equalia sint.

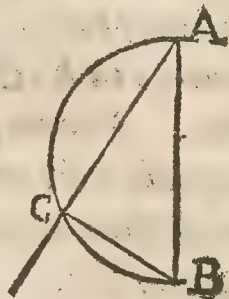
+

PROPOSITIO XIV.

SI ab aliquo puncto plana diuersimodè inclinata digrediantur, & ab illo eodem puncto dimittantur graua eodem tempore simul; ostendit Galileus ex Corollario Propos. 6. de motu accelerato, graua huiusmodi semper in peripheria alicuius circuli in immensum crescentis reperiri. Stante hoc dicimus.

Si graue, quod perpendicularitèr descendit, centrum terræ contingere posset, reliqua grauia eodem simul tempore singula in suis planis conquiescerent.

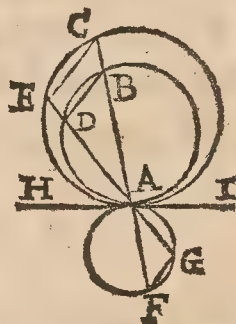
Sit planum perpendiculare ab . in quo omninò erit centrum terræ. Sit ergo terræ centrū b , & fiat circulus acb . qui transeat per centrū terræ b , & per punctum a . à quo grauia digrediuntur. Posito deinde quolibet plano ac , ducatur bc . Ostendit Galileus grauia eodem tempore ad b , & c . peruenire. Igitur eodem tempore conquiescunt omnia; quia cum sit terræ centrum b , & linea bc perpendicularis ad planum ac , erit c . punctum infimum plani ac ; ergo si aliquod graue vltèr procederet, ascenderet. Quod est impossibile. Ergo &c. Supponimus quod graue illud pertinens ad centrum terræ statim quiescat, quod ambiguum est &c.



Lemma.

Si circulum in eodem puncto duo circuli interius, & exterius contingant, & per contactum duæ rectæ lineæ agantur, erunt interceptæ inter duas peripherias in eadem ratione cum interceptis in reliquo circulo.

Sit vt ponitur; & contactus sit a . Dico esse vt bc . ad de , ita af ad ag . Ducatur hi . tangens, quæ tres circulos contingat in a & iungantur ec . db . gf .

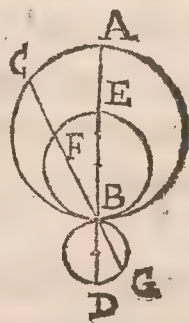


Erit angulus qui ad f . (in alterno segmento) æqualis angulo iag . hoc est ipsi bad hoc est vtrique ipsorum ad b , & c . Sunt ergo ec , db , gf parallelæ. Quare vt cb ad ed interceptæ inter duas peripherias, ita ba ad da , hoc est af . ad ag . interceptæ in reliquo circulo. Quod &c.

PROPOSITIO XV.

SI Plana diuersimodè inclinata ad vnum punctum concurrant, & graua dimittantur eodem simul tempore ex aliqua circuli peripheria, cuius infimum punctum sit concursus planorum, ipsa graua semper in aliquo circulo simul disposita comeabunt.

Sint plana ab perpendiculum, & cb . vtcunque inclinatum, quæ concurrant in b , & per cōcursum b transeat quælibet peripheria bca . ita vt b . sit infimum punctum ipsius. Dico graua ex a , & c . eodem tempore demissa semper in aliqua circuli peripheria comeare, quæ transeat per b .

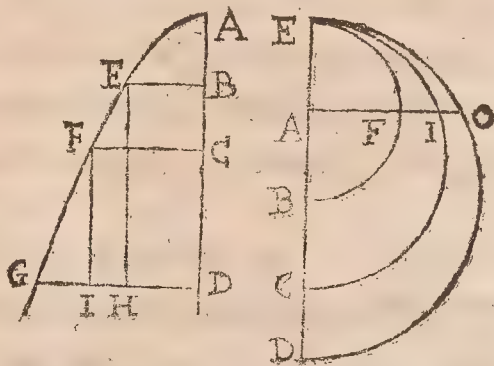


Si enim ponamus graue a descendisse vsq; in e . producat bd . æqualis ipsi ae , & per e . & per d agantur duo circuli qui priorem circulum contingant in puncto b . Erit per Lem. præcedens vt ae , ad cf . ita bd . ad bg . ergo cf , & bg . sunt æquales. Sed bd , bg . ex quiete in b . eodem tempore peraguntur, ergo etiam ae , cf . eodem tempore peragentur (sunt enim æquales longitudine, & inclinatione ipsis bd , bg .) Quare graua a , c , & infinita alia demissa simul ex peripheria bca , semper in aliqua peripheria simul disposita reperientur. Quod &c.

PROPOSITIO XVI.

DAtis quotcunq; spatij. deinceps in directum continuatis, vniciq; suæ lationis tempus adscribere.

Sint spatia quotcunq; deinceps, siue æqualia siue inæqualia ab , bc , cd , vt apparet in prima figura & circa diametrum ad fiat parabola ag . ducanturq; ordinatim be , cf , dg . & sint parallelæ diametro eb . fi . Dico db , bi , ig , tempora esse



spa-

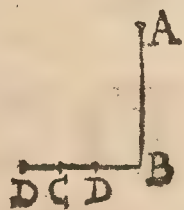
spatiorum respectiuè ab, bc, cd . Hoc enim patet. Nam be , siue dh . tempus est ipsius ab . & cf . vel di . tempus est ipsius ac . quare hi tempus est spatij bc . &c. & sic de reliquis.

Potest etiam sine parabola idem perfici hoc modo. ut in secunda figura. Ponatur ae equalis ipsi ab . primo spatiorum; & ducatur ao perpendicularis ad ad . fiât deinde semicirculi circa diametros eb, ec, ed . &c. qui secent rectam ao , in punctis f, i, o . Dico af, fi, io . esse respectiuè tempora quæ sita spatiorum ab, bc, cd . &c. Nam si ponamus tempus per ab , esse ab , hoc est af , erit tempus per ac . media proportionalis, quæ est ai , ergo tempus differentię bc . erit fi ; eodem modo ostendetur tempus per cd , esse io . Quare patet &c.

Propositum sit nobis; punctum sublime parabolarum (quod optime, & ingeniosè reperit Galileus) diuerso modo considerare. Fiet enim ut nobis plus lucis afferat, ad impetus in singulis parabola punctis determinandos, & clarius mente concipiendos. Placuit has propositiones sub titulo De motu accelerato ponere, licet sapiant aliquid de proiectione, quia sunt circa parabola de genere earum, quæ initium habent ex vertice, & ab ipso motu naturaliter accelerato deriuare concipiuntur, sine ulla instrumentorum impellentium ope.

Lemma,

Si mobile aliquod ex a puncto demissum, eodem tempore peragat duo spatia ab, bc . Dico ipsum omnino transire per punctum c ; quamcunq; lineam descripserit precedenti latione. Transeat enim si possibile est per d . ergo quia discessit ab a . eodem tempore confecit spatia ab , & bd , quod est contra suppositum. Quo enim tempore conficit ab , non absoluit bd , sed ipsam bc . Quare constat &c.



PROPOSITIO XVII.

Proposita qualibet parabola cuius vertex sit b . oportet punctum aliquod sublime reperire, ex quo si graue cadat vsq; in b ,

in b , & ex puncto b . cum impetu iam concepto, horizontaliter conuertatur, ipsam propositam parabolam describat.

Sit quælibet parabola bhe . Ponantur ab , & bc . vtraq. æqualis quartæ parti lateris recti propositæ parabolæ. Sumatur iam in parabola quantumvis producta aliquod punctum e . Dico graue post casum per ab , horizontaliter conuersum in b . cum impetu iam concepto, per ipsum e punctum transire. Debet autem post horizontalem conuersionem in puncto b factam, grauitas suam descensus operationem inchoare. Ducantur ordinatim ch , ef . Ponamusq; tempus casus per bc . esse ch . Ergo graue horizontaliter conuersum in a , decurret motu æquabili tẽpore casus duplum ipsius casus spatium. hoc est 8 . huius. tempore ch . ipsam ch , vel tempore fe (eadem velocitate) ipsam fe . Graue igitur impetu per bc , siue per ab acquisito conficit horizontalem fe . tempore fe . x. huius.

Sed eodem tempore fe . decurrit etiam perpendicularem bf (quando grauitas incipit operari in b vt in casu nostro) ergo eo per lem. dẽ tẽpore conficit bf , & fe . Quare graue omnino transibit per e . preced.

Transit ergo graue post casum ab per singula propositæ parabolæ puncta.

PROPOSITIO XVIII.

IN Quolibet puncto parabola duo simul impetus insunt. Alter horizontalis, qui semper idem est, & æqualis sibi ipsi; Alter perpendicularis, qui nunquam idem est, sed semper augetur.

Dico horizontalem semper esse tamquam linea quæ ex foco ordinatim ducitur. perpendicularem vero esse vt linea quæ ordinatim ducitur ex eo puncto, quod examinatur.

In figura præcedentis Propositionis.

Sit parabola cuius vertex b . & ponantur ba , bc . æquales vtraq; quartæ parti lateris recti. Quia impetus sunt vt tẽpora, erit impetus cadẽtis ex a in b , siue ex b in c , vt ipsa ch . per Propositio. Ex descript. in Galil. lib. 2. nem.

nem X. huius, & eius Corollarium. Vbicunq; ergo sumatur punctum in parabola, impetus horizontalis in eo erit vt ch . Quandoquidem impetus horizontalis est indelebiter æquabilis.

Examinetur iam punctum quodlibet e . Impetus perpendicularis qui est in e , est idem ac impetus naturaliter cadentis per bf ex quiete in b . Vterq; enim descensus venit ab altitudine b , vbi habent initium accelerationis. Impetus autem cadentis ex b in f est fe . ergo impetus perpendicularis in puncto e parabolæ erit fe . Quare in eodem puncto parabolæ sunt duo impetus, alter vt ch . quæ est ex foco, alter vt fe quæ ex puncto examinato applicatur. Quod &c.

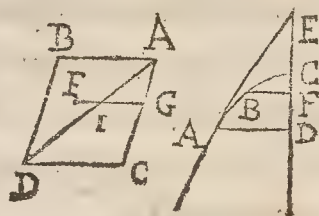
Scholium.

Hinc posset ostendi demonstratione directa proprietas tangentis parabolæ, siue Theorema maius, siue Problema posito prius hoc principio.

Si mobile aliquod a in prima figura ex angulo parallelogrammi alicuius, vel ex quolibet puncto diametri feratur æquabiliter duplici simul latione, nempe progressiua secundum lineam ac , & laterali secundum ab vtcunq; inclinatā.

fitq; proportio duarum velocitatum eadem ac proportio laterum ac ad ab homologè. Dico mobile iturum esse secundū diametrum ad hoc est per ipsam diametrum.

Si enim possibile est feratur mobile extra diametrum per aliquod punctum e , ducaturq; eg parallela ad ab . Ergo quam proportionem habent spatia peracta à mobili, eam habebunt & impetus: nempe vt spatium progressiuum per actum ag ad laterale peractum ge , ita impetus progressiuus ad impetum lateralem, ideoq; vt ag ad ge ita ac ad ab ob suppositionem, siue ac ad cd , siue ag ad gi , essent ergo æquales ge & gi . totum & pars.



Esto iam in secunda figura quodlibet punctum a in curua parabolica abc , & applicata ad , factisq; æqualibus dc , ce , ducatur ae , quam dico tangentem esse. Est focus f , & applicata ex foco recta fb . Erunt iam in a duo impetus alter progressius deorsum secundum directionem lineæ cd , alter lateralis secundum da , estq; progressiui impetus ad lateralem ratio vt ad ad bf , per præcedentem Proposit. siue vt ed ad da (cum equale sit rectangulum sub ed & semisse lateris recti fb , quadrato da) Ergo mobile dum est in puncto a feretur secundum diametralem ae ; sed fertur etiam iuxta parabolicam lineam quā percurrens describit, ergo recta ae , & parabolica nō se intersecant in puncto a , sed tangunt: &c. Hæc demonstratio peculiaris est pro parabola; sed & vniuersalem habemus pro qualibet sectione Conica, consideratis æqualibus velocitatibus vnus puncti, quod equaliter mouetur in vtraq; linea quæ ex focus procedit.

Eadem ratione demonstratur Propositio 18. de lineis spirali-
libus Archimedis vnica breuiq; demonstratione, non solum quando tangens consideratur ad extremum primæ reuolutionis punctum; sed vbicunq; punctum sit in curua spirali semper ostenditur periphæria, quæ per punctū contactus ducitur equalis cuidam rectæ lineæ &c. Quæ Propositio iuncula cum olim inter amicos à me vulgata fuisset, Clar. Virum Galileum meruit habere laudatorem. vt extant ipsius epistolæ apud me.

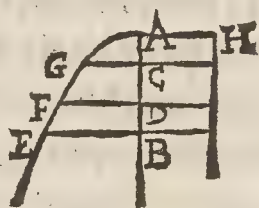
Immò & hac ratione ostenduntur etiam vnico Theoremate tangentes quarundam curuarum, inter quas, omnium linearū Cycloidalium, vt breuiter attingemus ad finem libri de Quadratura Parabolæ, omittentes demonstrationem tam tangentium, quàm etiam solidorum, & centrorum grauitatis ipsius Cycloidis ad euitandam molem. Satis sit interea lectorem hic admonuisse quòd si Cycloidis spatium circa basim conuertatur, erit solidum ad cylindrum circumscriptum vt 5. ad 8. si uerò circa tangentem basi parallelam ut 7. ad 8. Centrum Cycloidis axem secat ita ut partes sint ut 7. ad 5. Demonstratur etiam ratio solidi circa axem ad cylindrum circumscriptum; item in qua

linea axi parallela sit centrum semicycloïdis. Clar. Vir Antonius Nardius ostendit quòd si Cyclois circa tangentem axi parallelam conuertatur solidum ad suum cylindrum erit sub sesquitercium; quæ omnia fortasse aliquando edentur, interea ad opus reuertamur.

Lemma.

Si in diametro parabolæ æquales sint ac ex vertice, & db . non ex vertice, Erit quadratum be . æquale quadratis df . cg .

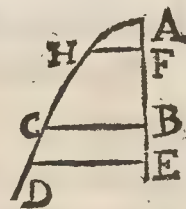
Sit ah . latus rectum, & compleantur rectangula ch , dh . Quia ac . db . ponuntur æquales, erit rectangulum bh . æquale duobus rectangulis dh , ch , seu (quod idem est) quadratum eb . duobus quadratis df . cg . æquale erit. Quod &c.



PROPOSITION XIX.

Impetus in punctis parabolæ sunt inter se vt lineæ ordinatim applicatæ non ad ipsamet puncta, sed tanto longius à vertice quanta est quarta pars lateris recti.

Sit parabola cuius vertex a . focus f . Sumpto que in ea quolibet puncto c , Dico impetum in c esse vt de , quæ applicata sit tanto longius à vertice, quàm ipsa cb , quanta est af . nempe quarta pars lateris recti.



per 2. Gal.
lib. de mo
tu accel.

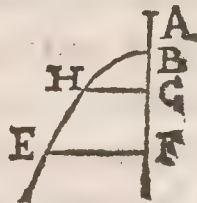
Impetus enim qui simul sunt in c . sunt cb , hf , ergo momentum impetus ex ipsis compositum debet esse potentia ipsis æquale. Sed & recta de . equatur potentia ipsis cb , hf . per lemma præcedens, ergo momentum de . est momentum siue impetus cōpositus ex duobus illis qui sunt in puncto c . Quod &c.

PROPOSITIO XX.

Impetus in quolibet parabolæ pūcto idem est ac impetus gra- Gal. de
motu ac.
uis naturalitèr cadentis ex sublimitate simul, & altitudine
eiusdem parabolæ.

Sit parabola cuius altitudo cb , sublimitas a
 b . Dico impetum in puncto b eundem esse ac
naturalitèr cadentis ex a . in c .

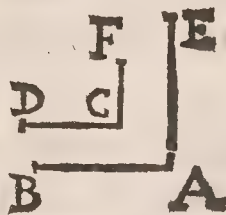
Sumatur cf . æqualis quartæ parti lateris recti,
hoc est ipsi ab . Erit impetus in puncto b : ut linea
 ef . per Præcedentem. At impetus etiam caden-
tis naturalitèr per bf , siue per ac , est eadem linea ef , ergo
idem impetus est in puncto b parabolæ, ac in puncto c . grauis
delapsi ex sublimitate simul & altitudine ab, bc . Quod erat.



PROPOSITIO XXI.

Tempora lationum per datas lineas horizontales post ca-
sus è perpendiculo, æqualia erunt, quando altitudines
perpendicularum duplicatam rationem habuerint illius, quam
horizontales lineæ habent.

Sint horizontales lineæ datæ ab, cd . & al-
titudines perpendiculares sint ea, fc . Sitq;
 ea . ad fc . in duplicata ratione illius quam ab
habet ad cd . Dico post casus ea, fc , eodem
tempore peragi ab , & cd .



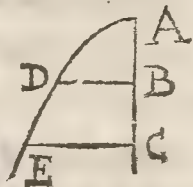
Hoc autem patet. quia cum sint ab, cd . in
subdupla ratione ipsarum ea, fc , erunt etiam vt tempora ca-
sum, & ideo vt velocitates, siue vt impetus qui sunt in a , & c .
Propterea cum sint velocitates in c , & a , vt ipsa spatia cd, ab
homologè, eodem tempore ipsa spatia peragentur. Quod &c.

P R O P O S I T I O XXII.

L In eâ ordinatim ductæ in parabola eodem tempore omnes percurruntur à mobili, quod per eas conuertatur impetu prius aquisito per casum diametri ex quiete in vertice.

Sit ab . diameter parabolæ, & bd , ce . ordinatim ductæ. Dico mobile post casum ab ipsâ bd , & post casum ac . ipsam ce . æqualibus temporibus pertransire.

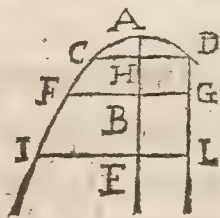
Sunt enim altitudines perpendiculares ab , a c . in duplicata ratione spatiorum horizontalium bd , ce . ob parabolam. Quare per præcedentem eodem tempore peragentur ipsa spatia horizontalia, hoc est ipsæ ordinatim applicatæ, post casus ab , ac . Quod &c.



P R O P O S I T I O XXIII.

T Empora lationum quæ fiunt ex vertice per diametri portiones simul, & suas ordinatim ductas, sunt vt ipsæ ordinatim ductæ; addita tamen singulis medietate lateris recti.

Sit parabola cuius vertex a , focus b , ordinatim ex foco ducta sit cbd , quæ æqualis erit lateri recto. Demonstrata enim fuit ipsa cb , siue bd dupla ipsius ba , & ideo subdupla lateris recti. Ducatur per d parallela diametro dl . Dico tempus lationis per abf . esse gf , & per aci , esse li , & sic de singulis.

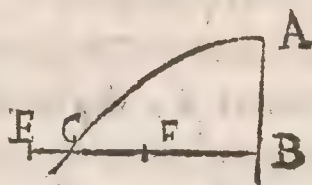


Tempus casus per ab est bc . sed cum dupla sit bc . ipsius ab . tempus per bc . idem erit, ac per ab , nempe bc . Ideo bc . tempus est omnium bf . ei . &c. (cum eodem tempore omnes peragentur per Præcedentem) Tempora autem casuum per ab , ac , sunt ipsæ bf . ei . Propterea tempus per abf . erit fb , & cb .

& ch , simul, vel fg . Tempus item per aei . erit ie simul cum ch , siue il . Quod erat &c.

Aliter idem ostendemus.

Sumatur in parabola quodlibet punctum b . & ducatur ordinatim bc . ponaturq; be . dupla altitudinis ba . Dico iterum, tempus lationis per abc esse bc . cum semisse lateris recti. & sic de singulis. Tempus enim per ab . est bc . & per be . duplam altitudinis post casum ab . tempus erit eadem bc . Cum itaq; tempus per eb . sit cb . tempus per cb tantò minus erit quanto spatium minus est, cum idem impetus retineatur. Sumatur ergo ipsarum eb , cb . tertia proportionalis fb . & erit f b , tempus ipsius cb . post casum ab .

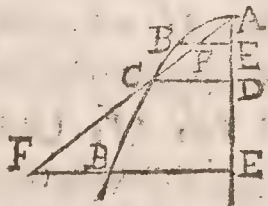


Ceterum lineam fb . esse semissem lateris recti sic notum facimus. Rectangulum sub latere recto, & ab . equale est rectangulo ebf . (utrumq; enim æquatur quadrato bc .) quare reciproca habebunt latera; Nempe erit ut eb ad ba . subduplam; ita latus rectum ad bf , quæ illius subdupla erit. Est itaq; tempus per abc . ipsa bc . cum bf . semisse lateris recti. Quod erat &c.

Lemma.

Sit parabola abc , ex vertice inclinetur ac . & ordinatim ducantur cd . ex puncto c . & be utc unq; secans ac . in f .

Dico be . mediam proportionalem esse inter cd , & fe . Est enim da ad ae , vel cd . ad fe . in duplicata ratione ipsius cd . ad be . ob parabolam. Quare media proportionalis est be . inter ipsas cd , fe . Quod erat &c.

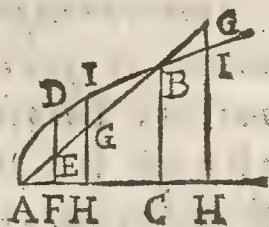


PROPOSITIO XXIV.

TEmpora lationum perpendicularium ex punctis lineæ ad horizontem inclinatæ, sunt ut lineæ quæ per eadem puncta or-

Et ordinatim ducuntur in parabola, cuius diameter sit Horizon, vertex autem punctum inclinationis.

Sit linea ad horizontem inclinata ab , & sit horizon ac , & circa diametrum ac describatur parabola quæ secet ab . in quolibet puncto b , & ducatur bc . ad horizontem perpendicularis; sumanturq; puncta quælibet e . & g ; ac ducantur ordinatim igh , de



f . Dico tempora casuum per gh , & per ef . esse ib , & df . Si enim ponamus tempus per bc . esse bc , erit tempus per gh . media proportionalis ib ; & per ef . media proportionalis df . Vti demonstratum est in lemmate præcedenti. Quare &c.

PROPOSITIO XXV.

SI in parabola linea ab ex vertice inclinetur, & ordinatim ducatur de , quæ inclinatam secet in f . Erit ipsa ef . tempus per af . & reliqua fd . tempus per reliquam fb . Quando motus veniant ex quiete semper in a .

Tempora enim per af . ab . sunt in subdupla ratione spatiorum af , ab ., siue linearum ae , ac . Sunt ideo tempora vt cb , ed , (quia istæ sunt in illa subdupla ratione) vel vt ed , ef , (sunt enim continuæ cb , ed , ef) Quare cum tempus per af . sit ef . & per ab . sit ed , erit fd . nempe reliquum tempus, tempus per fb . reliquum spatium post quietem in a . Quod erat &c.



Lemma,

Inclinetur ex vertice parabole recta ab , & parabolam tangat in vertice recta ac . Ducatur quævis alia di . quæ occurrat parabole in i , & inclinata in e . Dico de . mediam proportionalem esse inter cb , di .

Est

las accelleratas æquabiles fieri, & grauiā per spātia $b.a, c.a$ recurrere cum gradu subduplo impetis quem habebant in b , & c , erunt tempora recursuum eadem ac tempora casuum. Tempora autem lationum æquabilium compositam rationem habent ex ratione longitudinum spatiorum ab , ad ac ; & ex ratione velocitatum contrariè sumptarum ce , ad bd . (sunt enim velocitates in b , & c eadem ac in d , & e , & velocitates in d , & e sunt vt tempora $bd.ce$.) Ergo etiam tempora casuum naturaliter acceleratorum per ab, ac . compositam rationem habebunt ex iisdem rationibus ab . ad ac . & ce . ad bd . Quod erat &c.

P R O P O S I T I O XXVIII.

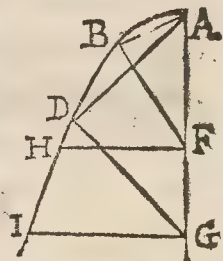
Tempora lationum per chordas ex uertice parabolę, sunt vt lineę quę ordinatim applicantur non ex terminis chordarum, sed ex punctis diametri in quę cadunt lineę rectos angulos continentes cum ipsis chordis,

Sit parabolę diameter ag . & chordę ex uertice sint $ab.ad$. fiantq; anguli abf, adg . recti, & ordinatim ad puncta $f.g$. applicantur fh, gi . Dico tempora lationum per ab, ad . esse ipsas ordinatim applicatas fh, gi .

Tempus enim per ab . æquale est tempori per af . existente angulo abf . recto. Item tempus per ad . ob eandem causam æquatur tempori per ag . Tempora autem per $af.ag$. sunt ipsę $hf.ig$. Ergo tempora lationum per chordas $ab.ad$. sunt hf , & gi . Quod erat &c.

Proponetur etiam hoc modo.

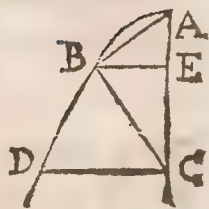
Tempora lationum per chordas ex uertice parabolę sunt vt lineę quę applicantur non ex terminis chordarum, sed tanto longius à uertice quanta est lateris recti longitudo.



Liber Primus.

129

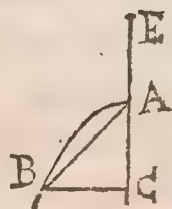
Ostensum enim est in precedenti, tēpus per ab , (facto angulo abc recto) esse lineam cd . Dico nunc lineam dc tanto longius à vertice applicatam esse, quam ipsa be , quanta est lateris recti longitudo. Hoc est ipsam e latus rectum esse.



Hoc patet. Est enim rectangulum cea . aequale quadrato eb . ob angulum rectum ad b . propterea ce . latus rectum est. Quod erat &c.

Corollarium.

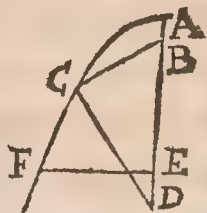
Hinc manifestum, est eodem tempore peragi quamlibet inclinatham ex vertice; puta ab , ac portionem axis sibi respondentem ac . cui tamen additum fuerit in directum latus rectum ae , ita ut lationes fiant per ab ex quiete in a , & per c ex quiete in e .



P R O P O S I T I O XXIX.

TEmpora lationum per lineas quæ ex foco parabolæ inclinantur, sunt ut lineæ ordinatim applicatæ non ad puncta in quæ cadunt inclinatorum perpendiculares, sed tantò superius versus verticem, quanta est quarta pars lateris recti.

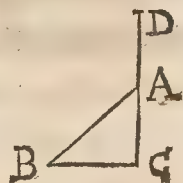
Sit parabola cuius vertex a . focus b . & ex foco inclinetur bc . fiatq; angulus bcd . rectus. & à puncto d . sumatur versus verticem parabolæ linea de . æqualis quartæ parti lateris recti. Dico tempus per bc . esse lineam ef . Tempus enim per bc . æquatur tempori per bd . ob angulum bcd . rectum, hoc est per ae . (sunt enim æquales bd , ae) sed tempus per ae , est ipsa ef . ergo tempus per bd , vel bc . erit eadem ef . Quod erat &c.



PROPOSITIO XXX.

Dato plano inclinato perpendiculum erigere, quod eodem tempore ac ipsum planum inclinatum conficiatur.

Sit inclinatum planum ab . cuius eleuatio ac . fiat vt ac . ad ab . ita ab , ad aliam, quæ fit cd . Dico planum ab . ex quiete in a , & perpendiculum dc . ex quiete in d . eodem tempore confici.

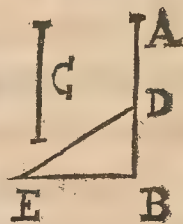


Tempus enim per ab . ad tempus per ac , est vt ab ad ac : tempus etiam per dc . ad tempus per ac . est vt ab . media proportionalis ad ac ; quare tempora per ab , & dc æqualia erunt. Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXI.

AD datum perpendiculum planum inflectere datæ longitudinis, ita vt perpendiculum ipsum, & inflexum planum eodem tempore absoluantur.

Debet autem longitudo dati plani minor esse ipso perpendiculo.



Sit datum perpendiculum ab , & data plani longitudo sit c . minor perpendiculo. Fiat vt a b . ad c . ita c ad aliam quæ fit db . & ex puncto d aptetur de . æqualis ipsi c . Dico tempora lationum per de , & per ab . esse æqualia. Huius demonstratio congruit cum precedenti, quandoquidem in continua proportionem sunt ab , de , db . Quod &c.

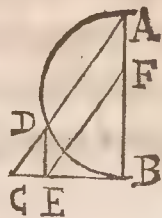
PROPOSITIO XXXII.

AD datum perpendiculum ab , planum inflectere ita vt cum perpendiculo quemlibet datum angulum acutum con-

contineat, puta æqualem ipsi bac , & eodem tempore ac ipsum perpendiculum absoluator.

Fiat circa diametrum ab . circulus qui secet ac in d : Demissaq; perpendiculari de . compleatur parallelogrammum $adef$.

Manifestum est planum fe . quæsito nostro satisfacere. Cum enim fe . equalis sit ipsi ad . & æqualiter inclinata ob parallelogrammum, eodem tempore absolventur fe , ad vel ab . Quod erat &c.



P R O P O S I T I O XXXIII.

AD datum perpendiculum dc , in figura Propositionis XXX. & ex dato in eo puncto a . planum inflectere, quod eodem tempore ac ipsum perpendiculum conficiatur ex quiete.

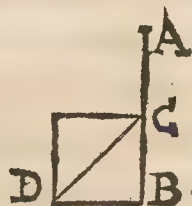
Reperiatur inter dc , ca media proportionalis ab , & habebimus longitudinem plani alicuius. Applicetur hæc longitudo ex a , sitq; illa iam applicata ab : Manifestum est ex præcedentibus Propositionibus ipsam ab . & perpendiculum dc eodem tempore absolui. cum sint in continua proportionem dc ab ac . Quod erat &c.

P R O P O S I T I O XXXIV.

SI ad perpendiculum aliquod ab , planum cd inflexum sit ad angulū semirectum. Erit tempus per cd . æquale tempori perpendiculi, quod ipsius cb . duplum sit. Proponetur etiā hoc modo. Tempus per diametrum quadrati erecti, æquale est tempori per duplum lateris erecti.

Sit cd . planum ut supponitur. vel sit diameter quadrati cuius latus cb . erectum sit. ponaturq; ab . dupla ipsius cb . Di-

co tempora per cd , ab , esse equalia. Quia dc . ad cb potentia est ut ab ad eandem cb . longitudine, nempe in ratione dupla, erunt continue proportionales ab , cd , cb . Quare per precedentes Propositiones eodem tempore absoluentur perpendiculum ab , & planum inclinatum cd . Quod erat &c.

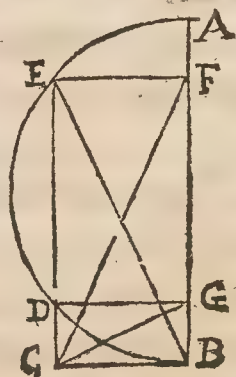


P R O P O S I T I O XXXV.

AD datum perpendiculum ab , planum, vel plana inclinare ad datum in horizonte punctum c , ita ut inclinata plana & perpendiculum ipsum eodem tempore absoluantur.

Debet autem punctum c . Distare à puncto b . nō amplius quàm sit semissis ipsius ab .

Fiat circa ab . circulus $aedb$, & erigatur ce . quæ omninò incidet in circulum. (aliàs problema insolubile esset) incidat in d . & e . Ductisq; ef . dg . parallelis horizonti bc . Dico plana fc , gc . ad punctum c inclinata, eodem tempore absolui.



Cum enim eb . fc . sint diametri figuræ re-ctangule erectæ, & ideo æquales, & equaliter inclinatæ, eodem tempore peragentur. Ergo tempus per ab , per eb , vel per fc . vnum atq; idem est.

Eodem modò infertur tempus per gc equale esse tempori per ab . Quod erat &c.

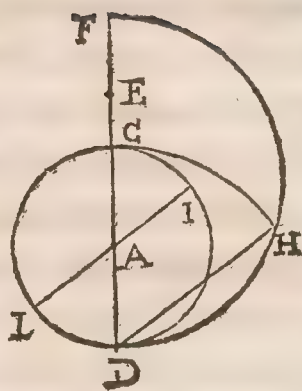
P R O P O S I T I O XXXVI.

IN dato circulo cuius centrum est a . Diametrum aptare ita ut tempus per aptatam diametrum equale sit cuilibet dato tempori.

Debet autem datum tempus maius esse tempore casus per dia-

diametrum perpendicularem.

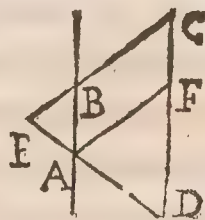
Ponamus tempus per diametrum perpendicularem cd . esse cd . & tempus datum sit ed . Reperiatur ipsarum cd , ed tertia proportionalis quę sit fd . & circa fd fiat circulus $fh d$. in quo ex puncto d . aptetur dh . equalis ipsi cd . Postremo ipsi hd . agatur per a . parallela il . Dico diametrum il . dato tempore ed . absolui.



Cum enim tempus per ed , sit cd , erit ed , (quia media proportionalis est) tempus per fd , hoc est per hd . (per sextam Galilei de motu accelerato) hoc est per il . quę equalis & parallela est ipsi hd . Tempus igitur per diametrum il . est ed . Quod erat &c.

PROPOSITIO XXXVII.

SI fuerint ab . dc . ad horizontem perpendiculares, & sumatur vbicunq; punctum e , siue intra, siue extra parallelas, fiatque ad e . angulus dec rectus. Dico per interceptas ad , bc . semper esse tempora lationum ex quiete equalia. Ducatur enim per a af . parallela ipsi bc . erit angulus fad . equalis angulo e ; & ideo rectus. Quare tempora per fa . ad . latera trianguli rectanguli, cuius basis erecta est, æqualia erunt inter se. & ideo etiam per bc . ad . (sunt enim af . bc . latera opposita parallelogrammi, quę semper eodem tempore peraguntur.) Quod erat &c.



per lem.
13 huius

PROPOSITIO XXXVIII.

SI ab eodem horizontis puncto a . ad idem planum perpendiculare bc . duo plana inclinentur ab . ad equaliter ab inclinatione semirecta distantia, tempora lationum per ipsa plana inclinata, equalia erunt inter se.

Erigatur ex a perpendiculum ae . Fiatq; circulus circa triangulum abd .

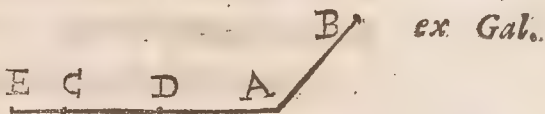
Quia

a duo plana ad aliquod planum *bc* inflectantur, ita vt *ab* ad *ad* fit vt *bc* ad *ca*. erunt tempora lationum per vtrumq; inclinatum planum æqualia.

PROPOSITIO XXXIX.

SI fuerit quodcunq; planum eleuatum *ab*, & quodcunque horizontale spatium *ac*. sectum bifariam in *d*. Dico si ponatur tempus per *ab*, esse *ab*. tempus per *ac* post casum *ba* esse semissem ipsius *ac*, nempe *ad*.

Ponatur enim *ae*. dupla ipsius *ab*.
Iam si supponamus tempus per *ab*. esse *ab*. erit tempus per *ae* eadem *ab*. Sed si spatij *ae* est tempus *ab*, erit spatij *ac* tempus *ad*. (est enim vt spatium *ae*, ad spatiū *ac*, ita tempus *ab*, ad *ad*.) Quare cum tempus per planū eleuatum *ab*. sit ipsa *ab*. erit post casum *ba*, tempus per *ac*. dimidia *ac*. Quod oportebat &c.



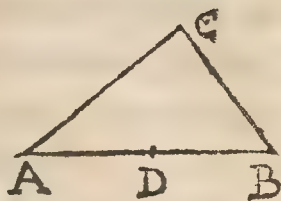
Hæc Propositio re ipsa congruit cum propof. 25. Galilei de Motu accelerato. Nos illam diuerso modo proposuimus consulentes opportunitati eorum quæ hinc sequuntur, vt infra apparebit.

PROPOSITIO XL.

SI ex terminis *a* & *b*. alicuius lineæ horizontalis duo plana inæqualia ad idem punctum *c*. composita fuerint, *ca* maius, *cb* minus. & differentia longitudinis planorum equalis sit semissi horizontalis *ab*. Erit tempus lationis directæ ex *c* vsq; in *a*. æquale tempori lationis inflexæ ex *c* per *b*. vsq; in eundem terminum *a* horizontalis spatij.

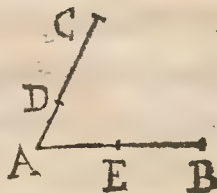
Diuidatur *ab*. bifariam in *d*. erunt ergo *cb*, *bd*. equales ipsi *ca*. Ponamus tempus per *cb* esse *cb*. hoc supposito erit tem-

tempus ca ipsa ca ; & per duas cb, ba ,
tempus, per Præcedentem, erit cbd ; nem-
pe æquale ipsi tempori ca . Quod erat &c.



Problema.

Hinc manifesta est solutio problematis;
dato plano inclinato ac , & horizonte ab . oportet minus aliquod
planum, inuenire cd . ita ut si ex terminis a , & b . ad unum
punctum duo illa plana componantur, tempus lationis per maius
æquale sit tempori lationis per minus, & horizontem simul,
Dematur ex plano ac . pars cd æqualis ipsi a
e semissi horizontalis spatij. reliquum ad . erit
planum quæsitum.



Si verò facta detractiōe ex ca nihil reli-
quum sit, vel fieri nullo modo possit, problema
insolubile erit. Demonstratio patet ex Præce-
denti.

Dato vero minori plano ad , & spatio horizontali ab in ea-
dem figura, si ipsi ad . addatur dc . quæ æqualis sit ae , semissi
horizontis, maius planum quæsitum erit ac . Debent autem v-
traq; plana ad ; ac . simul, maiora esse spatio ab , alias insolu-
bile esset problema; nam duo latera trianguli reliquo debent esse
maiora.

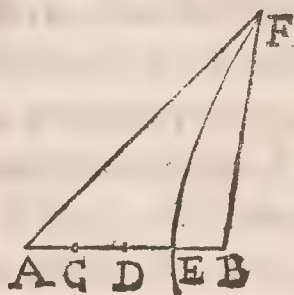
Quando data fuerint ipsa duo plana inæqualia ad, ac , &
queratur quantum sit spatium horizontale, ex cuius extremis
punctis erigi data plana possint, & ad unum punctum componi,
ita ut tempus lationis per maius planum, æquale sit tempori la-
tionis per minus & per horizontem simul; Accipietur differentia
planorum dc , quæ duplicata spatium horizontale quæsitum ab
exhibebit. Debent autem tres lineæ ab, ac, ad tales esse ut
triang. possint cōponere; alias probl. esset insolubile. Horum om-
nium demonstratio cum illa præcedentis Propositionis congruit;
ideo rem indicasse satis duximus. Libet hic obiter recensere
quasdam propositiunculas, quamquam ex 3. Conicorum depen-
deat ipsarum demonstratio: apparebit enim ex ijs naturam etiam
circa

*circa hyperbolen quasdam nugas meditatam fuisse ad motum spe-
ctantes. Si cui conica non placent, digressionem hac prætermittam,
paucam hac evitare poterit, & ad Propositionem 44. se conferre.
Materia præcedentium hanc continuationem nimis expostula-
bat.*

PROPOSITIO XLI.

SI recta linea ab . in quatuor æquales partes ac, cd, de, eb . di-
uisa fuerit, & ex punctis c, e , excitentur duæ hyperbolæ,
quæ sectiones oppositæ dicuntur, quarum foci sint a , & b . Sum-
pto in altera earum quolibet puncto f . erit tempus per fa , æ-
quale tempori per fb, ba .

Hoc enim patet ex præcedentibus. Nam
propter hyperbolam linea fa , æqualis est
ipsis fb, ce . per 51. tertij Conicorum. $\perp$.
Sed ce . semissis est spatij horizontalis ab .
per hypotesin, ergo æqualia sunt tem-
pora lationum tam per fa , quam per fb ,
 ba . Quod erat &c.



PROPOSITIO XLII.

SI datum sit horizontale spatium ab terminatum, & longi-
tudo alicuius plani f . data sit maior quam ab . Secare o-
portet planum f . in duas partes inæquales ea lege, vt si ex ter-
minis a, b , facta plana ad idem punctum componantur, tem-
pus lationis per maius planum, æquale sit tempori lationis per
minus planum & per horizontalem simul.

Hoc duplici modo absoluemus. Primum contemplatiuè,
siue per resolutionem, deinde practicè.

Resolutiuè hoc modo. factum iam sit quod faciendum est.
& sint duo plana ea, eb , vt imperatum est, nempe æqualia si-

S mul

mul ipsi f , & eiusmodi vt tempus per ea , æquale sit tempori per eb , ba . Producatur ab , vtrinq; in c , & d , ita vt tota cd . æqualis sit ipsi

ex 3. l. f , & ca , bd . æquales sint inter se.

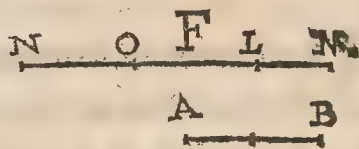
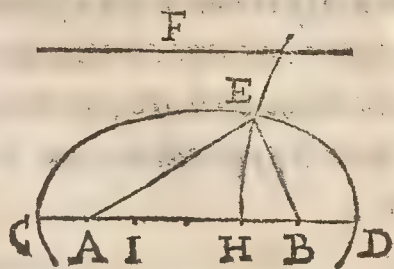
Conicor.

Certum est quia ae , eb , simul æquales sunt ipsi cd , punctum e esse in ellipfi, cuius axis maior est cd , & foci sunt a, b , puncta. Certum etiam est, quia tempus per ea æquale est tempori per eb , ba , idem punctum e esse in hyperbola cuius foci sint a, b , & vertex h . (diuisa nempe ab , in quatuor partes æquales, quarum vna sit hb .) hoc autem demonstratum est in præcedenti. Erit ergo punctum e . in communi concursu duarum sectionũ, sed duæ sectiones datæ sunt; quandoquidem dantur foci communes vtriusq; a , & b , & cd . data est axis maior ellipsis; daturq; ih . diameter hyperbolæ, nempe semissis ipsius ab ; quare etiam punctum e . datum erit.

Componetur hoc modo. Factis igitur duabus sectionibus hyperbola, & ellipfi, quæ concurrant in e , si à puncto e ducantur ea , eb , erunt ea , eb , simul æquales ipsi f , & erit tempus per ea , æquale tempori per eb , ba , simul, ob hyperbolam. Quod oportebat &c.

Facilius tamen hoc modo practicè in figura sequenti.

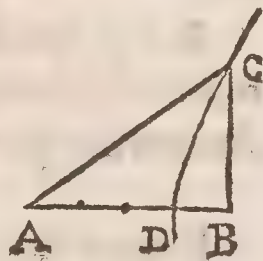
Secetur ab ipsa linea F . pars lm , quæ æqualis sit semissi spatij horizontalis ab . & reliqua ln . diuidatur bifariam in o . Dico no , om esse plana quæ sita, quæ si à punctis ab inclinentur ad vnũ punctum, æqualia facient tempora lationum, tam per maius planum om , quàm per minus no simul cum horizonte ba . Hoc autem perspicuum est ex Propositione 41. cum differentia longitudinis planorum lm , sit per constructionem æqualis semissi spatij horizontalis ab . Quod erat &c.



PROPOSITIO XLIII.

Dato horizontali spatio ab , datoq; angulo bac , qui minor sit angulo trianguli æquilateri, (alias enim problema insolubile esset) oportet triangulum constituere quod habeat basim ab , & angulum bac . & tempus per latus ca , æquale sit tempori per cb , ba .

Diuidatur ab . in quatuor æquales partes quarum vna sit db & ex vertice d , focis a , b , fiat dc hyperbola quæ secet rectam ac , in c . (secabit enim omnino, vt infra demonstrabimus.) Dico c esse tertium quæsitæ trianguli punctum. Ducta enim cb , patet differentiam inter ac , cb , esse semissem ipsius ab , propter hyperbolam, & propter diuisionem lineæ ab in quatuor æquales partes. Quare tempus per ca , æquale erit tempori per cb , ba : Quod erat &c.



Quod autem in præcedenti figura (supposito angulo bac minore quam sit angulus trianguli æquilateri) linea ac cum hyperbola conueniat, sic demonstrabimus in sequenti figura.

Sit asymptotos bc . Ergo rectangulum eaf æquale est quartæ parti figuræ per 45. tertij Conicorum. Quadratum etiam fc æquale est eidem quartæ parti figuræ, per primam secundi Conicorum: erunt ergo æqualia inter se rectangulum eaf , & quadratum fc . Quare vt af . ad fc . ita fc . ad ae , hoc est ad fd . Sunt igitur puncta dca in semicirculo cuius diameter est da , & centrū b . Sed cū sint æquales bf . af . per constructionē in propositione præcedenti; & anguli ad f . recti sint, est. n ba axis, & fc ad axem applicata. erunt æquales cb , ca . & triangulum abc , æquilaterum erit. Qualibet ergo linea qua



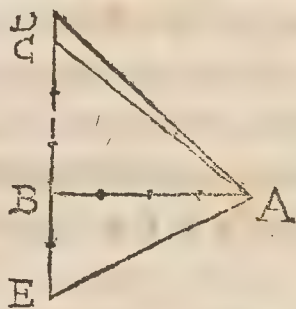
ad punctum d . angulum contineat cum da . minorem angulo abc , trianguli æquilateri, conueniet omnino cum bc ; Quare in figura præcedentis propositionis linea ac conueniet cum asymptoto, & ideo etiam cum hyperbola.

P R O P O S I T I O X L I V.

EX infinitis speciebus triangulorum rectangulorum, vna tantum est quæ habeat hanc prerogatiuam, quod scilicet tempus per hypotenusam æquale sit tempori per reliqua duo latera.

Et hæc species illa est quæ prima omnium, hoc est, quæ in minimis numeris habet tria latera comensurabilia; Nempe in Aritmetica proportionē numerorum 3. 4. & 5.

Exponatur triangulum abc ; cuius latus ab horizontale sit 4. & bc . erectum sit 3. hypotenusæ autem ac . sit 5. Per spicuum est angulum cba . rectum esse; cum quadratum ac . 25. æquale sit duobus quadratis cb , ba . 9. & 16. Manifestum etiam est tempus per ca . æquari tempori per cb , ba . cum differentia inter ac . cb . sit 2. semissis spatij horizontalis ab . quod est 4.



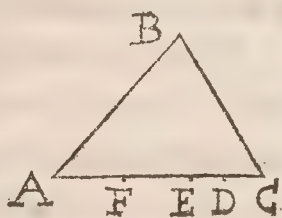
Dico præterea nullam aliam speciem triangulorum rectangulorum habere illam proprietatem. Nam si possibile est, habeat. & sit triangulum illius speciei ipsum adb .

Quia tempus per da . æquale est tempori per dba . erit differentia inter ad . db . æqualis semissi horizontalis ab . Ponatur in directum ipsi db . linea be , quæ equalis sit semissi horizontalis; erunt iam ad , de . æquales inter se; & ac , ce , ob eandem causam æquales inter se; quod impossibile est. Iuncta enim ae . esset vterq; angulus dae , cae , equalis angulo e . quod est absurdum. Nulla ergo species triangulorum rectangulorum reperitur, præter iam dictam quæ habeat superius enarratam proprietatem.

Possemus etiam demonstrare ex infinitis speciebus triangularum obliquangulorum, quæ unum angulum datum habeant, puta 40. graduum, unam tantum speciem esse quæ prædictam proprietatem habeat. Quinetiam ostenderetur ex infinitis hyperbolarum speciebus, unam tantum speciem esse quæ illam habeat prærogativam. Sed non est tanti omnia hæc minuta enucleatim percensere, ut lectoris patientia, benevolentiaq; ulterius abutamur.

PROPOSITIO XLV.

SI Fuerit quodcunq; triangulum abc , habens latera ab, bc inæqualia, puta ab maius, bc minus & basim horizontalem. Dico eodem tempore fieri lationem per ba . solum, & per bc , simul cum tanto horizontali spatio quanta est bis differentia inter ipsa latera.

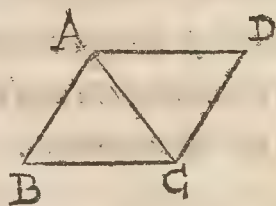


Sit enim differentia inter latera cd , cuius dupla ponatur ce . Peripicuum est bc, cd , simul æquari ipsi ba . Iam si supponamus tempus per ba , esse ba , erit tempus per bc . ipsa bc , & post casum bc , tempus per ce . erit dimidia ipsius ce , hoc est cd . Aequale est igitur tempus per ba tempori per bc, ce simul. Quod erat &c.

Iisdem positis : quando ce (in eadem figura) minor fuerit quam basis trianguli. Dico duo graua eodem temporis momento demissa ex b per latera ba, bc post conuersionem horizontalem factam in a , & c . conuenire in puncto basis f . quod quidem bifariam secet ipsam ae . Ostensum enim est eodem tempore peruenire duo graua ad puncta a . & e . ergo etiam reliqua spatia af, ef , æquali tempore peragentur, cum sint æqualia per hypothesim, & gradus velocitatis æquales sint. per V. huius.

PROPOSITIO XLVI.

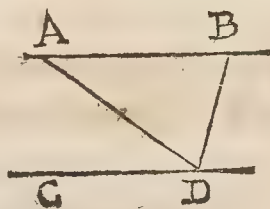
Posito quolibet triangulo abc , cuius basis cb horizonti parallela sit. Si graue ex quiete in vertice a per alterum latus ac cadat, & inde per basim cb cum impetu concepto conuertatur, basiq; per acta cum eodem impetu per alterum latus ba ascendat, impetus ille perducet graue per ascensum ba . vsque ad idem punctum a . ex quo discesserat.



Compleatur parallelogrammum $abcd$. eritq; ad , horizontalis, & quia impetus acquisitus per descensum ac . perducit graue per planum cd . vsq; ad d . per Scholium Prop. 23. Galilei de Motu Accelerato, idem impetus (post transmissam basim motu æquabili) perducet mobile ex b vsq; in a , sunt enim ba , cd æquales, & æqualiter inclinatae. Quare &c.

Lemma.

Si inter parallelas horizontales ab , cd . due lineæ fuerint bd , da . erit tempus casus per unam bd , ad tempus ascensus per alteram da , ut est ipsa bd ad da . Est enim tempus casus per quamcumq; lineam ex Galileo, æquale tempori ascensus per eandem, quando fiat ascensus cum impetu per descensum acquisito. Sed tempora casuum per bd , & ad sunt ut bd ad ad , ergo etiam tempus casus per bd . ad tempus ascensus per da , crit ut bd : ad da . Quod &c.

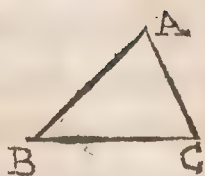


PROPOSITIO XLVII.

Posito quolibet triangulo abc . cuius basis bc horizontalis sit, si fiant lationes ex quiete in vertice a . vtrinq; per tria latera,

latera, erit tempus lationum per ac, cb, ba , æquale tempori lationum per ab, bc, ca .

Ponamus enim tempus casus per ab . esse ipsā ab , erit tempus per bc . semissis ipsius bc . per Proposit. 40. huius, cum bc sit horizontalis: transmissa vero basi motu æquabili, tempus ascensus per ca erit ipsa ca per lem. præced.. Eodem modo: cum sit tempus casus per ab ipsa ab , erit tempus casus per ac ipsa ac , & per horizontalem cb erit semissis ipsius cb , inde per ascensum ba erit ba . per lemma præcedens. Est ergo tempus per utramq; viā tamquam duo latera trianguli simul cum dimidia basi. Quare tempora per utramq; viam, siue $abca$, siue $acba$. æqualia inter se erunt. Quod &c.

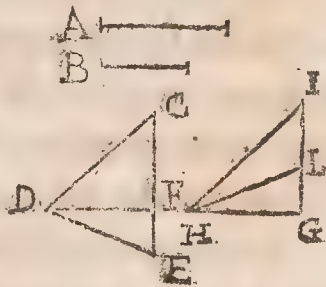


Possent similia demonstrari de figuris polygonis, & irregularibus: Sed cum hæc omnia solita breuitate exequi non possint, existimavi eorum demonstrationem apud eruditos plus molestiæ allaturam, quam doctrinæ.

PROPOSITIO XLVIII.

AD aliquod perpendiculum data duo plana diuersæ longitudinis ab eodem horizontis puncto inflectere, ita ut tempora per inflexa plana æqualia sint. Vel.

Proponit aliquis geminos afferes a , & b . diuersæ longitudinis, ea lege ut ab vno eodemq; puncto in pavimento inflecti debeant ad parietem, & grauia ex fastigijs eorū eodem tempore demissa, simul eodemq; tempore ferantur in terram.



Componantur a , & b . ad angulū rectum; sintq; cd, de , & producta ce , ipsi perpendicularis sit df . Accipiatu iam in pavimento distantia gb à pariete gi , quæ æqualis sit ipsi fd ; Tum à puncto b . inflectantur ad parietem hi, hl . æquales ipsis a, b , vel ipsis cd, de .

Dico

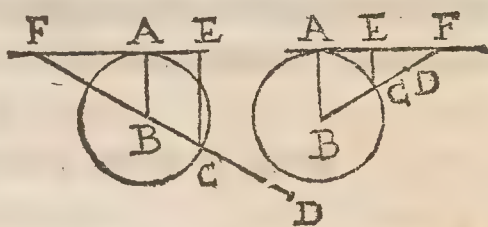
Dico tempora per ih , & per lh . æqualia esse.

Concipiamus basim ce . trianguli cde , esse ad horizontem erectam. Manifestum est tempora lationum per cd , de . æqualia esse. per lemma Propos. 13. Sed cum duo latera cd , df . duobus lateribus ih . hg . æqualia sint vtrumq; vtrique, & anguli cf , ig . recti, si ex quadratis equalibus dc . hi . demantur quadrata æqualia df . hg . remanebunt æqualia quadrata fc , gi , & ideo fc . gi . lineæ equales erunt; & propterea integra trianguia cdf . ihg . æqualia, & similia erunt. & tempus per ih . æquale tempori per cd .

Eodem modo ostendetur tempus per lh . æquale tempori per de . Quare cum æqualia sint tempora per cd . de . æqualia erunt etiam per ih . hl . Quod erat &c.

P R O P O S I T I O I L.

SI ex a puncto sublimiori circuli ad horizontem erecti graue cadat vsque in centrum b , & inde per quodcumq; planum siue eleuaturn, siue decliue, conuertatur cum impetu iam concepto; graue huiusmodi tempore casus ab absoluet spatium bd ; quod nempe æquale sit vtrisque. tum semidiametro bc , tum etiã ipsius perpendicularo ce .



Sec̃ta sit cd equalis ipsi ce . Dico tempus per ab , ex quiete in a , æquale esse tempori per bd . post casum ab . Est. n. ob equalitatem vt dc ad cb , ita ce ad ba , hoc est cf ad fb , & permutando vt cd ad cf . ita cb ad bf . in vtraq. figura.

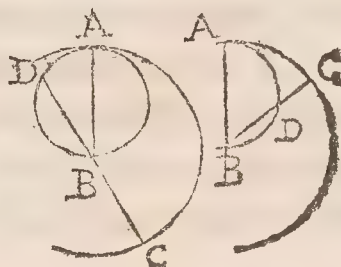
Sed in prima tantũ erit componendo vt df ad cf , ita cf ad bf . In secunda verò erit. Conuertendo, per conuersionẽ rationis, & iterum conuertendo, vt df ad cf , ita cf ad bf . Quare in vtroq. casu tres lineę df , cf , bf . sunt in continuã proportionẽ.

Iam si tempus per ab ponatur esse ab , erit tempus per fb ipsa fb ,

la fb , & per fd tempus erit media proportionalis fc . Quare tempus per reliquum lineæ, nempe per bd , erit reliquum temporis, nempe bc . Idem ergo tempus est lationis per ab ex quiete in a , & per bd post casum ab .

In hac propositione re ipsa demonstrantur duo Theoremata Galilei, De Motu accelerato: sed quia valde ad rem nostram faciunt, eadem diuersa iterum ratione contemplantur, ut lucem sequenti Corollario præferant.

Si graue naturaliter cadat ex a in b . & ex b cum impetu concepto, per quodlibet planum bc conuertatur. Queritur quantum spatij per planum bc absoluat mobile tempore casus ab .



Fiat circa diametrum ab . circulus adb , centroq; b , & intervallo ba circulus ac . Dico graue delapsum per ab , si ex puncto b cum impetu concepto conuertatur per planum inclinatum bc , tempore equali tempori casus, percurrere spatium æquale utrisq; simul bc , cd .

Si enim post casum ab graue conuerteretur per planum quodcunq; bc , motuq; æquabili procederet, graue huiusmodi per planum bc tempore equali tempori casus spatium perageret duplū ipsius ba , ergo percurreret spatium duplum ipsius bc . tempore casus, si post casum æquabili motu procederet. Sed superueniente operatione gravitatis, mobile non procedet motu æquabili super plano bc ; Quin immò tempore casus ab , gravitas promouebit mobile super plano bc tantum spatium quanta est inclusa in circulo linea db (quo enim tempore gravitas trahit mobile ex a in b . eodem tempore trahit etiam ex d in b per c . Galilei de Motu Accelerato.) Ergo dupla bc in prima figura addenda erit db , conspirant enim deorsum tam motus æquabilis, quam motus gravitatis; In secunda vero figura à dupla bc detrahenda erit db (quia motus gravitatis contrarius est motui æquabili) & sic

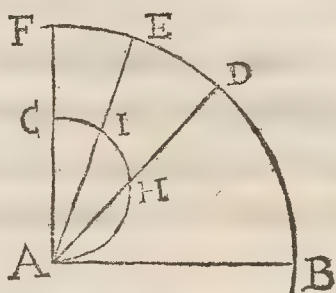
T

con-

concludemus mobile post conuersionem, tempore equali tempore casus ab, percurrere spatia bc, cd. in utraq; figura.

Corollarium.

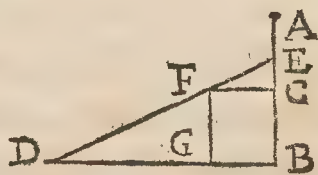
Pro Corollario animaduertimus quod si graue aliquod ex puncto a impellatur motu velocissimo per horizontalem ab, peragatq; certo aliquo tempore spatium ab; atque eodem tempore quo fit latio ab grauitas motu naturali deorsum trahat per tantum spatij quanta est ac. si centro a intervallo ab fiat circulus bdef, & circa diametrum ac alius circulus ahic, mobile impulsu ab eodem semper impetu per plana ad, ae, af, eodem tempore peraget singulas interceptas cf, ie, hd, ab. &c. etiam infra horizontem.



P R O P O S I T I O L.

SI duo grauia demittantur eodem temporis momento ex diuersis plani eleuati punctis, & post casum per eandem horizontalem lineam conuertantur; grauia in quodam puncto simul conuenient, quod in horizontali tantum distat à plano eleuato quanta est dupla medię proportionalis inter altitudines casuum.

Sit planum eleuatum ab. in quo sumantur duo quaelibet puncta a, c. ex quibus duo grauia demittantur eodem simul tempore. Sit autem be media inter ab, bc. & ipsius be. dupla sit horizontalis bd. Dico grauia



eod. tēporis puncto demissa ex a. & c. in puncto d. conuenire.

Iungatur enim ed. & compleatur parallelogrammum bcfg. Cumq; sit bd. dupla ipsius be, erit fc. hoc est gb. dupla ce. Iam sic. Mobile post casum cb. suo impetu currit horizontaliter tempore casus cb duplam cb. ergo tempore ec. curret eodem impetu duplam ec. hoc est ipsam bg. Tempore igitur inte-

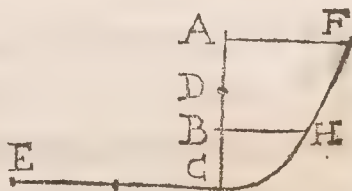
integro $e b$ fiunt lationes per $c b$, & $b g$, & eodem tempore fit casus per $a b$, quare eodē tēporis m omento erunt grauia alterū quidem in g ; alterum autem in b . Sed reliqua etiam spatia $b d$, $g d$. equalibus temporibus peraguntur. (Velocitates enim sunt vt tempora casuum, hoc est vt $e b$. ad $f g$. sed spatia $b d$, $g d$ ob similitudinem triangulorum sunt vt velocitates, quare vti dictum est equalibus temporibus peragentur.)

Sunt ergo coniunctim tempora per $a b$, $b d$. equalia temporibus coniunctim per $c b$, $b d$. Quare duo grauia &c. conuenient in puncto d . Quod erat &c.

Idem aliter demonstrabimus.

Sumptis utcumq; altitudinibus $a c$ $b c$. Demittantur duo grauia eodem tempore ex a , & b . Sitq; $d c$. media inter casus, cuius dupla ponatur horizontalis $c e$. Dico temporalationum $a c e$. $b c e$. equalia esse.

Fiat circa diametrum $c a$ parabola quęcunque, quę verticem habeat in c . ducanturq; ordinatim $a f$. $b h$. Notum est in parabola ita esse $a f$. ad $b h$. vt est $a c$ ad $c d$, vel vt $c d$, ad $c b$.



Iam. Tempus per $a c$. est $a f$, & per $c e$. post casum $a c$. est $b h$. (si enim tempore $f a$. graue currit duplam $a c$, tempore $b h$, curret duplam $d c$ hoc est ipsam $c e$ cum sint proportionales $f a$ ad $a c$, vt $h b$, ad $d c$.) Eodem modo. Tempus per $b c$. est $b h$, & per $c e$. post casum $b c$. est $a f$. (si n. tempore $b h$. currit duplam $b c$, tempore $a f$. curret duplam $d c$. hoc est ipsam $c e$. quia sunt proportionales vt $b h$. ad $b c$. ita $a f$ ad $d c$.) Ergo temporalationum $a c e$. sunt lineę $a f$. $b h$. Tempora autem lationum $b c e$. sunt lineę $b h$, $a f$. Quare coniunctim tempora per $a c$, $c e$. equalia sunt temporibus per $b c$. $c e$. coniunctim. Quod erat &c.

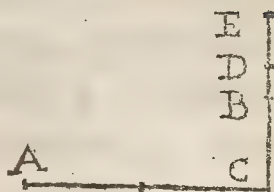
Corollarium Primum.

Hinc manifestum est dato quolibet spatio horizontali $a c$.

T 2

cuius

cuius subdupla ponatur cd . Si circa mediā cd , duæ in continua proportionē sumantur ce, cb . Tempora per ipsas ec, ca , æqualia esse temporibus per bc, ca .



Corollarium II.

Manifestum etiam est tempora perpendiculararium, & tempora horizontalium lationum reciprocè æqualia esse.

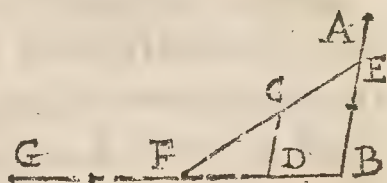
Nam in figura vltimę demonstrationis, tempus perpendiculari ac . est af , eademq; af . est tempus horizontis ce . post alium casum bc .

Tempus autem bb . est tempus casus bc . idem vero tempus est horizontalis lationis post alium casum ac .

PROPOSITIO LI.

SI fuerint duo plana equaliter inclinata, ab . maius, cd . minus, & bd . sit horizon. Sumaturq; be . media proportionalis inter longitudines planorum; & ducta ecf . ponatur fg . dupla ipsius be . Dico graua eodem tempore demissa ex a , & c . post casus ab, cd . in puncto g . conuenire.

Sunt enim per præcedentem tempora lationum per ab, fg . simul æqualia temporibus per cd, fg . simul. Sed etiam tempus per bf . post casum ab æquatur tempori per df . post casum cd . (cum sint spatia bf, df . vt velocitates eb, cd .) ergo coniungendo tempus per omnes ab, bf, fg . æquale erit tempori per omnes cd, df, fg , & ideo graua conuenient in g . Quod erat &c.

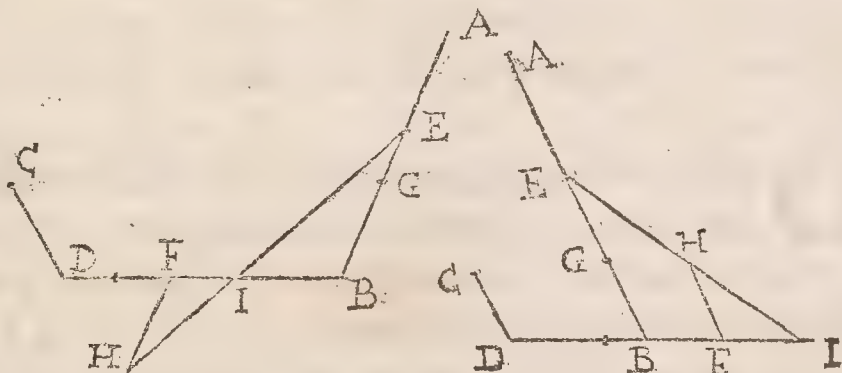


PROPOSITIO LII.

SI Fuerint duo plana ab . maius, cd . minus, æqualiter, inclinata, ita vt lationes horizontales, post casus

fus in prima figura contrarię inuicem sint; in secunda verò ad easdem partes. Sumaturq; media proportionalis inter longitudes planorum be , & sit df dupla ge , hoc est differentię inter mediam be , & minus planum; ducta deinde fb , æquali ipsi cd , & parallela ad ab , iungatur eh , quæ secet horizontem in i

Dico grauiam ex a . & c . eodem tēpore demissa, si versus i conuertantur in pūcto i conuenire.



Ponamus tempus per cd . esse cd . vel bg . sibi æqualem. Ergo in horizonte graue c . tempore bg . curret duplam bg , & tempore ge . curret duplam ge , nempe df . Est itaq; tota eb . tempus per cdf . Eadem quoq; eb . tempus est per abi . Quare eodem tempore peragentur cdf . & abi . Reliquæ autem fi . bi . eodem tempore peraguntur (cum propter similitudinem triangulorum spatia fi , bi , sint vt velocitates hf , eb .) ergo coniunctim idem tempus erit tam per cdi , quam per abi . Quare grauia conuenient in i . Quod erat &c.

In secunda figura non debent lationes horizontales esse contrarię, nam grauia nunquam conuenirent: sed ambę versus partes i .

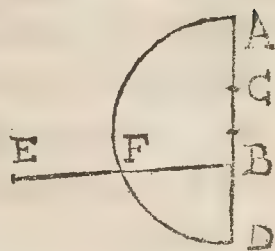
PROPOSITIONE LIII.

Datis duobus perpendicularis ab , cb , inuenire spatium horizontale quod cum alterutro datorum perpendicularū eodem tempore conficiatur.

Ponatur bd . æqualis ipsi bc , & circa ad . fiat semicirculus: ponaturq; horizontalis be . dupla ipsius bf . Dico lationes a
 be .

be, cbe . eodem tempore absolui.

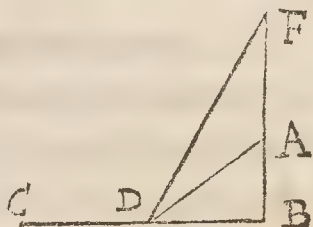
Hoc enim patet per Corollarium primū Propositionis 51. Nam altitudines perpendiculares ab, bc . sunt continuæ proportionales circa bf . semissem spatij horizontalis. Quare factum est quod &c.



PROPOSITIO LIV.

Dato quolibet perpendiculo, & quolibet spatio horizontali; aliud perpendiculum reperire, quod cum dato spatio horizontali eodem tempore conficiatur ac primum perpendiculum cum dato horizonte.

Sit perpendiculum datum ab . & horizon bc . cuius semissis sit bd . Iungatur ad . fiatq; angulus $bd f$. ad horizontē æqualis angulo bad , qui est ad perpendiculum. Dico tempora lationum per fb, bc simul, & per ab, bc simul, æqualia esse. Triangula enim rectangula fbd, dab . facta sunt æquiangulara. Quare ut fb . ad bd . ita bd . ad ba . Et cum bd . semissis horizontalis spatij media sit proportionalis inter perpendicula fb, ab . erunt tempora per $fb c$, & per abc . æqualia. Quod erat &c.

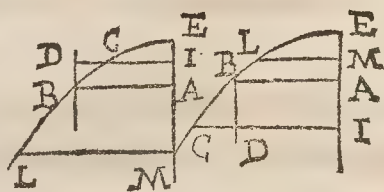


PROPOSITIO LV.

Gal. 29.
de motu
Accel.

Si fuerit horizontalis ab . dupla perpendiculi ae , Dico ipsas $ea b$. post casum ea breuiori tempore percurri, quā aliud quodcunq; perpendiculum cum eodem spatio horizontali ab .

Erigatur bd . perpendicularis ad ab , & per e, b . puncta, circa diametrum ea agatur parabola, ecb . cuius focus erit a . (po-



a. (posita enim est *ab*. dupla ipsius *ae*.) Sumatur iam quodlibet aliud perpendiculum *ei*, & ducatur horizontalis *id*.

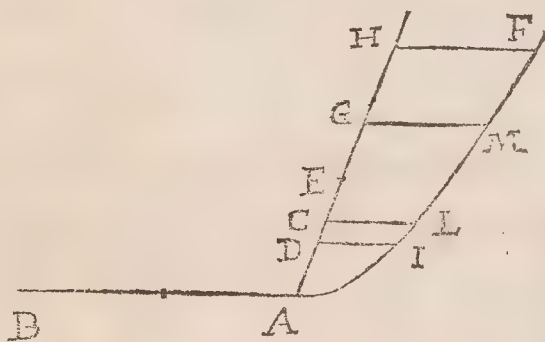
Tempus per *ea*. est *ab*. tempus autem per *ab*. est idem ac tempus casus, ergo tempus per *ea* est ipsa *ab* bis sumpta. Sed tempus per *ei*. est *ic*. tempus autem per *id*. quantum sit, sic venabimur. Velocitate *ab*. tempore *ab*. curritur *ab*. Sed velocitate *ci*. tempore *ab*. non curretur eadem *ab*. Fiat igitur ut velocitas *ci*. ad velocitatem *ab*, ita tempus *ab*. ad aliud *ml*. Et erit *ml*. tempus ipsius *di*. post casum *ei*. Patet ergo *ml*. *ci*. primam & tertiam proportionalium, maiores esse quam dupla mediæ, hoc est quam *ab*. bis sumpta. Quare &c.

PROPOSITIO LVI.

SI *ab*. horizontalis dupla fuerit eleuatę *ae*. Dico, quò longius à puncto *e*. demittatur graue, eo tardius lationem suam vsq; in *b* absolueret.

Demittatur ex punctis *c*, & *d*. Duo graua; ostendendum est maiori tempore fieri lationem per *dab*. quam per *cab*. Fiat circa diametrum *ae*, parabola *amf*. & ipsis *ca*. *ae*. fit tertia proportionalis *ag*. Ipsis autem *da*, *ae*. tertia sit *ab*, & ducantur ordinatim lineę ex punctis *d*, *c*, *g*, *h*.

Quia quadrato eidem *ae*, æquale est vtrumq; rectangulum *dab*, *cag*. erunt hæc eadem rectangula æqualia inter se; propterea latera reciprocè proportionalia habebunt. nempe ut *ba* ad *ag*. ita *ca*, ad *ad*. Sed in hac eadem proportione ob parabolam, sunt quadrata, *hf*. ad *gm*, & *cl* ad *di*, ergo proportionalia sunt etiam latera, nempe ut *hf*. ad *gm*. ita *cl* ad *di*. extremę autem *hf*, *di* maiores sunt quam medię *gm*, *cl*; & extremę simul sunt tempus lationis *dab*, at medię sunt tempus lationis *cab*. Quare tardius absoluetur latio per *dab*, quam per *cab*. Quod erat &c.



Idem

vide 2.
demonstrationem
Prop. 50

152 *De motu grauium descendēt.*

Idem infertur etiam de punctis g , & h , supra ipsum e . sumptis.

Sunt enim tempora eorum, æqualia temporibus punctorum c .

vide eandem & d . vtrumque vtriq; &c.

P R O P O S I T I O L V I I .

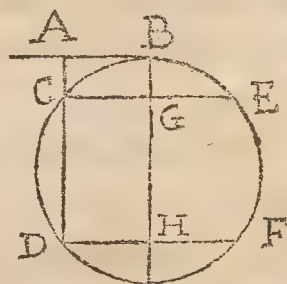
SI ab aliquo puncto lineæ circuli tangentis in puncto sublimi, graua cadant in periphæriam & inde per chordas horizontales conuertantur. erunt tempora lationum per vtramque chordam & eius perpendicularum, æqualia.

Tangat linea ab , circulum erectum, in puncto sublimi b . Et sic tangens horizontalis omnino erit. Sumpto deinde quolibet puncto a . graua demittantur perpendiculariter in periphæriam, & conuertantur siue in c , siue in d . Dico tempus per ace . & per adf . idem esse.

Sunt enim horizontales ce , df . æquales, cum cb . sit parallelogrammum rectangulum, & ce , df . sectæ sint bifariam in g & h . punctis.

Quia ergo ab . semissis spatij horizontalis media proportionalis est inter altitudines perpendiculares ac , ad . (linea enim ab . tangit, & ad . circulum secat) erunt per Corollarium primum Propositionis 50. huius, tempora lationum ace , adf . æqualia. Quod erat &c.

Et per secundum eiusdem Propositionis Corollarium eadem tempora reciprocè æqualia sunt &c.



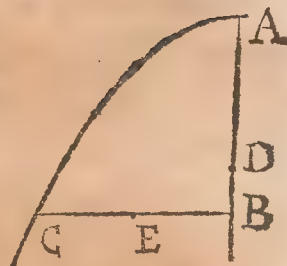
P R O P O S I T I O L V I I I .

TEmpus per axem parabolæ, & eius ordinatim applicatam simul, æquale est tempori per quartam lateris recti partem, & eandem ordinatim applicatam.

Liber Primus.

153

Sit axis parabolæ, ab , eius ordinatim applicata bc . Et secetur bd . æqualis quartæ parti lateris recti. Dico tempora per abc . & per dbc . æqualia esse inter se. Diuidatur bc . bifariam in e .



Erunt tum quadratum eb , tum rectangulum abd , subquadrupla quadrati cb , Sunt ideo æqualia inter se, & ipsa eb . media proportionalis est inter ab , bd . Quare per Corollarium primum Propositionis 50. huius, tempora per abc . & per dbc æqualia sunt &c.

Sunt etiam per secundum eiusdem Propositionis Corollarium, reciproçè æqualia. Quod satis sit ostendisse circa motum grauium naturaliter descendentium.

Finis Primi Libri.



DE MOTV

Proiectorum.

LIBER SECVNDVS.



PROIECTA nunc, bellorumq; minas, atque arcium tormenta dicemus: Supremus hic laborum Galilei fructus, suprema etiam gloria. Ostendit Galileus in libro de Motu Proiectorum, quod si mobile aliquod à plano horizontali ab decidat, impetu prius horizontaliter concepto, parabolam aliquam, ut bc. casu suo designabit. Verum est; dummodo linea ab quæ est directio projectionis ad horizontem fuerit parallela, & quando parabola initium b, factum fuerit ex vertice supremo ipsius parabola, siue (quod idem est) ab extremo axis parabolici puncto b. Quando vero linea projectionis ab non horizontalis, sed sursum fuerit, vel deorsum inclinata, erit quidem linea proiecti quædam curua, & se se contingent inuicem tum linea recta directionis iuxta quam facta fuerit projectio, tum curua qua erit semita proiecti; & punctum contactus erit idem ac punctum separationis ipsius proiecti ab instrumento impellente. Sed hanc lineam curuam & esse parabolam, & eandem prorsus parabolam esse, quæ ab eodem mobili horizontaliter prius concitato ex ipsius parabola vertice describeretur, hæcenus desideratur magis, quam probatur. Est profecto eadem parabola, velut ipse Galileus affirmat in Corollario Propos. 7. de motu Proiectorum, neq; verisimile erat adeo oculatum ingenium non bene prius circumspicere posse. Attamen, veritas illius Corollarii manifestæ penitus non erit illis, quibus obliquitates parabolarum ignota sint.



te sint, & ultra duas à Galileo præmissas propositiones Apollonius familiaris non fuerit. Cum itaq; projectiones ut plurimum fiant per lineas ad horizontem inclinatas, ex quibus oriuntur parabola obliqua, non habentes initium ex vertice, quales frequentissime occurrunt in omnibus ferè iactibus machinarum, immò etiam neq; verticem, neq; axem habentes, quales sunt projectiones inclinatæ deorsum, lucem Corollario Galilei afferre conabimur, & cuiusmodi sit linea curva projectorum uniuersalius determinabimus.

Definitio.

Directio projectionis dicitur linea recta quæ tangit lineam curuam proiecti in primo puncto eiusdem lineæ curuæ. quæ quidem directio in tormentis bellicis est eadem ac ipsius machinæ axis.

P R O P O S I T I O P R I M A.

SI graue sursum proiectum ex *a*. ascendat motu naturalitèr Deficiente vsq; ad sublimius punctum suæ lationis *b*. idem verò mobile æquali tempore, & eadem velocitate quam in puncto *a* habebat, sed motu æquabili ascendat vsq; in *c*. Dico *a c*. duplam esse ipsius *ab*.

Si enim non est dupla, ponamus aliquam *ad* duplam esse ipsius *ab*.

Concipiamus iam cadere naturalitèr mobile ex *b* in *a*. Gradus ille impetus acquisiti post casum ex *b* in *a*. est ille prorsus qui vehit mobile ad eandem altitudinem *b*. eodem tempore, & motu naturaliter deficientè. Idem verò gradus impetus eodem tempore, sed motu æquabili perducit mobile ad altitudinem *ad* duplam casus *ba*. Sed ille idem impetus qui per suppositionem perducit mobile ex *a* in *b* motu naturaliter deficientè, illud perducebat etiam motu æquabili eodemq; tempore ex *a* in *c*. Vnus ergò



Galil. in
scholio
prop. 23.

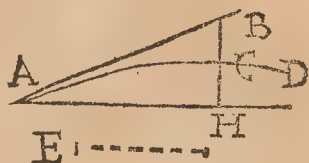
Galil. ib.

idemq; gradus impetus eodem tempore ; motuq; æquabili perducit mobile per duo spatia inæqualia ac , ad . Quod est absurdum.

P R O P O S I T I O I I.

S Emita proietorum, quæcunq; illa sit, sublimiori sui puncto bifariam secat perpendicularum quod inter horizontem, & lineam directionis intercipitur.

Proiciatur mobile ex a iuxta directionē utcumq; eleuatam ab . Patet quod sine tractione grauitatis procederet mobile motu recto, & æquabili per lineam directionis a b . Sed grauitate intus operante ab ipsa directione statim declinare incipiet, crescente semper deuiationis mensura; & describet aliquam lineam curuam acd . quæcunq; sit. Hæc linea punctum aliquod sublimius cæteris habet; illud nempe quod est ascensionis extremum, & primum descensionis. Sit huiusmodi punctum c , & per c ducatur perpendicularum bcb . Dico hb . duplam esse ipsius hc .

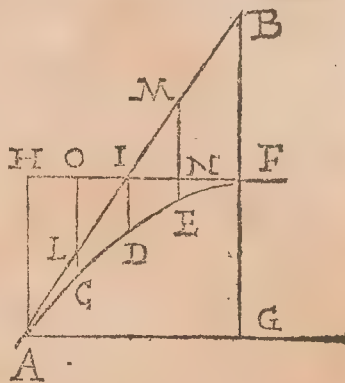


Abstrahamus motum horizontalem; hic enim motus, quo ad lationem perpendicularem de qua agemus est tamquam non esset; cum illam neq; iuuat, neq; impedit. Concipiamus etiam mobile habere semper secum suum perpendicularum hb . horizontali quadam latione vna cum ipso translatum ex a versus b ; in quo perpendiculo ascendit graue, motu quodam continuo, sed semper magis ac magis deficiente, à puncto b vsq; ad punctum c . Conficit ergo mobile in suo perpendiculo tempore Exempli gratia e . spatium hc . sed si motu æquabili ascendisset cum impetu & tempore eodem, reperiretur in b (deberet enim ob motum æquabilem esse semper in communi sectione linearum ab , hb .) Quare per præcedentem, spatium hb . ipsius hc duplum est. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

Linea curua, quæ describitur à mobili secundum quamlibet eleuationem proiecto, parabola est, & prorsus eadem, quam describeret mobile si cum horizontali impetu proiceretur à vertice eiusdem lineæ curuæ.

Sit linea projectionis directiua ab . utcumq; eleuata, & linea curua $acde$, cuius sublimius punctum sit f . Ducatur perpendicularum bfg . & erunt per præcedentia æquales $bf.fg$. Ducatur horizontalis fb , & perpendicularis ah . erunt iterum æquales $fi.ib$, & $ai.ib$. Diuidatur a b . in quotcunq; partes æquales al, li, im, mb . & agantur perpendiculares per puncta l, i, m .



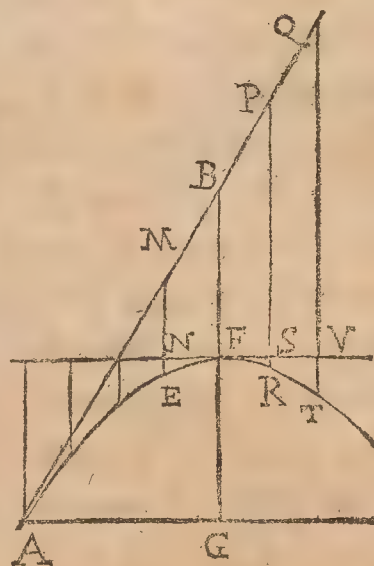
Manifestum est quod spatia æqualia al, li, im, mb , percurrerentur à mobili temporibus æqualibus, si motu æquabili, & sine accessu noui motus deorsum, ab interna grauitate procedentis, moueretur. Sed quia ei statim atq; à proiciente dimittitur in a . superaduenit attractio grauitatis, incipiet continuo à linea directionis deorsum deuiare, & deuiationes tales erunt ut linea lc . descensus vnius temporis sit ut vnum: linea ad . verò id . descensus duorum temporum sit ut quatuor, & me . trium temporum ut nouem, bf . quatuor temporum ut 16., & sic deinceps ea lege ut semper descensuum spatia sint ut temporum quadrata. Quia verò al, li, im, mb , sunt æquales, erunt $ho.oi, in,nf$. (quòd inter easdem parallelas sint) æquales: & cum sit $bf, 16$, erit $mn.8$. ergo reliqua ne est vnum. (quandoquidem tota me erat 9.) Ipsa verò id . posita fuerat ut 4. nec immutatur. ol autem equalis ipsi mn . est 8. & addita lc , quæ posita fuerat vnum, erit tota oc ut 9. At ha . equalis ipsi bf erit 16. Ergò cum spatia fn, ni, io, ob . sint æqualia; & ne, id, oc, ha . sint ut 1, 4, 9. 16. & sic deinceps ut reliqui semper numeri quadrati, erit linea procedens ex f . per puncta $e. d. c. a$. parabola

parabola recta cuius vertex f . & de qua agit Galileus. Sed hæc eadem linea est tractus projectionis oblique ex a . factæ per suppositionem nostram. Ergo linea curua, quæ describitur à mobili secundum quamlibet eleuationem proiecto, eadem parabola est quam designaret si cum impetu horizontali opportuno ex vertice ipsius proiectum fuisset.

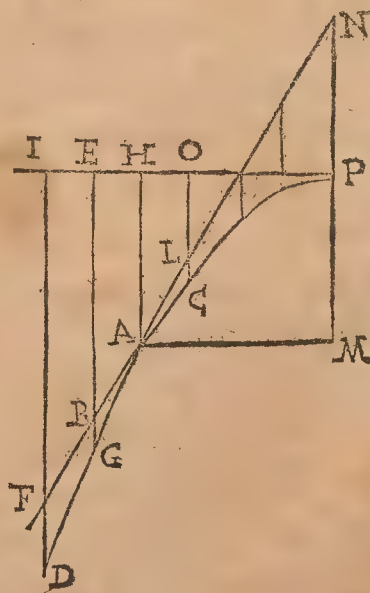
Manente eadem constructione, & figura, dico etiam post culmen, siue verticem f . mobile ex a proiectum, in eadem parabola continuare motum suum.

Sumantur bp . pq . ipsi bm æquales; erit descensus pr . quinq; temporum vt 25. & qt . sex temporum vt 36. Sed cum bf . sit 16, ipsa pf . est 24. & qu 32. Reliquæ ergo fr , ut , sunt vt unum & 4. &c. Quare puncta f , r , t . per quæ incedit mobile sunt in eadem continuata parabola in qua sunt e , & f .

Linea etiam curua, quæ describitur à mobili secundum quamlibet directionem deorsum proiecto, parabola est, & eadem prorsus quam describeret mobile si horizontaliter concitatum à uertice ipsius proiceretur.



Manente eadem figura propositionis tertie. Sit linea projectionis deorsum factæ af ., & sit impetus idem qui fuerat in projectione al . sursum. Manifestum est quod mobile si motu æquabili moueretur percurreret lineam rectam af . Sumantur iam ab , bf . æquales tum inter se, tum etiam ipsi al . patet etiam quod ipsæ ab . bf . motu æquabili, temporibus æqualibus absoluerentur cum æquales sint. Sed quia grauitas statim incipit deorsum



orsum trahere, mobile à linea recta *af* deuiabit, & erit descensus *bg*. unius temporis ut unum, eritq; equalis ipsi *lc* qui fuerat descensus unius eorundem temporum. Descensus autem *fd*. duorum temporum erit ut 4. & sic semper deinceps. Quia uero *ha*. est 16., erit *eb*. 24. & addita *bg*, tota *eg* erit 25. Eodem modo; *if* est 32, & *fd*. 4. ergo tota *id*. est 36.

Cum itaq; sint equales *oh*, *he*, *ei*. & *oc*. *ha*, *eg*, *id* sint (continuato ordine numerorum quadratorum,) ut 9. 16. 25. 36. erit linea *cagd*. portio eiusdem continuatæ parabolæ: ergo linea curua quæ describitur à mobili deorsum proiecto parabola est, & prorsus eadem quam descripsisset si à uertice ipsius, cum horizontali impetu opportuno proiectum fuisset.

Diximus cum horizontali impetu opportuno, quia si mobile cum eodem impetu proiceretur ex *p* horizontaliter deorsum, & ex *a* secundum *al* sursum, nequaquam eandem parabolam describeret utraq; latione. Requiritur enim maior impetus in projectione ex *a* sursum facta ad hoc ut eandem parabolam describat quam designauisset si ex *p* horizontaliter proiectum fuisset. Ratio uero unius impetus ad alium ut eadem parabolam euadat, erit hæc.

Si mobile horizontaliter proiectum ex *p*. quolibet impetu descripsit parabolam *pca*, ad hoc ut ex *a* proiectum describat eandem, debet impetus ex *a* ad impetum ex *p*. esse ut *an* ad *am*.

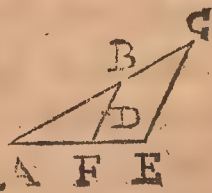
Tunc enim si mobile iuxta tangentem *an* proiciatur cum impetu dicto eandem parabolam *acp*. percurrat.

Si quis autem, propter numerorum applicationem, ea quæ attulimus non demonstrationem putet, sed computum, vel exemplum, habeat hic demonstrationem puram, præmissis hoc lemmate.

Lemma.

Si fuerit ut *ac* ad *ab*. potentia, ita *ce* ad *bd*. longitudine, & sint parallele *ce*, *bd*. Dico (coniuncta *ae*) ipsam *bf*. mediam proportionalem esse inter duas *ce*, *bd*.

Est enim *ce* ad *bd*. longitudine ut *ca* ad *ab*.



hoc

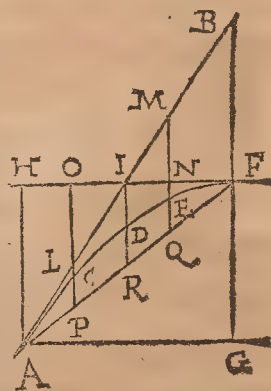
hoc est ce ; ad bf . potentia. Quare bf . media est inter cc , bd , & c .

Si verò, ut sunt ab , ac , ad . potentia, ita fuerint parallelae be , cf , dg . longitudine, sintq; ah , ig . aequales, Dico etiam he , if , aequales esse. Est enim ga ad ai ut gd ad ic , vel per praecedens, ut ic ad cf . ergo diuidendo erit



ut gi ad ia , ita if ad fc . eodem modo ostendemus esse ut gh ad ha , ita he ad eb . His demonstratis. Est fc ad be . longitudine, ut ca ad ab , vel ia ad ah , vel gh ad ha , vel he ad eb . potentia. Ergo he media est inter fc . be . Iterum. Est fc ad be longitudine ut ca ad ab , vel ia ad ah , vel ai ad ig , vel cf ad fi potentia. ergo fi media est inter cf , be . Inter easdem verò media erat etiam eh , ergo fi , eh . aequales sunt. Quod erat praemittendum.

Resumpta iam figura propositionis 3. huius, fiat ut antea expositum est projectio per lineam $acdef$. ducaturq; recta af . & accipiantur aequales ap . fq . Erunt ob descensionem naturaliter acceleratam spatia lc . me , bf . in duplicata ratione temporum al , am , ab . & ideo per praecedens lemma aequales erunt cp , eq , & propterea remanent aequales lc , ne (nam tota lp , toti nq . aequalis est, producta enim idr . erunt aequales ar , rf ; & ipsa ir eandem rationem habebit ad lp , & ad nq , nempe quam habet ra ad ap . vel rf ad fq .) Ergo omnes lineae quae ex f versus id successiuè descendunt à linea fh . sunt aequales omnibus & singulis illis respectiuè, quae ex a versus lineam id . successiuè descendunt à linea ab , singula singulis (quod enim ostensum est de sola ne . ostendi potest de omnibus.) Sed omnes istae, quarum series ex a incipit per suppositionem sunt inter se longitudine ut sunt al , am , ab . potentia, ergo etiam omnes illae quarum ordo incipit ex f . erunt longitudine ut omnes fn , fo , fh . potentia. Quare linea curva

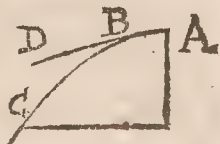


acef.

acef. &c. qua describitur à mobili secundum quamlibet elevationem proiecto, eadem parabola est, quam designaret si ex vertice f cum impetu horizontali oportuno projectum fuisset.

Lemma.

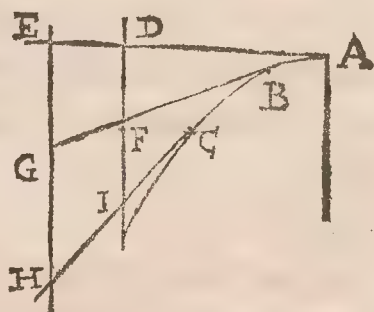
Si mobile projectum, dum parabolam abc percurrit, in aliquo ipsius puncto b. omni gravitate spoliaretur, tunc proculdubio per lineam rectam bd. tangentem parabolæ lationem suam cōtinuaret motu semper equabili. Quandoquidem dempta ei esset omnis causa quæ motum aut inflectere posset, aut accelerare, vel retardare. Manifestum etiam est, impetum ipsius mobilis in qualibet portione tangentis bd, eundem semper futurum fore qui fuerat in puncto b.



PROPOSITIO IV.

Impetus in punctis parabolæ vt sunt portiones tangentiū, inter duas parallelas diametro interceptæ.

Proposita parabola abc. ducantur tangentes ae, bg, ch. à quibuscunque punctis a. b. c. tum duæ lineæ parallele diametro vbicunque sint di, eh. Dico lineas interceptas de, fg, ih. ipsos impetus qui sunt in punctis a. b. c. proportionem representare.



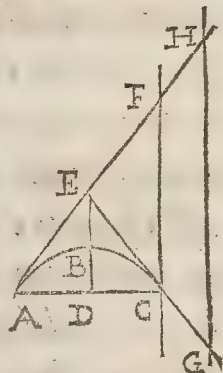
Vnâquæq. enim ipsarum de, fg, ih. eodem tempore absolueretur à mobili; quandoquidē progressio horizontalis quæ inter duas parallelas di, eh. est, eodem semper tempore debeat absolui, vbicunq. reperiatur mobile, & per quamcunq. inclinationem procedat. Sed motus in ipsis lineis interceptis sunt æquabiles, ergo impetus erunt vt spatia. Quare impetus ipsius de, vel puncti a. erit vt linea de. Ipsi autem fg, vel puncti b. erit vt fg. & sic deinceps. Quod erat &c.

Lem. præced.

P R O P O S I T I O V.

Impetus in punctis parabolæ æqualitèr vtrimq; à vertice distantibus, æquales sunt inter se, licet alter ascendat, alter vero descendat.

Sumatur in parabola projectionis factæ versus b & c , puncta quævis a, c , quæ æqualitèr distant à vertice b , hoc est, quæ sint in eadem horizontali linea ac . Dico impetus in a & c æquales esse. Accipiat be æqualis ipsi bd , & ducantur ae, ce , quarum vtraq; tangens erit. Ducantur etiã lineæ cf, gh . diametro parallelæ ubicunq; uisum fuerit; & producantur tangentes ah, eg . Erit ergo per præcedentem impetus in a ut fh . & in c ut cg , quæ si æquales fuerint, æquales erunt impetus in punctis a & c .



Lateræ ad, dc . sunt æqualia, & de commune; anguli autem ad d recti, ergo anguli aed, dec sunt æquales. Angulo autem aed æqualis est ebg . ob parallelas, & ipsi deg . æqualis est cgh , item ob parallelas; est ergo triangulum chg æquicrurum, & linea fc . basi parallelæ, quare fh, cg æquales sunt. Quod erat &c.

Corollarium.

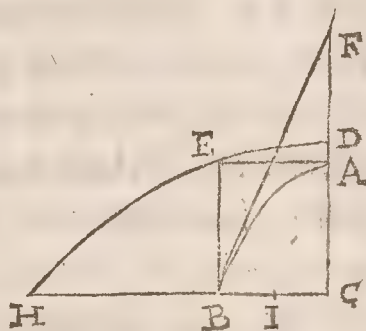
Hinc colligere possumus facta projectione ab a , quod si mobile ex puncto c reflectatur retrorsum per eandem suam viam cum impetu eodem, eademq; directione quam habet in puncto c , per eandem parabolam recurrere debere; Habet enim in c , ut ostendimus eundem impetum, & eandem directionem quam habebat in a , quare eandem parabolam designare debet quam designauerat ex a .

P R O P O S I T I O VI.

SIT parabola ab cuius altitudo ac , & sublimitas ad ; ostendendum est alitèr ac in primo libro, eundem esse impetum.

petum parabolæ in b , ac grauis cadentis naturaliter ex puncto sublimitatis d , usq. in c .

Ducantur tangentes ae , bf , & sit be parallela ipsi ac . Notum ergo est per 4. huius impetum parabolæ in b . ad impetum parabolæ in a , esse ut bf ad ae , cum sint bf , & ae inter easdem ad diametrum parallelas interceptæ. Agatur per d & e alia parabola deh . & impetus casus per da , ad impetum casus per



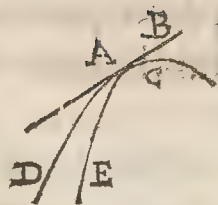
dc . erit ut applicata ae ad applicatam cb . Si ergo fuerint æquales tangens bf & applicata cb , erit ex æquo, impetus in b ad impetum in c ut bf ad cb . nempe æqualis. Ostendo bf cb . æquales esse, sic. Secetur cb bifariam in i , & erit per demonstrata in præcedenti libro, ci media proportionalis inter ca , & ad . Iam sic. Quadratum ca ad rectangulum cad sub eadem altitudine, est ut ca ad ad , ergo quadratum ca , ad quadratum ci est ut ca ad ad . Sumptis autem quadratorum quadruplis erit quadratum fc ad quadratum cb ut ca ad ad . & componendo quadrata fc , cb , uel quadratum fb ad quadratum cb erit ut cd ad da , hoc est ut quadratum cb ad quadratum ae : sed quadrata cb & ae . æqualia sunt, ergo etiam quadrata fb , ch . Quare æquales sunt lineæ fb , ch . Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

SI ab eodem puncto, cum eodem impetu, & eadem directione fiant projectiones utrinque, sursum nempe, & deorsum: mobile utrinque per portiones unius eiusdemq. continuatæ parabolæ percurrent.

Fiat ex puncto a cum directione ab . projectio sursum ac . & ab eodem puncto directione ba fiat projectio deorsum ad .

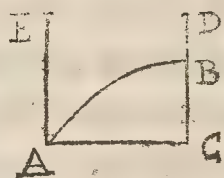
Dico $c a d$ vnam, & eandem continuatam parabolam esse. Si enim continua non est, demittatur mobile ex vertice c versus a . per parabolam $c a$. Tunc mobile cum $c a d$. non sit continua parabola, non per ipsam $a d$, sed per aliā lineam meabit, quæ sit $a e$. Verūm mobile in puncto a eundem habet impetum siue ante ascensum $a c$, siue post descensum $c a$. Mobile ergo ex puncto a . quando venit ex c meat per $c a e$, quando verò proicitur ex a cum eodem impetu, & directione currit per $a d$. Quod est absurdum. Cum enim in vtroque casu discedat ab a cum eodem impetu, eademq; directione, debet etiam in vtroq; casu per eandem lineam $a d$ ambulare. Quod &c.



P R O P O S I T I O V I I I.

Data qualibet parabola à mobili sursum proiecto descripta, projectio perpendicularis sursum eiusdem mobilis facta cum eodem impetu, tantum ascendet, quantum est aggregatum altitudinis, & sublimitatis simul datæ parabolæ.

Sit parabola $a b$, cuius altitudo $c b$, & sublimitas $b d$. ponaturq; $a e$ æqualis & parallela ipsi $c d$. Facta autem sit parabola à projectione ex a versus b . Dico si fiat projectio cum eodē impetu per lineam $a e$ sursum, mobile vsq; ad punctum e peruenturum esse. Impetus enim parabolæ in a , siue fiat projectio ex a , in b , siue ex b in a . idem est (vt ostendimus.) at ex Galileo idem est ac naturaliter cadentis ex d in c , sed impetus naturaliter cadentis ex d in c ille est qui reuehit mobile ex c in d , ergo etiam ex a in e . Quod &c.



n. Pro-
iect.

Definitio.

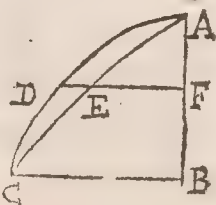
Imposterum quando datum impetum nominabimus, illum in spatijs determinabimus, vt Galileo visum est; alia enim ratione
sub

sub certam & uniuersalem mensuræ regulam cadere nō potest. Exempli gratia. Quando dicimus sit impetus datus ab . tunc sensus noster est. Sit impetus datus tantus quantus requiritur ad proiciendum mobile ex a usq; ad summum punctum perpendiculari b . Sine, quod idem est, quantus est impetus naturaliter cadentis ex b usq; in a .



Lemma.

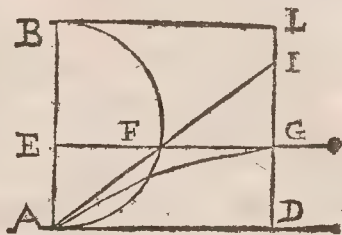
Circa diametrum ab . per verticem a , & quoduis punctum c . alia, atq; alia parabola non constituetur. Si enim possibile est, sint circa diametrum ab per puncta a & c . due parabole, & ex c ducatur ordinatim cb . tum alia quælibet ordinetur df . Quadratum ergo cb , ad duo illa quadrata inæqualia fd , fe eandem rationem habet, nempe quam habet ba , ad af . Quod est absurdum. Ergo circa diametrum & c .



PROPOSITIO IX.

Dato impetu ba (hoc est quantus est naturaliter cadentis ex b in a iuxta definitionem) dataq. directione ai , iuxta quam facienda proiectio cum impetu dato. Oportet amplitudinem, altitudinem, totamq; futuram parabolam huius proiectionis reperire.

Ducantur per a & b horizontales linee ad . bt . & fiat semicirculus afb circa diametrum ab , qui lineam ac omnino secabit, cum ipsa ad tangens sit. Secet in f , & ducatur fe horizontalis, & producat fg equalis ipsi fe . demum



agatur per g perpendicularum lgd . Fiat iam circa diametrum gd per puncta g & a . parabola ag , quæ vnica erit per lemma præcedens. neq; alia parabola circa diametrum gd per puncta g , & a fieri poterit. Dico hanc esse parabolam quæsitam.

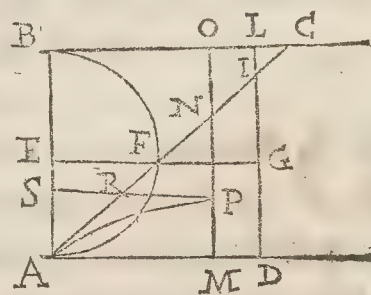
tam. Huius enim parabolę linea directiua est ai . cum ipsa tangat parabolam in a . Est enim eg uel ad . ipsius fg . dupla per constructionem, & ideo equales sunt dg, gi , quare ai tangens est.

Insuper. Dico hanc parabolam ab impetu dato describi. Sunt enim ae, ef, eb , siue tres ipsis æquales dg altitudo, gf semibasis, & gl , in continua proportione: quare gl sublimitas est (per 5. propos. & eius Corollarium Galilei.)

Iam sic. Impetus parabolę ag in puncto a tantus est quātus naturaliter cadentis ex l in d . per 10. Galilei. hoc est ex b in a . siue proiecti ascendentis ex a in b . Habet ergo parabola in puncto a etiam impetum datum. Quare factum est quod &c.

Sed quia hac propositio magni erit momenti prosequentibus, illam ostendamus etiam alio modo,

Sit impetus datus idem ab . & eadem directio afc . Quæritur parabola quę fiet ab hac projectione. Fiat ut ante circa diametrum ab semicirculus, qui secabit lineam ac , cum ad , sit tangens. Secet in f , ductaq. horizontali efg ita ut equales sint ef, fg , describatur, siue tamquam descripta concipiatur parabola per puncta a, g , circa diametrum gd . Dico hanc esse parabolam proiecti, si à puncto a iaciatur, iuxta directionem ac , cum impetu ab . Nisi enim currat mobile per hanc iam dictam parabolam, curret omnino per aliam, quę sit ap . Reperiatur uertex, siue punctum altius ceteris huius parabolę ad , & illud sit p .



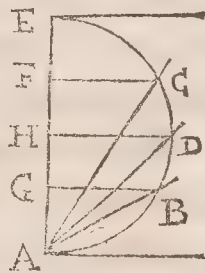
Patet primò quòd punctum p esse non potest in linea ld , quia cum linea ac tangat utramq. parabolam, secaretur ld axis cōmunis bifariam in duobus punctis à uerticibus parabolarum, absurdum. Neque potest esse in linea eg . Quia ducta per uerticem

cem diametro, putà, mn . bifariam secaretur mn à linea eg . absurdum: sola enim id . secatur bifariam ex omnibus sibi parallelis in angulo cad .

Sit iam punctum p . vbicunq; ducaturq; prf . horizontalis. Quia pn, pm . sunt æquales per secundam huius, erunt nr, ra . & pr, rf . æquales; & quia parabola ap impetum habet ba . hoc est om , erit o punctum suæ sublimitatis, & ideo lineæ op, pr, pm . in continua proportionem erunt; & rectangulum opm . quadrato pr æquale, commutatisq; lineis cum sibi æqualibus, rectangulum bfa æquale erit quadrato fr . Punctum ergo r est in semicirculi peripheria. Quod est absurdum, recta enim linea a fin duobus tantum punctis periphæriæ occurrit. Quare &c.

Corollaria.

Hinc manifestum est, dato impetu alicuius machine qui sit verbi gratia ea . Si describatur circa ea semicirculus ade , dari altitudines, & amplitudines omnium projectionum, quæ ab eadem machina fieri possunt. Exempli gratia. Manente semper eodem impetu ea . fiant projectiones per lineas diuersimodè eleuatas ac, ad, ab . Proiectio facta secundum directionem ac ascendet vsq; ad horizontalem fc productam; iactus autem factus iuxta directionem ad apicem habebit in linea hd producta. Proiectionis autem secundum lineam ab factæ, maxima altitudo erit in horizontali gb producta.



In libro Galilei de motu naturaliter accelerato ostenditur, proiecta ab eodem impetu ex a . si à planis diuersimodè inclinatis fulciantur, semper ad unum idemq; planum horizontale peruenire. Hic verò apparet singulas projectorum ascensiones variari, quando per aerem purum sine ullo subiecto fulcro prociuntur iuxta diuersas eleuationes: Minus enim ascendit mobile quod per lineam ab . minus eleuatam emittitur, quàm illud quod per lineam ad . magis eleuatam projectum fuerit.

Patet etiam nullam altitudinem adeò ascendere posse, ut ad ipsam

ipsam parallelam horizontalem, quæ ducitur per summum proiettionis perpendicularis punctum e, peruenire possit.

Manifestum etiam est amplitudines omnes semper augeri ab illa proiettione quæ dicitur tiro di punto in bianco usq; ad proiettionem factam ad angulum semirectum.

A semirecta vero usque ad perpendicularem, semper minui, donec penitus euanescent; quod accidit in proiettione perpendiculari, quæ nullam habet amplitudinem.

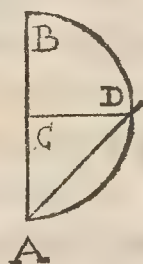
Denique obseruare licet amplitudines parabolarum ab eodem impetu factarum, quarum eleuationes equaliter ab angulo semirecto distent, inter se equalis esse.

Cum enim lineæ ab , ac . equaliter distent ab eleuatione semirecta, erunt arcus db , dc æquales. quibus insistant æquales anguli; & ideo arcus ba , ce reliqui ex quadrantibus æquales erunt, ergo etiam sinus eorum bg , cf æquales erunt, & propterea amplitudines integræ parabolarum, quæ quidem quadruplæ sunt sinuum bg , cf . erunt æquales.

Patet etiam proiettionum equaliter à semirecta distantium altitudines, & sublimitates reciprocè inter se æquales esse, hoc est altitudinem unius, sublimitati alterius æquari.

Corollarium ergo erit quod Galileo Theorema satis arduum fuerat, nempe proiettionem semirectam omium maximam esse ab eodem impetu factarum. Si enim ponatur angulus c ad semirectus erit cd semidiameter, hoc est maximus omnium sinus qui in semicirculo dari possint.

Patet etiam integram amplitudinem parabole semirectæ duplam esse lineæ sublimitatis, siue impetus ab quia demonstrata est quadrupla rectæ cd , hoc est dupla ipsius ab .



PROPOSITIO X.

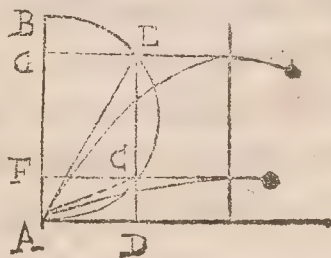
Dato impetu & altitudine inuenienda sit directio iuxta quā facta fuit proiettio: inuenienda etiam sit amplitudo proiettionis. Sit in præcedenti figura, impetus datus ab , & data altitu-

altitudo sit ac . fiat circa ab semicirculus adb , & ducantur cd .
 horizontalis, ad autem ad punctum d . Manifestum est ex præ-
 cedentibus, directionem quæsitam esse ad , amplitudinem verò
 integram esse cd . quater sumptam. Nulla enim parabola præ-
 ter illam quæ fit iuxta directionem ad . cum habeat impetum a
 b , habebit altitudinem ac .

P R O P O S I T I O X I.

Dato impetu, & amplitudine inuenienda fit directio iuxta quam facta fuit parabola; inuenienda etiam fit altitudo.

Sit datus impetus ab , & sit ad quarta pars datæ amplitudinis. Fiat circa ab semicirculus acb , & erigatur dce (quæ si in semicirculum non incidit problema impossibile est,) secetq; semicirculum in punctis c . & e . Dico vtramq; directionem siue ac , siue ae , si datus impetus ab , adhibeatur, parabolam designare, cuius amplitudo quadrupla erit lineæ cedentibus liquet. Nam projectiones iuxta directiones ac vel ae amplitudinem ipsius ge , vel fc . vel ad . quæ intensitudo verò esse potest tum linea af , tum ret &c.



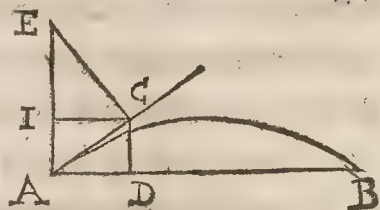
P R O P O S I T I O XII.

DAta amplitudine ab , & directione ac . inueniendus fit impetus, & altitudo parabolę.

Datis iisdem, inueniendā fit mēfura lineę perpendicularis ad cuius apicem ascenderet mobile si cum eodem impetu sursum perpendicularitèr proiceretur.

Sumatur ad , quarta pars ipsius ab , & erigantur perpendi-
Y cula-

culares dc . ae . fiatq; angulus ace re-
ctus. Dico ae . esse impetum proie-
ctionis, & dc . altitudinem. Semicir-
culus enim circa diametrum ae . transi-
t per angulum rectum ace . Ergo para-
bolæ, cuius amplitudo sit ab , & directio
 ac , impetus est ea .



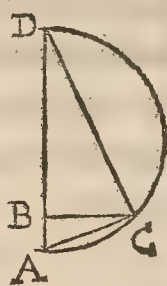
Patet etiam altitudinem parabolæ esse lineam dc . vel ai .
Cum autem impetus sit ae manifestum est projectionem
perpendicularem sursum ex a factam ascensuram esse usque
ad e punctum, si proiciatur mobile cum eodem impetu à quo
facta fuit parabola ab .

*Ex hac, propositione colligere possumus quantũ spatij ascen-
dat ferreus globus, si quando ab æneo quolibet tormento sursum
perpendiculariter iaciatur: cuius quidem spatij mensura tanta
erit, ut ex nulla perpendiculari altitudine siue arte, siue natura
facta, deprehendi possit; aut aliter experimento subiacere.*

PROPOSITIO XIII.

Data altitudine ab , & directione ac . reliqua
reperire.

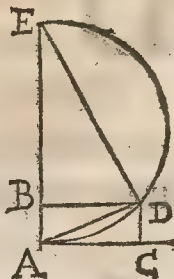
Ducatur per punctum b . horizontalis bc quæ in-
cidat in ipsam ac in puncto c . Fiatq; angulus acd
rectus: & circa triangulum rectangulum acd . tran-
sibit semicirculus propositionis 9. huius. Amplitu-
tudo ergo quadrupla erit ipsius bc . & impetus erit
 ad . Quod &c.



PROPOSITIO XIV.

Data altitudine ab , & basi (cuius tamen quar-
ta pars sit ac) Reliqua reperire.

Compleatur rectangulum $bacd$. & diameter a
 d directionem indicabit. Facto deinde angulo ade



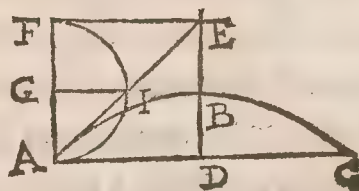
recto

recto, erit ae impetus, vt facile ex præcedentibus colligitur &c.

PROPOSITIO XV.

Proiectio perpendicularis sursum æqualis est dimidiæ basi projectionis semirectæ, si fuerit ab eodem impetu facta vtraq; tam perpendicularis, quam semirecta projectio.

Sit parabola semirecta abc , & super ad media amplitudine fiat quadratum $adef$, erit ae diameter ipsa directio semirectæ. Factoq; circa af semicirculo, transibit semicirculus per i centrum quadrati, & erit af impetus; quare projectio perpendicularis sursum vsq; ad f punctum ascendet. Patet ego propositum.



PROPOSITIO XVI.

Si facta fuerit projectio ad eleuationem anguli semirecti, amplitudo integræ projectionis erit latus rectum descriptæ parabolæ,

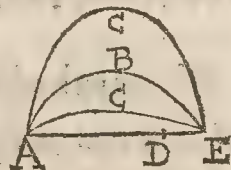
Sit eleuatio semirecta iuxta lineam ab , factaque sit à projecto quælibet parabola acd . Dico ad esse latus rectum huius parabolæ. Cum enim angulus eab semirectus sit, ae rectus, erunt equalia latera ae , eb . ergo ae dupla erit ipsius ec . Sed cum ae media proportionalis sit inter latus rectum & ec . erit latus rectum duplum ipsius ae . nempe æquale ipsi ad . Quod erat &c.



PROPOSITIO XVII.

AD projectiones æquales faciendas, minor impetus requiritur in ea, quæ ad eleuationem semirectam fieri debeat,

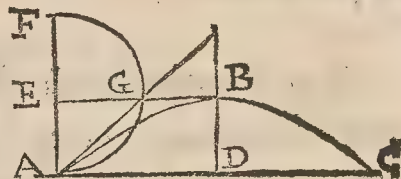
Demonstratum iam est, si ab eodem impetu factæ sint projectiones, longius procedere eam quæ ad angulum semirectum fuerit explorata. Sint projectiones ab . semirecta, & $c.c$. non semirecta. Dico impetum ipsius $c.c$. non semirectæ maiorem fuisse quam ipsius b . semirectæ. Si enim fuisset æqualis, tunc amplitudo iactus ac ex demonstratis fuisset minor quam ae . vt verbi gratia ad ; sed cum æqualis ponatur amplitudo, maior omnino impetus fuit per ac . quam per ab ; vel minor impetus requiritur in semirecta quam in alia. Quod erat &c.



PROPOSITIO XVIII.

Tempus, siue durationem vniuscuiusque projectionis definire.

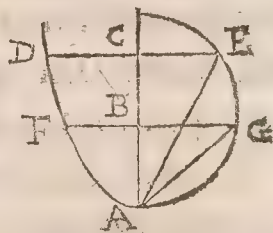
Constructa solita præcedentium figura, sit projectio abc . oportet tempus, siue durationem eius reperire; hoc est quanto tēpore fiat latio per parabolam abc . Scimus iam ex Galileo idem tempus esse lationis abc , & cadentis ex b in d . bis. Ponamus ergo tempus cadentis naturaliter ex f in a , esse fa ; eritq; tempus per ea media proportionalis ag . & hoc semper. ergo linea ag metitur tempus lationis per ea , siue per bd , siue per semiparabolam bc , vel per integram etiā parabolam abc , Eandem enim rationem inter se habebunt durationes parabolarum, quam habent semiparabolarū: & nos loquimur de proportionibus, non de mensuris.



PROPOSITIO XIX.

D Vrationes projectionum sunt vt lineę ordinatim applicatę in aliqua parabola ad suam vniuscuiusq; altitudinem.

Sint altitudines duarum parabolarum ab , ac . (à quocunq; impetu siue eodem, siue nō, factę sint, & quascunq; bases habeant, siue equales, siue inęquales.) Fiat circa ca . parabola inuersa afd , & semicirculus. age . Eruntque tempora parabolarum vt sunt tempora cadentium per ca , ba ; hoc est vt cd , bf per X præcedentis libri. Quod erat &c.

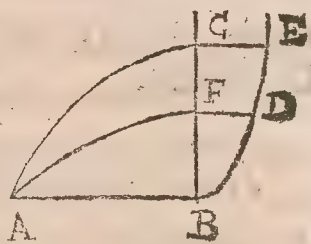


Sunt insuper ea , ga . in eadem ratione ac cd , bf , quare etiam ea , ga . chordę in semicirculo erunt vt tempora parabolarum &c.

PROPOSITIO XX.

P Arabolarum æqualem basim habentium impetus in puncto sublimiori sunt in contraria ratione temporum, siue durationum earundem.

Sint duę parabolę ac . af . quę eandem habeant basim, & eundem axem bc . fiatq; circa bc . parabola inuersa bde . Dico impetum in c ad impetum in f esse ut fd , ad ce . Impetus enim in punctis c ; & f sunt puri illi impetus horizontales, secundum quos conficitur latio horizontalis ab .

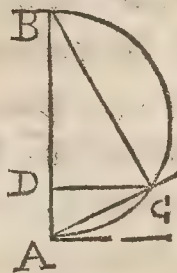


Cum itaq; eadem latio horizontalis ab absoluator temporibus *per præc.* ce , fd , erunt impetus horizontales reciprocè ut fd , ad ce . per 3. Propos. Gal. De Motu naturaliter accelerato.

P R O P O S I T I O X X I.

Impetum purum horizontalem, qui inuariabilis est semper idem in unoquoq; parabole puncto definire.

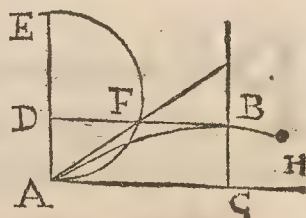
Item etiam & perpendicularem uariabilem. Repetita præcedentium propositionum figura, supponimus, ut semper, impetum totalem, siue compositum projectionis, quem habet mobile in puncto a , esse tamquam naturaliter cadentis ex b in a . & hunc ponimus esse ut linea ba .



Sit ad altitudo, & bd sublimitas parabole. Ergo impetus cadentis per bd sublimitatem parabole, erit ut linea bc , media proportionalis inter ab , bd .

At iste impetus cadentis ex b in d est ille purus horizontalis qui lationi inest in quolibet puncto parabole, & est inuariabilis. Quare in vnoquoq; puncto parabole impetus horizontalis erit ut linea bc .

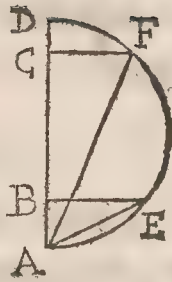
Perpendicularis uerò impetus qui est in primo lationis puncto sic determinabitur. Manente semper unica suppositione, impetum scilicet casus per ea . esse ipsam ea . Impetus perpendicularis in fine parabole b , est tamquam naturaliter cadentis ex b in c , uel ex d in a . Est ergo ut media proportionalis af . Quod &c.



Sed ostendamus etiam pro Corollario, quomodo varietur impetus respectiue ad horizontem, eiusdem globi ferrei ab eodem tormento proiecti; crescit enim impetus perpendicularis non quem admodum crescunt eleuationes tormenti, aut altitudines parabole, sed ea ratione qua crescit in semicirculo chorda af . Hinc animaduertere licet futurum fore ut idem globus ferreus eodem tormento explosus dum ad horizontem redit aliquando tecta forniceq; domorum traiciat, quandoq; uerò neque glaciem alicuius lacuna ledere possit.

Nota-

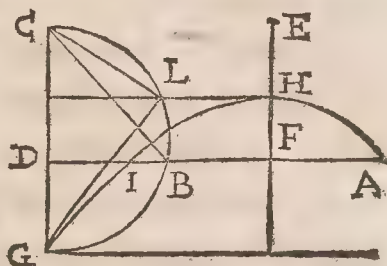
Notabimus etiam vim in percutiendo, grauium per se naturaliter cadentium per spatia $ba, ca.$ esse (facto semicirculo quolibet aed per punctum a) ut sunt $ae, af.$ Sunt enim $ae, af.$ tempora casuum cum sint in subdupla ratione spatiorum; ergo sunt etiam mensurae, siue indices momentorum velocitatis, aggregatorum per spatia $ba, ca.$



P R O P O S I T I O XXII.

Impetum compositum, siue absolutum, quantus sit in quolibet puncto parabole demonstrare.

In solita præcedentium propositionū figura, sumatur quodlibet punctum a in parabola gha . & ducatur horizontalis $abid$. Ducaturq; cb . Dico (facta semper eadem suppositione impetum scilicet per cg esse cg) quod impetus compositus in a , siue in i , est recta cb . Cum

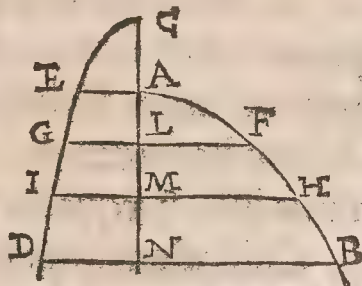


enim impetus in puncto parabolę *a* sit vt naturaliter cadentis ex puncto sublimitatis *e* vsq; in *f*, vel ex *c* vsq. in *d*. erit ille impetus vt *cb* media proportionalis inter *gc*, *cd*. Quod erat &c.

Idem etiam hoc alio modo considerabimus.

Si ex puncto sublimi alicuius data parabole alia parabola circa eandem diametrum describatur, lineæ ordinatim ductæ in descripta, determinabunt impetus absolutos in singulis punctis parabole datæ.

*Sit data parabola ab, cuius punctum sublime sit c. Circa communem diame-
trum fiat per c parabola qualibet cd,
Ductisque ordinatim quocunq; lineis a
e, fg. hi, bd. Dico impetus in pun-
ctis a, f, h, b, esse ut sunt lineę ae, lg.*

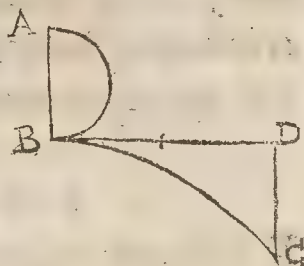


mi, & n. d. Hoc. n. patet. Quia impetus in a. f. h. b. pñctis sunt
ut im-

ut impetus cadentium per ca, cl, cm, cn , nempe ut lineę ae, lg, mi, nd . Quod erat &c.

Lemma.

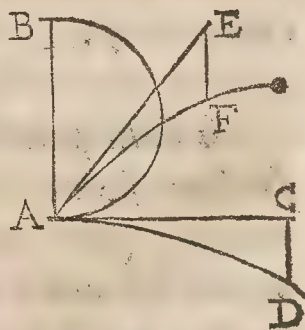
Linea ab . quam in precedentibus pro mensura impetus ponebamus, & circa quam semicirculum describebamus, quarta pars est lateris recti parabola bc , facta ab horizontali proiectione. Patet hoc ex primo libro, cum ab sit impetus, hoc est sublimitas parabola bc secundum Galileum. attamen demonstretur aliter.



Cadat mobile ex a in b , & inde horizontaliter conuersum describat parabolam bc . Sumatur bd . dupla ipsius ba . Ergo mobile tempore casus percurrent horizontale spatium bd , eritq; omnino post tempus casus in perpendicularo dc . Sed est etiam semper in parabola bc , ergo in c communi concurr su erit. Cum ergo facta sit descensio dc tempore casus, erit dc equalis ba . Patet autem quadratum bd equari rectangulo sub cd , et quadrupla ba (cum utraq; cd, ba semisses sit ipsius bd .) Est ergo ba quarta pars lateris recti parabola horizontalis bc . Quod &c.

PROPOSITIO XXIII.

OMnes parabola ab eodem impetu ab factę idem habent latus rectum. (dum modo intelligatur punctum a , ex quo fiunt proiectiones esse vertex omnium obliquarum, parabolarum Sit horizontalis parabola ad , & non horizontalis af : sumantur in tangentibus ipsarum aequales ac, ae .



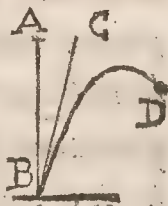
Quia idem impetus est per ac , & per ae , ipsae ac, ae , abstracta grauitatis operatione, eodem tempore absoluerentur; essentq; grauia eodem tempore

pore in c . & e : sed cum gravitas operetur, & idem sit tempus, æquales erunt descensus ef , cd . Quadratum autem ac . æquatur rectangulo sub cd & quadrupla ab , cum demonstratum sit in Lem. præced. rectam ab esse quartam partem lateris recti parabole ad , quare etiam quadratum ae æquale erit rectangulo sub ef , & quadrupla ab . Est igitur eadem ab quarta pars lateris recti omnium parabolarum ab eodem impetu factarum. Quod erat &c.

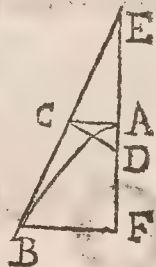
Anteriori alina. **Corollarium.**

Hinc manifestum est semper sublimitatem parabolarum ascen-
dentium, siue lineam impetus, quartam partem esse lateris recti
illius portionis parabole obliquae, quae verticem habeat in pun-
cto separationis proiecti ab instrumento impellente,

Verbi gratia. Si mobile post casum a b ex quiete in a, conuertatur non horizontalitè, sed per quamlibet inclinatam b c, parabolamq; describat b d. Patet lineam impetus, siue sublimitatem a b esse quartam partem lateris recti parabolæ b d. considerata tamen parabola obliqua b d ita ut eius vertex sit punctum b, & applicatarum regula sit tangens b c.



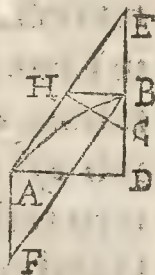
Quod autem hæc conueniant cum doctrina Conicorum, sic demonſtrabimus. Si parabola ab duas tangentes habuerit ac per verticem, & bc non per verticem: ſumptaq; fuerit ad quarta pars lateris reſti, Dico iunctam dc angulos rectos facere cum bc .



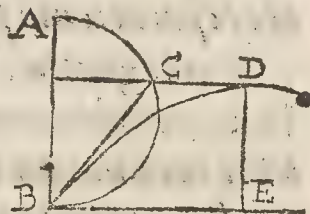
Agatur bf ordinatim. Cum sint *equales* fa ,
 ae . erit quadratum bf . quadruplum quadrati ca . sed idem qua-
dratum bf quadruplum est rectanguli fad , hoc est rectanguli
 ead . equalia ergo sunt quadratum ca , & rectangulum ead ;
angulusq; ecd . rectus.

Hic, nisi penitus abs re nostra esset, facillimè eliceremus demonstrationem foci. Si enim produceretur b d. essent per quartam primi elementorum aequales anguli dec, dbc. sed ad rem nostram.

His demonstratis, data parabola ab cuius axis bd , & focus sit c . si sumatur quodlibet punctum a in sectione, & ordinatim ducatur ad . Dico latus rectum parabola obliqua verticem habentis in a , esse quadruplum linearum simul db , bc ; siue lineæ ce , siue lineæ ca si producat. Ducatur tangens ae , & ex b , agatur bf parallela tangenti ae ; & af ducatur parallela axi bd . Erit per iam demonstrata quadratum he . æquale rectangulo bec ; quadrupla etiam æqualia erunt; hoc est quadratum ae , vel fb , æquale erit rectangulo sub be , & quadrupla ec , vel sub fa , & quadrupla eiusdem ec . Quare ipsa ec , vel db , bc simul sunt quarta pars lateris recti parabola obliqua cuius vertex sit a , & diameter af .



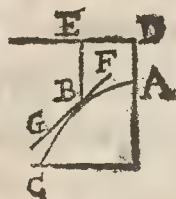
Nos autem dicebamus in precedenti Collario, lineam ab , quæ metitur impetum projectionum, siue quæ sublimitas est parabola obliqua bd verticem habentis in b , esse quartam partem lateris recti eiusdem parabola bd . Quod esse verum confirmamus etiã ex doctrina Apollonij, cum linea ab constet ex de , & ex sublimitate, vel quarta parte lateris recti parabola recta quæ verticem habet d .



PROPOSITIO XXIV.

Quælibet parabola infinitas habet sublimitates.

Si enim per punctum sublime d , quod reperit Galileus, linea horizontalis de producat; quælibet linea perpendicularis quæ ex hac demittatur in parabolam sublimitas eiusdem parabola erit, dummodo impetus à mobili per descensum acquisitus conuertatur non per lineam horizontalem, sed tangentem.



179

179

179

179



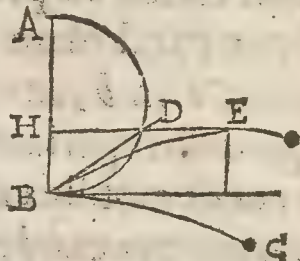
179

179

PROPOSITIO XXVI.

Parabola projectionis horizontalis maxima omnium est, quæ fieri possint ab eodem impetu.

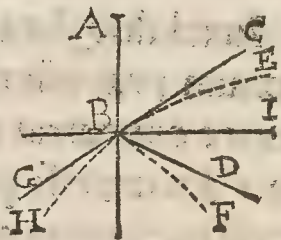
Sit impetus ab . fiatq; circulus adb . Sit etiam parabola iactus horizontalis bc , & alia parabola be . Dico maiorem esse parabolam bc . quàm be . Est enim ba recta sublimitas parabolæ bc , & ba recta sublimitas parabolæ be . Quare bc omnium maxima erit; cum maiorem habeat sublimitatem, ideoq. maius latus rectum. Quod erat &c.



PROPOSITIO XXVII.

Parabolæ ab eodem impetu factæ, quarum directiones æqualiter ab horizonte vtrinq; distant sursum, & deorsum eiusdem parabolæ portiones sunt,

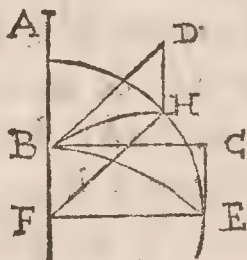
Sit impetus ab & fiant projectiones iuxta directiones bc , bd , equalibus angulis ab horizonte bi vtrinq; distantes, Dico parabolam be & parabolam bf . portiones eiusdem parabolæ esse. Producatur enim cbg . Demonstratum est Propositione 7. huius, quod si fiat projectio cum eodẽ impetu iuxta directionem bc , siue bg , parabolæ harum projectionum vnâ eandemq; continuatam parabolam efficient. Erit ergo bh eadem parabola ac be ; quare etiam bf eadem parabola erit ac be ; quandoquidem æqualitèr inclinantur directiones bg , bd , idemq; est impetus.



PROPOSITIO XXVIII.

Si ab eodem puncto b , cum eodem impetu ab , eodem temporis momento simul proiciantur graua per diuersas incli-

Sit facta projectio horizontalis be , & non horizontalis quælibet alia bh iuxta directionem bd . Sumptoq; in horizontali parabola quouis puncto e , ducatur perpendicularum ec , & horizontalis recta ef . Seceturq; bd æqualis bc , & demittatur perpendicularum dh æquale ipsi ce , vel bf . Dico grauia eodem



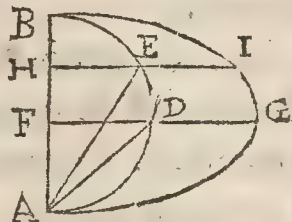
Verum ergo est, non solum grauiac cadentia ab eodem puncto per diuersas planorum inclinationes, sed etiam proiecta semper esse in eiusdem circuli peripharia. Exempli gratia; si quis ex aliquo puncto grauiaproiceret cum eodem impetu per diuersas inclinationes, aliudq; graue emitteret eodem temporis instanti ex quiete, & ab eodem puncto; videret grauiaproiecta semper in aliquo circulo disposita commeare, & huiusmodi circulus semper haberet centrum in graui illo, quod naturaliter descendit emissum ex quiete. uti dictum est.

P R O P O S I T I O XXIX.

SI ab eodem puncto, & cum eodem semper impetu fiant
projectiones; vertex parabolarum, siue quod idem est,
extrema ascensionum puncta erunt in sphaeroidis superficie cu-
ius

ius quidem maiordiameter horizontalis sit, & dupla minoris.

Sit impetus ab , & circa ab . Fiat semicirculus adb . tum fiant projectiones iuxta tangentes ad , ae . Dico vertices parabolarum esse in superficie sphaeroidis; quæ habeat axem ab , & diametrum horizontalem duplam axis ab . Demonstratum enim est Propositione 9. huius, quod productis horizontalibus fg per punctum d , & hi per punctum e , quæ duplæ sint linearum fd , he , demonstratum inquam est puncta g & i esse vertices parabolarum. Sed puncta g & i sunt in sphaeroidis superficie, de qua diximus (est enim ut gf ad fd , ita ih ad he ; ergo patet propositum.

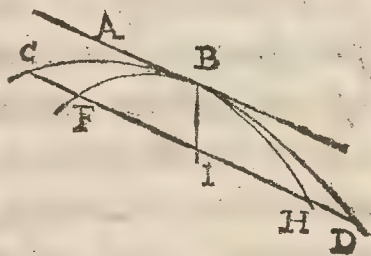


Sphaera ergo actiuitatis ascendentis projectorum est in superficie sphaeroidis illius speciei quæ diametrum habeat duplam axis.

Lemma I.

Si recta linea duas parabolas contingat in eodem puncto, sint quæ parabolarum diametri parallele, ipse pat abola se mutuo contingant in illo eodem puncto.

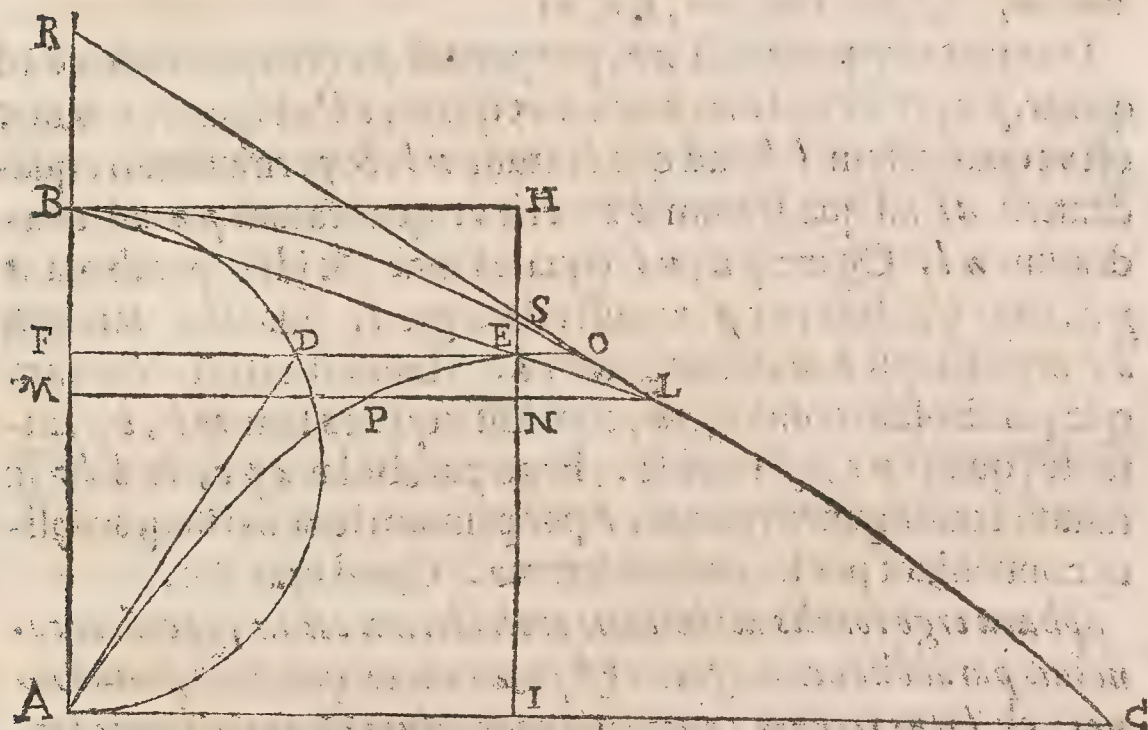
Sit recta linea ab quæ in puncto b duas parabolas cbd , fbh . contingat, & habeant parabola parallelas diametros, Dico huiusmodi parabolas se mutuo contingere. Si enim non contingunt, secant; & intelligatur alteram parabolarum esse cbh . alteram verò $fb d$. Agatur bi parallela diametris, & cd parallela tangenti. Erunt ergo æquales ci , ih ; item æquales fi , id . Quod est impossibile, Quare &c.



Lemma II.

Si duæ parabola abc , $db e$. se mutuo contingant in b , & habeant diametros parallelas; Dico has parabolas numquam amplius conuenire.

Si enim possibile est conueniant in f . & ducatur bh parallela dia-



Sit impetus ab . & circa ab fiat circulus adb . circaq; axem ab fiat ex vertice b parabola bic . cuius focus sit a . Fiat iam projectio iuxta quamlibet elevationem ad , sumaturq; de æqualis ipsi df . & demisso perpendiculari hci . fiat sua parabola circa diametrum ei ex puncto a , eritq; hæc parabola semita projecti ab impetu ba iuxta lineam directiuam ad , & erit he subli-

p. Conic.

sublimitas huius parabole. Ducatur be , quæ conveniet cum parabola btc . Conueniat in l . Dico parabolam ape continuatam contingere parabolam btc in l . Ducantur ordinatim lm , & fe vsq; in o .

Sunt per Lemma Propos. 24. præcedentis libri in continua ratione lm, of, ef ; Quadratum of . quadruplum est rectanguli abf ob parabolam cuius focus est a . & quadratum ef cum sit per constructionem quadruplum quadrati df , quadruplum etiam erit rectanguli afb . His demonstratis sic procedemus. Recta mb ad rectam bf per 4. sexti est vt ml ad fe , siue vt quadratum fo ad quadratum fe (sumptisq; eorum subquadruplis) vt rectangulum abf ad rectangulum afb , hoc est (omissa communi altitudine) vt recta ba ad af . Quare diuidendo erit vt mf ad fb , ita bf ad fa , & propterea in continua ratione sunt mf, bf, fa ; siue ne, he, ei .

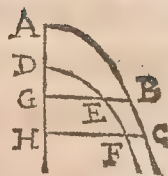
Transeat iam parabola ae . per punctum p . erit quadratum ai ad quadr. pn , vt ie , ad en . hoc est vt quadr. eb ad quadr. en hoc est vt quadratum bb . ad quadratum nl ; & permutando, quadratum ai ad quadratum bb , erit vt quadratum pn ad quadratum nl . Quare pn, nl . æquales sunt. & ideo parabola ape . cum transeat per p . transit etiam per l . Sumatur tandem br æqualis ipsi bm . & iungatur rl . Manifestum est rl vtramque parabolam contingere, cum sint æquales tam mb, br , inter se, quam ne, ef inter se. Ergo parabolæ ape , & btc se mutuò contingunt in puncto l per primum lemma; neq; amplius conueniunt per secundum lemma. Quod erat &c.

Sphæra ergo totalis actiuitatis proiettorum est in superficie conoidis parabolici, cuius focus est punctum ex quo fiunt proiectiones; & latus rectum conoidis quadruplum est proiectionis perpendicularis sursum. Demonstratum enim fuit singulas singularem proiectionum parabolas huiusmodi conoidis superficiem attingere, numquam excedere. Proiecta igitur, eodem tempore sunt in sphære superficie, in fine ascensionis sunt in spheroidis superficie; suprema illorum actiuitas est in conoidis parabolici superficie.

Lem-

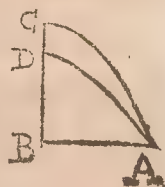
Lemma.

Parabolę aequales abc , def , & circa eandem diametrum ah descriptę asymptoti sunt; hoc est cum semper magis accedant inuicem, nunquam tamen conueniunt.



Rectangulum sub ad & latere recto differentia est inter quadrata bg , ge , item etiam inter quadrata ch , hf . Ergo rectangula etiam sub eb , & bg e tamquam una linea, & sub fc , chf tamquam una linea, equalia erunt inter se, cum sint differentię quadratorum; reciproca ergo habebunt latera, nempe ut eb ad fc ita erit chf lineę ad bge lineam. est autem chf lineę maior quam bge , & ideo eb maior erit quam fc . Parabolę ergo semper magis accedunt. Quod nunquam conueniant patet.

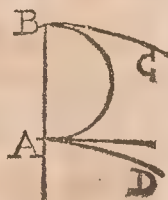
Nam si possibile est, conueniant in a . & ducatur ordinatim ab . Cum parabolę sint eequales habebunt idem latus rectum, eritq; quadratum ab . eequale utriq; rectangulo quod continetur sub latere recto, & alterutra ipsarum cb , db . Quod est impossibile.



PROPOSITIO XXXI.

Parabola projectionis horizontalis nunquam conuenit cū superficie conoidis præcedentis propositionis, etiam si semper magis ac magis ad illud accedat.

Sit in figura præcedentis propositionis impetus ab ; parabola genitrix conoidis sit bc , parabola autem horizontalis projectionis sit ad . Dico has parabolas semper quidem accedere, nunquam tamen conuenire. Sunt enim circa eandem diametrum ab ; & sunt æquales; quandoquidem recta ab est quarta pars lateris recti parabolę bc , per constructionem, & parabolę ad , quia est ipsius sublimitas. Ergo per lemma præcedens asymptoti erunt. Quod erat &c.



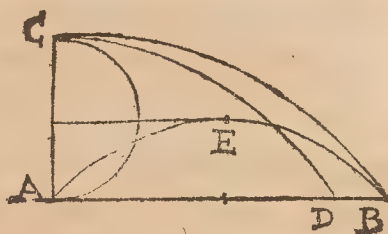
Corollarium.

Hinc manifestum est parabolas factas iuxta directiones deorsum inclinatas numquam contingere superficiem conoidis; Atamen si continuatę intelligantur illud contingent ad partes oppositas superiores. Demonstravimus enim Propos. 7. & 27. Parabolas directionum deorsum vergentium easdem esse ac directionum sursum vergentium, dummodo lineę directionum equaliter ab horizonte distent utrimq;

PROPOSITIO XXXII.

Dato impetu siue sublimitate ac , cuius proiectio semirecta sit parabola aeb , Dico, si proiectio fiat cum eodem impetu horizontaliter ex puncto sublimitatis c , iactum, siue parabolam cadere in b .

Cadat enim, si possibile est, iactus horizontaliter factus ex puncto c in punctum d . Et quia parabolę cd impetus, siue sublimitas ponitur recta ac , erit ac . quarta pars lateris recti parabolę cd ; ergo ad applicata ex foco dupla erit ipsius ac . Sed etiam ab dupla erat ipsius ac ; cum supponatur ab amplitudo facta à projectione semirecta, ergo æquales essent ad , ab , impossibile. Patet ergo propositum.



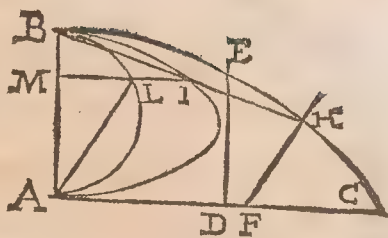
Patet etiam quod iactus cb describit parabolam genitricem illius Conoidis, cuius superficiem tangunt omnes proiectiones factę ex puncto a cum eodem impetu.

PROPOSITIO XXXIII.

Dato impetu, & quocunque plano siue erecto, siue ad horizontem inclinato, reperire in dato plano remotissimū, siue altissimum punctum ad quod cum dato impetu fieri possit iactus.

Item reperire directionem quę altissimum, siue remotissimū illum iactum faciat.

Sit impetus ab & parabola conoidis sit bc . Iam dato plano ad horizontem erecto de . erit punctum e altissimum omnium illorum, ad quæ potest ex a cum impetu ab . iactus peruenire. Si verò inclinatum sit planum vt fb , erit punctū

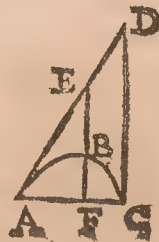


b altissimum omnium illorum ad quæ cū dato impetu ex puncto a potest iactus peruenire. Directionem verò quæ facit parabolam pertinentem ad punctum b sic inueniemus. Fiant circa axem ab circulus, & ellipsis propositionis 29. iunctaq. bb , secetur ellipsis in i , & ducatur im . horizontalis quæ secet circulum in l : erit al directio quæ parabolam emittit tangentem conoides in puncto b . Hoc enim demonstratur in Propositione 30. huius.

Propositio Archimedis est sequens lemma in libro de spheroidibus & Conoidibus, quam tamen expeditius demonstrabimus.

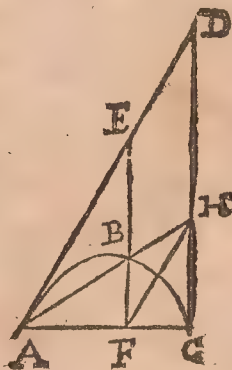
Lemma.

Si fuerit parabola abc , cuius basis ac , tangens a d , parallela diametro cd ; ducaturq. alia parallela diametro, ef ; Dico esse vt cf ad fa , ita fb ad be . Est enim cd ad b longitudine vt da ad a e potentia, vel vt cd ad fe potentia. Sunt ergo continue cd , fe , be . Iterum est, vt ca ad af ita cd ad fe , vel fe ad be ; & diuidendo vt cf ad fa , ita fb ad be . Quod erat &c.



Manente eadem figura & demonstratione, dico si producat recta ab vsq; in h , & iungatur fh , quod fh , & ad parallelae erunt.

Demonstratum enim est vt cf ad fa ita esse fb ad be , hoc est ch , ad hd . Quare fh . parallela erit ipsi ad .



P R O P O S I T I O XXXIV.

Data eleuatione & amplitudine parabolæ in plano horizontali, quæritur amplitudo in plano inclinato.

Sit in præcedenti figura data eleuatio ad , amplitudo autem ac , planumq; datum sit ab quæritur transitus parabolæ b . Ducantur cd parallela diametro; bf verò parallela tangenti, & fb parallela diametro; Dico b esse transitum parabolæ. Hoc autem patet ex demonstratis.

Data in eadem figura eleuatione ad & basi ac , planoque fe ad horizontem erecto, quæritur punctum b . in eodem plano fe . Ducatur cd erecta ad horizontem, fb parallela tangenti ad , & iungatur ba , secans ef in b . Patet iterum transitum parabolæ esse punctum b .

P R O P O S I T I O XXXV.

Data basi parabolæ, vnicoq; puncto per quod ipsa transit; Vel datis tribus punctis in parabola, eleuationem projectionis demonstrare.

Sit in eadem figura data amplitudo ac , datumque punctum b . Vel dentur tria puncta vtrumq; a, b, c .

Iungantur ab, ac . & per c, b puncta sint parallelae diametro cd , & fb . & dabuntur puncta b & f . Producat ergo bf . quæ parallela tangenti erit. angulus ergo bec erit angulus eleuationis.

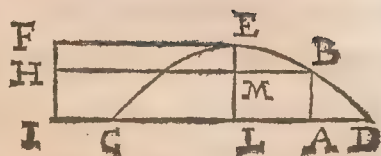
Manente eadem figura. Dato angulo eleuationis bec datisque punctis c & b . inuenire punctum ex quo facta fuerit projectio. Agantur per puncta c , & b , horizonti perpendiculares ef, dc , quæ dabunt puncta b, f . in linea bf data. Ducantur iam cf, bb , quæ concurrant Verbi gratia in a . Et ex puncto a facta erit projectio nisi concurrant impossibile datam erit.

Lemma.

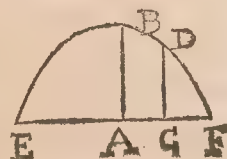
Si in parabola cuius basis cd , parallela diametro fuerit ab , erit rectangulum sub ab & latere recto æquale rectangulo cad .

Ponatur

Ponatur enim e flatus rectū, & compleatur rectangulum ei. Quia cd secta est bifariam & non bifariam, erit quadratū ld , hoc est rectangulum ei aequale rectangulo cad & quadrato la . Demptis equalibus (nempe hinc quadrato la , siue mb , & inde rectangulo eh) reliqua equalia erunt, hoc est rectangula mi , & cad . Quod &c.



Iam si rectæ ab , cd . fuerint parallelæ diametro, erit rectangulum caf ad rectangulum ecf ut ab , ad cd .



Sunt enim illa rectangula equalia rectangulis sub ab & latere recto, & sub cd ac latere recto respectiue, ista vero cum habeant æqualem altitudinem, erunt ut bases ab , cd . Quare etiam rectangula caf , ecf . erunt ut ab , ad cd .

PROPOSITIO XXXVI.

DAta directione ab , & basi ad . data est altitudo parabolæ supra quoduis punctum c . Diuidatur bifariam ad in f , & erigatur fb . Quoniam datur angulus bad directionis, & basis ad , dabitur in triangulo rectangulo latus bd , & ideo fb , quæ quidem est quarta pars ipsius bd ob parabolam. Fiat ergo ut rectangulum afd , siue quadratum semibasis af ad rectangulum acd , ita altitudo fb . ad aliam. & quarta reperta erit altitudo quæsitæ ce . Quod erat &c.



Lemma.

Si conoides parabolicum abc secetur plano def æquidistantè axi, sectio parabola erit, & æqualis semper ei quæ conoides generauit, hoc est æquale latus rectum habēs. Sumpso enim quolibet puncto i in sectione die , applicetur il , ducaturq.

DE MOTV AQVAVM.

IAm verò & de aquis aliquam huic libello contemplationem inserere non erit inconueniens : aquis enim præceteris corporibus sublunaribus adeò peculiaris, & cognatus videtur motus, ut ferè nunquam quiescant . Omitto magnum illum nutantis maris motum ; Prætereo etiam omnem fluminum, aquarumq; currentiũ tum mensuram, tum usum, quarum omnis doctrina reperta primum fuit ab Abbate Benedicto Castellio præceptore meo . Scripsit ille scientiam suam, & illam non solum demonstratione, verũ etiam opere confirmavit, maxima cum Principum & populorum utilitate, maiore cum admiratione phylosophorum . Extat illius liber, vere aureus . Nos minuta quædam, & plerumq; inutilia, non tamen penitus incuriosa circa hanc materiam prosequemur .

Supponimus .

Aquas violentè erumpentes in ipso eruptionis puncto eundẽ impetum habere, quem haberet graue aliquod, siue ipsius aquæ gutta vna, si ex suprema eiusdem aquæ superficie vsq; ad orificium eruptionis naturalitèr cecidisset .

Exempli gratia . Si tubus a b convenientis capacitatis, hoc est magnæ laxitatis, intelligatur semper aqua plenus vsq; ad libellam a, et perforetur angusto orificio in b . Supponimus aquam ex b erumpentem eundem impetum habere, quem haberet graue aliquod si naturalitèr ex a in b cecidisset .

Hoc ratione quodammodo confirmari posse videtur nam si ad osculum b alius tubus inseratur, et exquisitè coaptetur, aqua ex b influens in tubum b c, tantam vim habet ut se ipsam euehat vsq; ad eãdem libellam horizontalem ca ductam per orificium a .

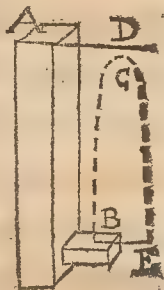
Quare verisimile videtur etiam quando ipsa ex b libera erumpit, habere vim redeñdi vsq; ad horizontalem lineam quæ per a ducitur ; vel quod idem est habere tantum impetum quantus est grauis alicuius,



siue

sive unius guttae liberè cadentis ex a in b.

Experimentum etiam aliquo modo principium nostrum probat, quamquam aliqua ex parte reprobare videatur. Nam si osculum b sursum dirigatur, & sit aptè rotandum, & lenigatum, sitq; reliqua rotius tubi latitudo multo capacior quàm orificiū b, videbimus aquā salientē per lineā b c, quasi ad libellam suam ad ascēdere. Defectionis autē c d causam adscribere possumus partim impedimento aeris qui cōtra quodcunq; corpus mobile luctatur; partim etiā ipsimet aqua, quæ dum ex fastigio c reditum affectat deorsum, se ipsam venientem impedit, & retardat, neque sinit subeuntes guttas ad illud ipsum signum ad quod suo impetu pervenirent, ascendere posse. Hoc manifestè patebit, quando opposita manu foramen b penitus occludatur; deinde retracta quam citissimè manu repente aperiatur: videbuntur enim primæ, & praeuntes guttae altius pervenire, quàm sit deinde culmen aquæ c. postquam aqua deorsum fluere cæperit. illæ enim priores guttae præcedentem aquam non habent, quæ contra ipsas refluens motum ipsarum in fine ascensionis impediat suppono enim ductum b c perpendicularem.



Adde etiam quod si quis observet aerem ipsæ aquæ b c circumfusum, reperiet ipsum agitari, & sursum moveri, quæ quidem latio non fit sine vi, & propterea cum impedimento motus aquæ ascendentis. Vnde est, quod si quis velit de hoc principio experimentum facere, sumendum esset argentum viuum, quod ob intimam gravitatem magis aptum est, & ad conservandum diu conceptum impetum, & ad superandam aeris resistentiam. Aqua autem ob leuitatem multum aberrare videbitur, & præcipuè si tubus magnæ fuerit altitudinis: tunc enim ob maximum impetum spargitur in guttulas minutissimas tamquam roris, neq; dimidiam, & fortasse tertiam, quartamve partem ascendit illius intervalli quod re ipsa, theoricè loquendo, & remotis impedimentis omnibus concepto impetu totum ex aquare deberet. Ceterum si quis prædictis rationibus non acquiescat, videat an inter sequentes Propositiones ullam probet; quod si ita erit, facile per re-

solv.

lutionem ex approbata propositione primam suppositionem demonstrabimus ; sin minus totam hanc appendicem de motu aquarum vel saltu pratermittat , vel funditus è libello euellat, quod equidem libentissimè concedo , et si factum experimentum omni diligentia magnam partem sequentium propositionum exactissimè confirmauit .

His expositis consideremus aquam recidiuam in e , nempe in plano horizontali ducto per libellam orificij b . Ex Galileo habemus impetum aque cadentis ex c in e tantum esse quantus uerere potest eandem aquam ex e in c . Ergo impetus in e idem est ac in b , sed in e impetus est tamquam grauis cadentis ex c in e . vel ex a in b (diximus enim quod punctum c reipsa deberet esse in libella ad abstractis impedimentis quæ aquam retardant) ergo impetus in b est tamquam grauis cadentis naturalitèr ex a in b .

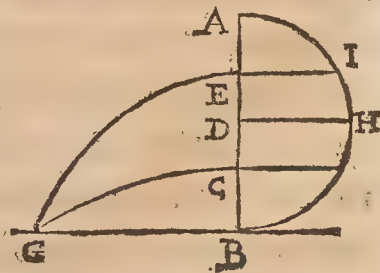
His suppositis quedam demonstrabimus de aquis erumpentibus , quæ mirè cum doctrina proiettorum conuenire videntur -

Primùm manifestum est omnes aquas erumpentes ex foraminibus tubi alicuius perforati , parabolas describere . Primæ enim gutta scaturientes e tubo sunt de natura proiettorum quandoquidem ipsæ , quamquam liquidæ attamen sunt spherulæ graues & coherentes , & ideo parabolam certè designabunt . Omnes autem subsequentes , quæ cum eodem impetu emittuntur (supponimus enim tubos semper aqua plenos) semitam præcedentium percurrent ; quare continuus ille aquæ fluentis tractus parabola erit .

Obijcet fortasse aliquis hoc non videri , præsertim quando tubi orificium valde angustum erit , & impetus vehemens . Tunc enim (ut videre est in linea illa aquea , quæ ex fontium fistulis violentius erumpit) prior pars orbitæ illius ascendens magis tensa apparet , et ad parabolam veriùs conformata ; posterior uerò , hoc est ea quam aqua descendens percurrit , magis prona , et ut ita dicam , languida atq ; curua conspicitur . Obiectioni respondetur ; non solum præcedentem propositiunculam , sed etiam

maiores partem sequentium huic instanti subiacere. Causa est impedimentum medi, quod ad momentum corporis mobilis valde sensibilem habet rationem, multoq; maiorem quam in projectionibus quę sunt à machinis bellicis. Siquidem illic materia projectionis sunt globi plumbei, ferrei, vel saltem marmorei; hic verò linea est, & quidem aquea. Nulli igitur mirum sit, quòd cum fundamentum huius doctrine equè verū sit Thoricè loquendo, ac in proiectis Galilei, practicè tamen multum ab ipsis contemplationibus aberrent experimenta, quę ad hoc ut exactiora euaderent, vel fieri deberent in medio non obstante, vel saltem grauiissima materia esset adhibenda. Quamquam si quis modica altitudine, solertiq; diligentia experiri hæc omnia velit, minimum quoddam, & plerumq; insensibile deesse comperiet. Experimentum, quod nobis confirmavit has penè omnes speculatiunculas, factū fuit tubo quodam, imò capsula parallelepipedæ, cuius altitudo passum Geometricum excedebat, cuius basis uno palmo quadrato non erat minor. Foramina verò erant rotunda, circuloque humana pupillę maiora, non perperam facta, sed solertissime excanata in lamellis cupreis, tenuibus, & ad horizontem erectis. Aqua enim violenter erumpens semper directione exit perpendiculari ad illud planum ex quo erumpit, ideoq; fiebat ut emissiones nostri tubi horizontales essent.

Dato tubo ab semper pleno, & aptè perforato foraminibus cde . hoc est quæ sint figuræ circularis, sitq; illorū ductus horizontalis, hoc est in tenui lamella plana pendiculari. Datoq; horizonte quolibet bg , inuenire amplitudinē vniuscuiusq; parabolæ. Fiat circa ab diametrū semicirculus abb . Eritq; parabolæ fluētis, ex e amplitudo dupla lineæ ei quæ horizontaliter ducitur in semicirculo. Et amplitudo parabolæ erumpentis ex d erit dupla lineæ dh . Et hoc probatur, quia cum aqua sit velut proiectum quoddam, sitq; (per suppositum) ipsius punctū sublime a , erunt per Propositionem 5. Galilei, semisses amplitudinum medio loco proportiona-



les inter sublimitatem, & altitudinem; quare semisses amplitudinum æquales erunt lineis ei , dh .

Corollaria.

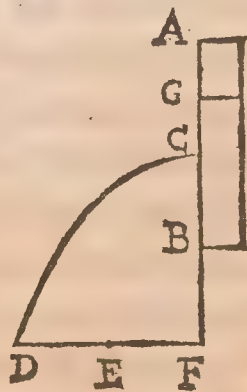
Hinc manifestum est quod si tubus ab perforetur in d puncto medio altitudinis, tunc emissionem ex d factam longius quàm qualibet alia cadere.

Foramina verò quæ aequalitèr à puncto medio d . distant, patet æquales amplitudines facere.

Manifestum etiam est inferiores parabolas semper superioribus maiores esse, cum habeant maiorem sublimitatem, hoc est minus latus rectum, est enim sublimitas quarta pars lateris recti, ut ostensum est.

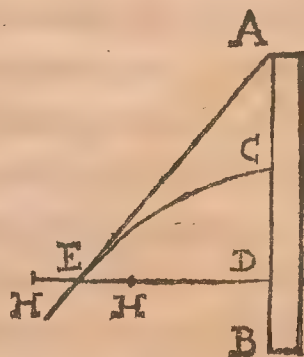
Dato dolio, siue tubo ab quod aptè perforatum sit in c , & emissionem faciat cd . Inuenienda sit aquæ in tubo latentis libella horizontalis, siue superficies suprema.

Sit horizon df , & producat cb in f , & secetur bifariam fd in e , fiatq; ut cf altitudo, ad fe . semibasim, ita fe , ad aliam, quæ erit sublimitas cg . Patebit ergo libellam aquæ in tubo latentis esse per punctum g .



SI tubus ab aptè perforetur vbicunq; in c , emissio fluentis aquæ coni rectanguli superficiem continget, cuius axis sit ipse tubus, vertex verò sit in aquæ libella.

Sit angulus coni bae . semirectus, & ab tubus, hoc est linea ea in qua sunt foramina, ponatur axis coni. Sumatur æqualis cd ipsi ca . Ducaturq; horizontalis de . Dico parabolam transire per e . Si enim potest, transeat per h . & cum aquæ sublimitas sit ca . erit semisses lineæ



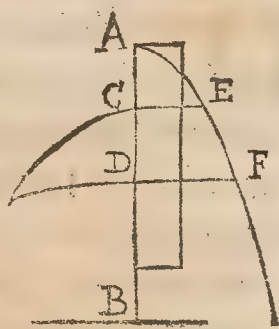
Bb 3 bd me-

bd media proportionalis inter duas æquales dc , ca , & propterea tota db . æqualis erit ipsi da , vel de . quod est absurdum. Si ergo parabola transit per punctum e . ipsa ea tangens est, cum æquales sint ac , cd .

Hinc manifestum est quod si tubus in omnibus suis punctis aptè perforatus fuerit, omnes emissiones quodammodo conspirare videbuntur ad formandam conirectanguli speciem. Si verò non tubus, sed sphaerula in vertice ipsius posita, aptè perforata sit in omnibus suis punctis, emissiones omnes cuiusdam conoidis parabolici imaginem conformabunt, ex Propos. 30. huius.

A Quarum ex tubo ab perforato erumpentium velocitates sunt vt lineæ in parabola applicatæ ad suam vniuersiuiq; sublimitatem.

Sit tubus ab semper aqua plenus, & ex foraminibus c , d erumpant fluentes lineæ: descriptaq; parabola ae circa axem ab ducantur ordinatim ce , df . Erit ergo velocitas in c ad velocitatem in d , vt impetus grauis cadentis ex a in c . ad impetum grauis cadentis ex a in d , nempe vt ce , ad df . ex demonstratis in primo libro de motu.



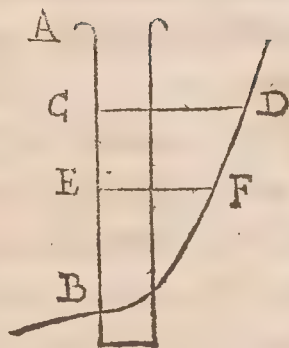
Corollarium.

Hinc sequitur ex doctrina Abbatis Castellij quantitatem aquæ exeuntis per ostium c . ad quantitatem aquæ exeuntis per d (quando foramina fuerint equalia) esse vt ce , ad df . Hoc est aquas erumpentes ex foraminibus equalibus esse in subdupla ratione sublimitatum, siue altitudinum suarum. Veritatem huius Corollarij primus omnium experimento indagauit eruditiss. vir, aquè literis, scientijsq; omnibus ornatus, Raphael Magiottus, & veritatem nostram exitus felicitate confirmauit.

Quando verò foramina inæqualia erunt, quantitates aquæ exeuntis compositam rationem habebunt ex ratione velocitatum, & ex ratione ostiorum.

Si tu-

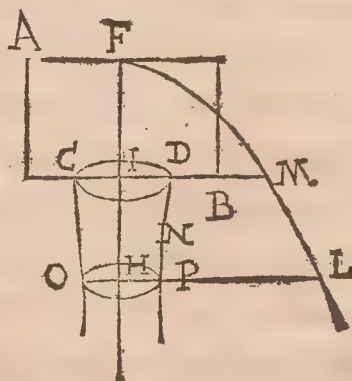
SI tubus ab cylindricus, siue prismaticus perforatus in fundo b fluat, neque alius humor superinfundatur, velocitates supremæ superficiæ humoris latentis decreſcent cum eadem ratione, qua decreſcunt etiam lineæ ordinatim applicatæ in parabola bd , quæ axem habeat ba verticem verò b .



Hoc manifestum est. Nam quando aquæ summa superficies erit c , velocitas erit cd & quando summa superficies erit e , velocitas erit ef . ex iam demonstratis; & hoc modo semper.

Cuiusmodi sit solidum ab aquis cadentibus conformatum inuestigare.

Sit vas aqua semper plenum ab amplissimum, cuius foramen in fundo circulare sit cd , solidum autem aquæ ex eo fluentis sit $copd$, & solidi axis sit fb . Dico lineam dnp solidi huius genitricem talem esse, vt numerus biquadratus diametri cd , ad biquadratum diametri op . sit reciprocè vt altitudo fb ad altitudinem fi .

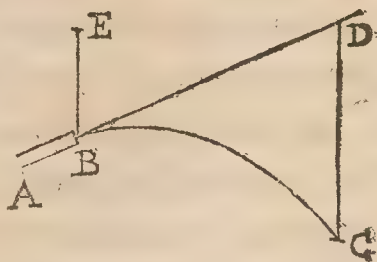


Ostendit Abbas Castellius sectionem cd ad sectionem op , esse reciprocè vt velocitas in op , ad velocitatem in cd . nempe vt hl ad im in parabola fm . His præmissis. Quadratus numerus diametri cd ad quadratum op est vt circulus cd , ad circulum op . nempe vt hl ad im . Numerus autem quadratus ex hl ad quadratum ex im est vt hf ad fi . ergo biquadratus numerus diametri cd . ad biquadratum op est reciprocè vt altitudo fb , ad altitudinem fi . Quod &c.

Data sit eadem figura altitudo fi 100. fb 160. dataq; sit diameter foraminis cd 50. Queritur quanta futura sit solidi diameter op . Fiat vt fb ad fi , nempe vt 160. ad 100. ita numerus biquadratus diametri cd , nempe 6250000. ad alium, qui erit 3906250; idemq; erit numerus biquadratus diametri op : si ergo ab

go ab eo extrahatur radix biquadrata, proueniet 44. cum s. vñ. decimis proximè. tantam ergo pronunciabimus esse diametrum *op*.

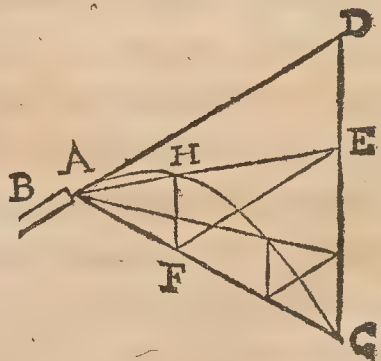
DAta *b d* directione fistulæ *a b*. & puncto *c* in quod incidit aqua fluens, inuenire summam latentis aque libellam, siue superficiem. Producat *a b d*, & ex *c* erigatur perpendiculum *c d*. Deinde fiat vt *c d*, ad *d b*, ita *d b* ad aliam, cuius quarta pars sit *b e*. Dico per *e* transire libellam aquæ latentis supremam. Est enim *b d* tangens parabolæ, & *c d* parallela diametro; ergo quadratum *b d* æquale erit rectangulo sub *c d*, & latere recto, quare reperta illa linea (cuius quartam partem posuimus *b e*) latus rectum erit, & *b e* sublimitas. Quod &c.



Monemus iterum ad hoc vt experimenta cum demonstrationibus congruant, quòd foramen b debet esse in lamella tenui, & plana, ad quam perpendicularis sit recta b d. Reliquum verò interioris tubi b a & c. vsq; ad initium aqueductus, debet esse capacissimum; quò enim laxius erit, eò exactius experimentum euadet. Quotiescunq; autem aqua per tubum latentem decurrens per angustias transire debuerit, falsa omnia reperientur; Quemadmodum accidet etiam, si præ nimio impetu, aqua statim atq; emissa est, in tenuissimum rorem dispergatur.

DAta directione *a d*, tubi, siue fistulæ *b a*, & puncto *c* in quod incidat aquæ emissio, totam parabolam aquæ fluentis describere.

Producat *b a d*, & erigatur perpendiculum *c d*. Deinde connectatur *a c*. Ducantur iam tres lineæ *a e*, *e f*, *f b*, quarum prima sit ex angulo *a* vtcunque, secunda parallela tangenti, tertia parallela diametro. & punctum *b* erit transitus parabolæ, vt constat ex demonstratis, & sic de singulis punctis parabolæ quæsitæ.



POsito vase ab siue cylindrico, siue prismatico quod in fundo perforatum sit foramine b . Velocitas aquæ exeuntis ex b velocitati libellæ, siue supremæ superficiei descendentis in vase, semper eadem ratione respondebit,

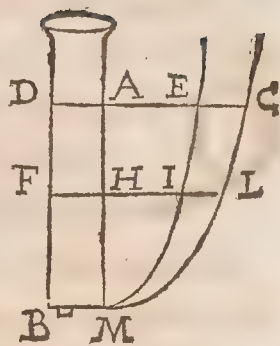
Quandò libella aquæ in vase est ad , sit velocitas ac aquæ exeuntis per b . Tum fiat, vt sectio ad vasis, ad sectionem orificij b , ita ac ad ae . Eritq; per doctrinam Castellij, ipsa ae . velocitas libellæ da in descendendo. Iam circa am diametrum fiant per c , & e , duæ parabolæ mc , me .

Consideretur deinde alia libella fb . Quando fb . libella erit, tunc per demonstrata erit velocitas in b vt linea hl . Sed velocitas in b ad velocitatem libellæ fb erit per doctrinam Castellij vt sectio fb ad sectionem b , nempe vt ca ad ae & sic semper. Quare velocitas aquæ exeuntis ad velocitatem libellæ descendentis in quocunq; loco consideretur, semper erit vt linea applicata in maiori parab. ad applicatam in minori; hoc est in eadem semper ratione.

Aliter etiam ostendetur idem hoc modo. Intelligatur in vase ab qualibet sectio fh , quæ non sit summa superficies: sit autem summa superficies da . Iam; cum eadem quantitas aquæ transeat per sectionem b & per fh , erit velocitas in b ad velocitatem in fh reciproçè vt sectio fh ad sectionem b ; sed sumpta sectio fh æque uelox est ac summa superficies da (cum vas ponatur cylindrus, siue prisma) ergo velocitas in b ad velocitatem supremæ superficiei da descendentis in vase semper eadem ratione respondebit; nimirum semper erit vt sectio vasis ad sectionem foraminis b .

Corollarium.

Ergo quando altitudines in vase erunt am , hm , erit velocitas aquæ exeuntis ex b posita altitudine am , ad velocitatē exeuntis ex b posita altitudine hm , vt est velocitas summæ superfici-



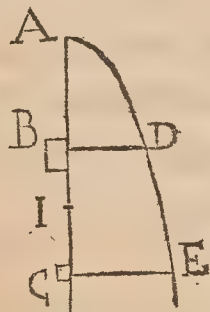
perficiei da ad velocitatem summæ superficiei fh . hoc enim patet. Nam sumpta superiori conclusione permutando tantum deducitur hoc Corollarium.

Quantitates aquarum ab eodem, siue ab æqualibus foraminibus erumpentium eodem tempore, sunt inter se in sub duplicata ratione altitudinum.

Sit vas ab præcedentis figuræ perforatum in b . & aliquando maneat semper plenum vsque ad signum da ; aliquando verò vsque ad fh . Dico quantitatem aquæ exeuntis quando altit. est am , ad quantitatem aquæ exeuntis quando altit. est hm (intellige semper eodem tempore) esse in subduplicata ratione altitudinum am ad hm . Nempe vt recta ac ad hl . Nam quando altitudines sunt am , & hm , Velocitates in b sunt ex Coroll. præced. vt velocitas summæ superficiei da , ad velocitatem summæ superficiei fh ; siue vt applicata ae ad hi . Ergo quantitates aquarum erumpentiū ex eodem foramine b erunt vt ae ad hi , nempe in subduplicata ratione altitudinum am . ad hm .

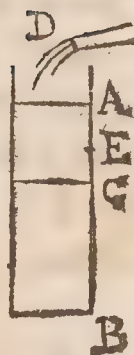
Hæc speculatio conuenit exactissimè cum experimēto à nobis summa cum diligentia facto.

Quoddam vas cuius summitas a perforatum est foramine b ita vt superinfluēte quodam aquæ ductu in a semper plenum permaneat. Quæritur, quo foramine perforari debeat in c vt eadem superinfluēte aqua plenum præcisè sicut antea permaneat. Sumatur inter ab , ac media ai . Fiatq; vt altitudo ca ad mediam ai ita osculum b ad osculum c . Erit ergo osculum b . ad osculum c , vt applicata ce , ad applicatam bd ; hoc est vt velocitas foraminis c ad velocitatem b reciprocè. Propterà eadem quantitas aquæ effluet per vtrumq; osculum b & c ; propositumq; vas semper plenum manebit.



Quoddam verò vas ab cum perforatum sit infundo foramine b , superinfluente quodam dato aquæ ductu d , plenum permanet

manet vsq; ad signum c . Queritur quantitas aquæ in idem vas ingerenda ad hoc ut repleatur vsq; ad signum a . Sumatur inter ab , bc . media be : fiatq; ut eb ad ba , ita quantitas aquæ data d ad aliam quantitatem; quæ ingesta omninò vas replebit vsq; ad signum a , neq; illud excedet. Quod cum multis alijs huius generis facile demonstratur ex præcedentibus.

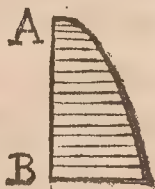


A Quarum fluentium (quæ tamen aliquo vase excipi possint) proportionem dicere, sine vlla temporis, velocitatis, sectionisq; mensura.

Sumatur ut in præcedenti figura, quodcunque uas ab , cuiuscunq; figuræ sit, ita tamen perforatum in fundo, ut minor ex datis aquis fluentibus ingesta non effluat statim tota, sed incre-scat, & aliquam altitudinem faciat in uase, puta altitudinem bc & deinde non crescat amplius; sed tantum aquæ prorsus uas emit-tat, quantum recipit. Maior uerò aquæ quantitas altitudi-nem faciat ab . Patet ex præcedentibus aquam maiorem ad minorem esse in subduplicata ratione rectæ ab ad bc . Nam cum utraque aqua transeat per eandem sectionem b , & altera earum altitudinem habeat ab altera uero cb , erunt uelocita-tes aquarum per dictam sectionem exeuntium in subduplicata ratione ab ad cb . Ergo & quantitates aquarum fluentium e-runt in subduplicata ratione factarum altitudinum ab , bc .

Lemma.

Sit diameter alicuius parabolæ ab , & mobile ali-quod moueatur per ab ea lege, ut in quocunq; pun-cto lineæ ab consideretur semper impetus eius sit ut linea ordinatim ex illo puncto intra aliquam para-bolam applicata. Dico hunc motum eundem esse ac grauium naturaliter cadentium. Intelligatur enim aliquod graue moueri ex a in b motu naturaliter accelerato, & concipiatur eius momentum eiusmodi ut tam graue quam etiam mobi-le simul dimissa ex a . eodem tempore perueniant ad punctum b



¶

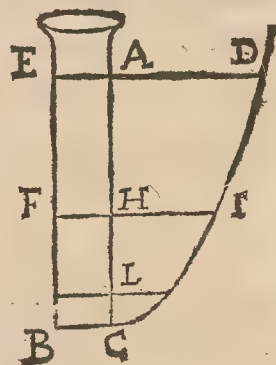
pater

patet amborum mobilium unum atq; eundem futurum esse motum, Nam in quocunq; puncto lineæ ab consideretur alterutrum dictorum siue mobile siue graue, eundem impetum habebit ac alterum, quare pariter etiam transibunt spatium ab , partesque ipsius. & hoc uerum etiam erit si mobile moueatur ex b in a , non crescente, sed decrescente impetu.

Vasa cylindrica siue Prismatica in fundo perforata ea lege exhauriuntur, ut diuiso toto tempore in partes æquales, emissio ultimi temporis sit ut unum, emissio autem penultimi temporis sit ut 3. antepenultimi temporis ut 5. & sic deinceps ut numeri impares ab unitate.

ex lem.
preced.

Sit uas ut positum est; perforatum in fundo, ipsiq; adscribatur parabola cd . Iam demonstrauimus fluente ex fundo aqua, libellam ae ita descendere ut semper uelocitas ipsius sit ut linea sibi respondens in parabola, nempe impetus in ea , sit ut ad , in fb sit ut bi , & sic semper; erit ergo motus libellæ ae tamquam motus deficiens grauium sursum reflexorum, siue proiectorum; & diuiso



toto tempore emissionis in partes æquales, erit spatium ic decursum à libella ultimo tempore, ut unum; spatium autem hi ut tres, & ha ut quinque. Nam, ex lemmate præmissio, motus libellæ ae est tamquam motus grauium non cadentium, sed sursum perpendiculariter proiectorum (quod idem est) ergo motus libellæ ae eadem spatia transibit temporibus equalibus, atq; graue aliquod sursum proiectum, nempe ultimo tempore unum, penultimo tria; & sic deinceps.

Si fiat uas conoidale parabolicum cuius axis sit ab , & perforatum sit in fundo b uideri poterit emissio eius eiusmodi ut motus supremae superficiei descendens, æqualis sit: hoc est ut equalibus temporibus æquales altitudine moles exhauriantur; quod tamen falsum est. Sunt enim conoidea parabolica

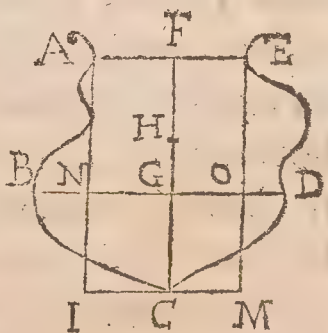


inter

inter se ut quadrata axium, siue altitudinum. Si ergo diuidamus totam ab in partes æquales, erit conoides cb ut unum, & db ut quatuor; ipsumq; eb ut 9. & sic deinceps semper ut numeri quadrati. Erunt ergo conoides cb ut unum, differentia autem cd ut tria, de ut 5. ef , ut 7. & sic deinceps differentia erunt ut numeri ab unitate impares. Quare uidebitur alicui quod singula huiusmodi differentia equalibus temporibus exauriri debeant per iā demonstrata in præcedenti; sed quoniam in huiusmodi uacuatione plurimi refert cuius figura sit ipsum uas, absolutè falsum hoc esse pronuntiamus; demonstrationemq. unus quisq. colligere poterit ex his quæ sequuntur.

ESto uas irregulare $abcde$ perforatum in fundo foramine c ; & considerentur duæ ipsius sectiones ae , bd . Dico uelocitatem summæ superficiæ aquæ descendenti, quando erit ae , ad uelocitatem superficiæ, quando erit bd , rationem habere compositam ex ratione subduplicata altitudinū fc ad cg , & reciproca sectionum, nempe sectionis bd ad ae . Concipiatur enim super basi sectionis ae quæcunq. illa sit, uas prismaticum aim cuius altitudo sit fc . Iam uelocitas sectionis prismaticæ ae ad no erit ut recta fc ad ch mediam inter altitudines. Uelocitas uerò sectionis no ad uelocitatem sectionis bd , cum eandem altitudinem habeant, est reciprocè ut sectio bd ad no . Ergo patet quòd ratio uelocitatis sectionis ae ad uelocitatem sectionis bd componitur ex ratione rectæ fc ad ch , & ex ratione sectionis bd ad no , siue bd ad ae .

Hinc manifestum est quod nuper de Conoide parabolico dicebamus, nempe motum supremæ superficiæ descendenti non esse æquabilem sed subinde acceleratum. Qua uerò ratione acceleretur; & qua ratione uariantur uelocitates supremæ superficiæ aquæ descendenti in sphaera perforata, sphæroide, atq. alijs uasibus regularibus, facile ex contēplatione præcedenti patebit.



D E T A B V L I S.

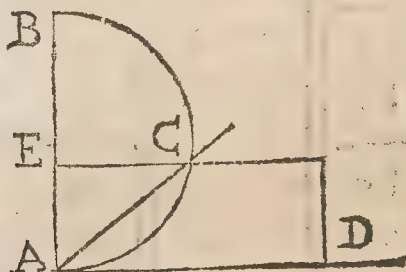
S Equuntur Tabulæ non quidem doctis calculi vigilijs elaboratæ, vt à Galileo factum est, sed ex ipsa Tabula sinuū ac Tangentium facili breuiq; negotio transcriptæ. Quocunq; tamen modo collectæ fuerint, non minus augent Galilei gloriam, quàm laborem nostrum comminuerint. Cuius enim industriæ tanta solertia est, vt per innumeras multiplicationum, diuisionum, & radicum ambages, adeo sdem pene numeros appellere potuerit, quos ex Tabula desumere nobis concessum fuit? Prædictum hoc volo, nos supponere voluisse eandem maximam amplitudinem semiparabolarum cum Galileo partium 10000. item maximam altitudinem partium 10000. vt eedem omnino Tabulæ euaderent, & aliqua interdum differentia inter illius numeros & nostros appareret. Ideo in solum laborem bissectionum incidimus. Si verò suppositionem variare, hoc est numerum hunc duplum 20000. supponere voluissemus, tunc integræ Tabulæ diuersę quidem euassissent à Galilei Tabulis, sed numeri poterant sine vlla bissectione ex finibus, & Tangentibus prout ibi leguntur mutuari.

*Tabula continens Amplitudines. Semiparabolarum ab eodem impetu
factarum. Supposita maxima amplitudine partium 10000. Sunt au-
tem numeri Tabulae sinu recti arcuum eleuationis duplorum.*

GRAD. Eleuat.	Amplitudo semipar.	GRAD. Eleuat.	GRAD. Eleuat.	Amplitudo Semipar.	GRAD. Eleuat.
0	0000	90	23	7193	67
1	349	89	24	7431	66
2	698	88	25	7660	65
3	1045	87	26	7880	64
4	1392	86	27	8090	63
5	1736	85	28	8290	62
6	2079	84	29	8480	61
7	2419	83	30	8660	60
8	2756	82	31	8829	59
9	3090	81	32	8988	58
10	3420	80	33	9135	57
11	3746	79	34	9272	56
12	4067	78	35	9397	55
13	4384	77	36	9511	54
14	4695	76	37	9613	53
15	5000	75	38	9703	52
16	5299	74	39	9781	51
17	5592	73	40	9848	50
18	5870	72	41	9903	49
19	6157	71	42	9945	48
20	6428	70	43	9976	47
21	6691	69	44	9994	46
22	6947	68	45	10000	45

Declaratio præcedentis Tabulæ.

Posuius maximam amplitudinem, hoc est basim semiparabolæ ad eleuationem grad. 45. factæ esse partium 10000. (quot quadrantes passuum geometricorum prorsus exæquat max. semiactus machinarum quas appellant *Colubrine da 30.*) Manifestum ergo est si ponamus (in figura propof. 9. proietorum) *ab* esse partium 10000. tunc amplitudinem maximam semiparabolæ esse partium 10000. (demonstrata enim est amplitudo parabolæ maximæ dupla ipsius *ab*, ergo amplitudo semi-parabolæ maximæ æqualis erit ipsi *ab*.)



Ponamus igitur *ab* partium 10000. & datus sit angulus eleuationis *dac* gr. 40. quæritur dupla ipsius *ec* (nempe amplitudo semiparabolæ) quanta sit respectu ipsius *ab*.

Dato angulo *dac* datur arcus *ac* anguli duplus nempe gr. 80. Ergò datur *ce* 9848. sinus arcus *ac*, sed respectu semidiametri, quæ sit partium 10000. Datur ergo etiam longitudo quæsita *ad*, dupla ipsius *ec*, ab eodem numero 9848. respectu ipsius *ab* partium 10000,

Praxis.

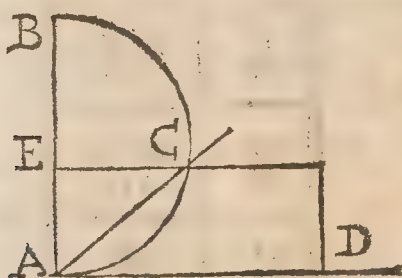
Duplicetur eleuatio, eiusq. sinus rectus accipiatur; & sic numeros Tabulæ habebis, qui longitudines, siue amplitudines semiparabolarum metiuntur,

*Tabula continens Altitudines semiparabolarū quarū impetus idē sit cū impetu
 pracedentis Tabula. Supponitur maxima altitudo part. 10000. Sunt autem
 numeri Tabula semisses sinuum versorum arcuum elevationis duplorum.*

GRAD Eleuat.	ALTIT. semipar.	GRAD Eleuat.	ALTIT. Semipar.	GRAD Eleuat.	ALTIT. Semipar.
1	3	31	2653	61	7650
2	12	32	2808	62	7796
3	27	33	2966	63	7939
4	49	34	3127	64	8078
5	76	35	3290	65	8214
6	109	36	3455	66	8346
7	149	37	3622	67	8473
8	194	38	3790	68	8597
9	245	39	3960	69	8716
10	302	40	4132	70	8830
11	364	41	4304	71	8940
12	432	42	4477	72	9045
13	506	43	4651	73	9145
14	585	44	4826	74	9240
15	670	45	5000	75	9330
16	760	46	5174	76	9415
17	855	47	5349	77	9494
18	955	48	5523	78	9568
19	1060	49	5696	79	9636
20	1170	50	5868	80	9698
21	1284	51	6040	81	9755
22	1403	52	6210	82	9806
23	1527	53	6378	83	9851
24	1654	54	6545	84	9891
25	1786	55	6710	85	9924
26	1922	56	6873	86	9951
27	2061	57	7034	87	9973
28	2204	58	7192	88	9988
29	2350	59	7347	89	9997
30	2500	60	7500	90	10000

Explanatio præcedentis Tabule.

Ponimus maximam altitudinem omnium projectionum ab eodem impetu factarum esse partium 10000. Ponimus ergo in subiecta figura lineam ab esse 10000. partium. Dato deinde angulo dac eleuationis gr. 40. queritur quanta sit altitudo ae respectu ipsius ab quæ est 10000.



Datur quidem ae 8264. ex Tabula sinuum, cum sit sinus versus arcus ac gr. 80. qui arcus duplus est anguli eleuationis dac . Sed datus numerus rectæ ae 8264. erit respectu semidiametri, quæ sit partium 10000. Cum verò nos ponamus totam diametrum ab esse partium 10000. tunc ae erit 4132. hoc est tantummodo semissis illius numeri ex Tabula sinuum versorum excerpti.

Praxis.

Duplicetur data eleuatio; illiusq. sinus versi semissis accipiantur; & sic habebis numeros Tabulæ præcedentis, qui altitudines parabolæ, siue projectionum metiuntur.

Declaratio Sequentis Tabula.

Ponimus *ab* amplitudinem omniū
semiparabolarū esse partiū 10000
Data iam eleuatione *cad* gr. 30. iuxta
quam dirigendum est tormentum. Quæ
ritur parabolæ *ab* Altitudo, & sublimi
tas.

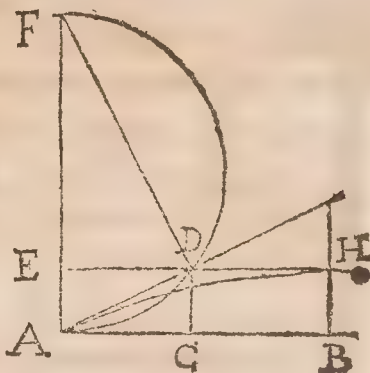
Secetur ab bifariam in c , erigatur
que ad angulos rectos cd . Fiatq. angu-
lus adf rectus. Manifestum est circa dia-
metrum af describi semicirculum qui transeat per d cum
rectus sit angulus ad d donec concurrat cum directione ad .
Cum ergo fiat projectio cum impetu fa , & directione ad , erit
amplitudo semiparabolæ linea dupla ipsius ed , nempe ipsa ab ;
altitudo verò bh , vel ae , sublimitas ef . Quæritur ergo quan-
titas linearum ae , ef .

Cum ab sit partium 10000. erit ed nempe semissis ipsius; partium 2500. semper, quæcunque sit eleuatio. Si ergo ed sit sinus totus, erit altitudo ea 5774. tangens anguli eleuationis cad , hoc est eda . Sublimitas verò ef erit 17320. tangens complementi eiusdem anguli. Hæc autem vera sunt quando ed sit 10000. sed quia in casu nostro ed est tantummodo partium 2500, nempe semissis sinus totius, erunt ea , ef semisses dictarum tangentium; hoc est altitudo ae 2887. ipsa verò sublimitas ef 8660. propterea tormentum illud, quod eleuabitur gr. 30. ad hoc vt faciat amplitudinem semiparabolę partium 10000. debeat habere sublimitatem, siue impetū 8660. Quod quidem idem est, ac si diceremus quòd impetus projectionis tantus esse debet, quantus est grauis alicuius naturalitèr cadentis ab altitudine 8660. earundem partium. Altitudo verò talis parabolę erit 2887.

Praxis.

Pro altitudine, fume semissem tangentis anguli eleuationis.

Pro sublimitate, fume semissem tangentis complementi anguli eleuationis. Dd Tabu-



Tabula continens Altitudines, & sublimitates Semiparabolarum quarum amplitudines æquales sint. Partium scilicet semper 10000. Sunt

GRAD. Eleuat.	ALT IV- DO	SVBLIMI- TAS
0	00	infinita
1	87	286450
2	175	143186
3	262	95406
4	350	71503
5	437	57150
6	525	47572
7	614	40722
8	703	35577
9	792	31569
10	882	28356
11	972	25723
12	1063	23523
13	1154	21657
14	1247	20054
15	1340	18660
16	1434	17437
17	1529	16354
18	1625	15388
19	1722	14521
20	1820	13737
21	1919	13025
22	2020	12375

GRAD. Eleuat.	ALT IV- DO	SVBLIMI- TAS
23	2122	11779
24	2226	11230
25	2332	10723
26	2439	10252
27	2548	9813
28	2659	9404
29	2772	9020
30	2887	8660
31	3004	8321
32	3124	8002
33	3247	7699
34	3373	7413
35	3501	7141
36	3633	6882
37	3768	6635
38	3906	6400
39	4049	6175
40	4196	5959
41	4346	5752
42	4502	5553
43	4663	5362
44	4828	5178
45	5000	5000

*autem, Altitudines semisses tangentium angulorum eleuationis At Sub
limitates sunt semisses Tangentium complementorum eleuationis.*

GRAD. Eleuar.	ALTI- TVDO.	SVBLI MIT.
46	5178	4828
47	5362	4663
48	5553	4502
49	5752	4346
50	5959	4196
51	6175	4049
52	6400	3906
53	6635	3768
54	6882	3633
55	7141	3501
56	7413	3373
57	7699	3247
58	8002	3124
59	8321	3004
60	8660	2887
61	9021	2772
62	9404	2659
63	9813	2548
64	10252	2439
65	10723	2332
66	11230	2226
67	11779	2122
68	12375	2020

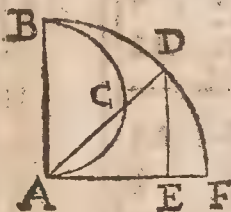
GRAD. Eleuar.	ALTI- TVDO.	SVBLI MIT.
69	13025	1919
70	13737	1820
71	14521	1722
72	15388	1625
73	16354	1529
74	17437	1434
75	18660	1340
76	20054	1247
77	21657	1154
78	23523	1063
79	25723	972
80	28356	882
81	31569	792
82	35577	703
83	40722	614
84	47572	525
85	57150	437
86	71503	350
87	95406	262
88	143186	175
89	286450	87
90	<i>Infinita.</i>	00

*Tabula continens durationes, siue impetus ad horizontem comparatos projectionum ab eodem impetu factarum. Supponitur maxima duratio, siue impetus maximus esse 10000. Sunt autem numeri
Tabula sinus recti eleuationum.*

GRAD Eleuat.	Duratio siue Imp.	GRAD Eleuat.	Duratio siue Imp.	GRAD Eleuat.	Duratio vel Imp.
1	75	31	5150	61	8746
2	349	32	5299	62	8892
3	523	33	5446	63	8910
4	698	34	5592	64	8988
5	872	35	5736	65	9063
6	1045	36	5878	66	9135
7	1219	37	6018	67	9205
8	1392	38	6157	68	9272
9	1564	39	6293	69	9336
10	1736	40	6428	70	9397
11	1908	41	6561	71	9455
12	2079	42	6691	72	9510
13	2250	43	6820	73	9563
14	2419	44	6947	74	9613
15	2588	45	7071	75	9659
16	2756	46	7193	76	9703
17	2924	47	7314	77	9744
18	3090	48	7431	78	9781
19	3256	49	7547	79	9816
20	3420	50	7660	80	9848
21	3584	51	7771	81	9878
22	3746	52	7880	82	9903
23	3907	53	7986	83	9925
24	4067	54	8090	84	9945
25	4226	55	8192	85	9962
26	4384	56	8290	86	9976
27	4540	57	8387	87	9986
28	4695	58	8480	88	9994
29	4848	59	8572	89	9998
30	5000	60	8660	90	10000

Expositio præcedentis Tabule.

IVxtà ea, quæ demonstrata sunt in propositionibus 18. & 21. Projectorum, quando ab fuerit maxima duratio, siue maximus impetus ad horizontem comparatus, erit ac intercepta in semicirculo, duratio, siue impetus eleuationis ac . ad horizontem comparatus.



Supponimus ab esse partium 10000. nempe sinum totum. & dato angulo eleuationis eac gr. 30. quærimus ac .

Manifestum est, facto quadrante bdf , quando ab fuerit sinus totus, tunc ca esse sinum rectum eleuationis, hoc est anguli eac , quandoquidem ca equalis est ipsi de . Vt ostendimus in præcedenti libello. Ergo cum df arcus sit gr. 30. erit recta de , siue ac , 5000. respectu ipsius ab quæ est 10000. Hoc autem significat, quòd impetus grauis naturaliter cadentis ex b in a ad impetum parabolæ in extremo puncto (dummodo ad horizontem tantum comparatur) erit vt 10000. ad 5000. Duratio verò, siue tempus lationis naturalis per perpendiculũ ba ad tempus, siue durationem parabolæ erit vt eadem ba ad ac , nempe vt 10000. ad 5000.

Praxis.

Sume ipsos sinus rectos eleuationũ, & habebis numeros Tabule, exhibentes durationes, & impetus parabolarum ad horizontem comparatos.

Tabula continens Gradus eleuatinis aquæ debet adhiberi, vt Amplitudo projectionis fiat data mensura.

Spatia .	GRAD. Eleuat.		Complemen.	n	Spatia .	GRAD. Eleuat.		Complemen.
10	17	89. 43			260	7. 32	82. 28	
20	34	89. 26			270	7. 50	82. 10	
30	52	89. 8			280	8. 8	81. 52	
40	1. 9	88. 51			290	8. 26	81. 34	
50	1. 26	88. 34			300	8. 44	81. 16	
60	1. 43	88. 17			310	9. 2	80. 58	
70	2. 0	88. 0			320	9. 20	80. 40	
80	2. 18	87. 42			330	9. 38	80. 22	
90	2. 35	87. 25			340	9. 56	80. 4	
100	2. 52	87. 8			350	10. 14	79. 46	
110	3. 9	86. 51			360	10. 33	79. 27	
120	3. 27	86. 33			370	10. 51	79. 9	
130	3. 44	86. 16			380	11. 10	78. 50	
140	4. 1	85. 59			390	11. 29	78. 31	
150	4. 19	85. 41			400	11. 47	78. 13	
160	4. 36	85. 24			410	12. 6	77. 54	
170	4. 54	85. 6			420	12. 25	77. 35	
180	5. 11	84. 49			430	12. 44	77. 16	
190	5. 29	84. 31			440	13. 3	76. 57	
200	5. 46	84. 14			450	13. 22	76. 38	
210	6. 4	83. 56			460	13. 42	76. 18	
220	6. 21	83. 39			470	14. 1	75. 59	
230	6. 39	83. 21			480	14. 21	75. 39	
240	6. 57	83. 3			490	14. 40	75. 20	
250	7. 14	82. 46			500	15. 0	75. 00	

Spatia sine incrementa projectionum equalia.

Supponimus projectiones omnes eundem impetum habere, hoc est, esse
eiusdem machinae. & maximam projectionem ponimus part. 4000.

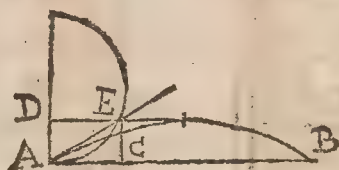
Spatia sine incrementa projectionum aequalium.

Spatia.	GRAD. Eleuar.	Comple- men.
510	15. 20	74. 40
520	15. 40	74. 20
530	16. 0	74. 0
540	16. 21	73. 39
550	16. 41	73. 19
560	17. 2	72. 58
570	17. 23	72. 37
580	17. 44	72. 16
590	18. 5	71. 55
600	18. 26	71. 34
610	18. 48	71. 12
620	19. 10	70. 50
630	19. 32	70. 26
640	19. 54	69. 6
650	20. 16	69. 44
660	20. 39	69. 21
670	21. 2	68. 58
680	21. 25	68. 35
690	21. 49	68. 21
700	22. 13	67. 47
710	22. 37	67. 23
720	23. 2.	66. 58
730	23. 27	66. 33
740	23. 52	66. 8
750	24. 18	65. 42

Spatia.	GRAD. Eleuar.	Comple- men.
760	24. 44	65. 16
770	25. 11	64. 49
780	25. 38	64. 22
790	26. 6	63. 54
800	26. 34	63. 26
810	27. 3	62. 57
820	27. 33	62. 27
830	28. 3	61. 57
840	28. 34	61. 26
850	29. 6	60. 54
860	29. 39	60. 21
870	30. 14	59. 46
880	30. 50	59. 10
890	31. 27	58. 33
900	32. 5	57. 55
910	32. 45	57. 15
920	33. 28	56. 32
930	34. 13	55. 47
940	35. 2	54. 58
950	35. 54	54. 6
960	36. 52	53. 8
970	37. 58	52. 2
980	39. 16	50. 44
990	40. 57	49. 3
1000	45. 00	45. 00

Explicatio præcedentis Tabula.

DVM supponitur maxima proiectio esse partium 4000. tunc supponitur quarta ipsius pars, hoc est semidiameter circuli Propositionis 9. proietorum esse 1000. qui numerus supponitur etiam pro sinu toto in Tabula sinuum.



Quando ergo data erit futura amplitudo ab partiū 2120. (que maior non sit numero 4000.) dabitur etiam ac 530. ipsius ab quarta pars, hoc est de erit 530. Ergo ex Tabulis sinuum habebitur quantitas arcus ae gr. 32. cuius semissis gr. 16. erit mensura anguli cae . Nempe eleuatio quæsitæ, iuxta quam fiet proposita amplitudo ab partium 2120. talium qualium maxima proiectio integra sit 4000.

Praxis pro construenda Tabula; & ad hoc ut quiuis per solas sinuum tabulas probl. soluere possit.

Datæ futuræ Amplitudinis quartam partem sume. hanc in tabula sinuum quære, arcumq. ipsi respondentem bifariam secæ. Sic habebis eleuationem, quæ amplitudinem quæsitam facit. Sed fusius hæc in sequentibus explicabimus.

Vso della præcedente Tauola .

Supponiamo che il massimo tiro, cioè il tiro fatto all' eleuazione del sesto punto della squadra da una colubrina sia per esempio 4000. passi geometrici . Voglio fare con la medesima un tiro di maniera tale, che riesca per appunto lungo passi 2360. Piglio la quarta parte di 2360. la quale è 590. e guardo su la tauola, e vedo dirimpetto ad esso numero la eleuazione da darsi à detto pezzo esser gradi 18. e minuti 5. ouero gradi 71. e minuti 55. suo complemento. E dico per le cose dimostrate, che il sudetto pezzo con una di queste due eleuazioni tirerà la palla lontano passi 2360. sopra l'orizzonte . Se bene quelle eleuazioni, le quali passano il sesto punto della squadra, non si pongono per l'artiglierie, ma solamente per l'uso de' mortari, o trabocchi, o saltamartini . Dene però auuertirsi che con quella prima eleuazione la palla farà una strada bassa, ma veloce, come la linea segnata a, e con impeto grande orizzontale opportuno per sfondare muraglie, o dare altro impulso laterale . Ma con l'altra eleuazione farà la strada b, la quale sarà pigra di moto orizzontale, ma con assai impeto perpendicolare nel fine, oportuno per sfondare volte, tetti, e far altre passate perpendicolari all'orizzonte; ouero per gettar robbe in un certo determinato segno, come sarebbero sacchetti imballati con corde, pieni di zolfo, o salnitro, o farina; ouero palle con lettere, & altro dentro . In somma l'una, e l'altra eleuazione, che egualmente sia distante dal sesto punto porterà la palla nello stesso luogo, però con la prima, e minor' eleuazione caderà in terra (come essi dicono) Di striscio; e con la seconda e maggior' eleuazione batterà quasi perpendicolare .



Sò che rarissime volte, e forsi anco mai s'incontrerà che il massimo tiro d'un'artiglieria sia per appunto que' passi 4000. come par che si supponga nel calcolo della Tauola nostra, & anco in quelle del Sig. Galileo. però la detta Tauola potrebbe parere innu-

E e

rile.

la lunghezza del tiro casuale agb . viene ad esser data anco la linea ad , la quale è la metà del massimo tiro, conforme si è dimostrato nell'ultimo Corollario della Proposizione 9. de proietti.

Essendo dato l'angolo della eleuazione cab , gr. 30. sarà il triangolo rettangolo ead dato in spezie: e perche è data la ab in passi, farà data la ae . quarta parte di essa, cioè 600. passi. Opereremo dunque così per trouar la quantità di ad . per via di calcolo, e de i seni.

Facciasi. Come il seno retto 86602. dell'angolo ace gr. 60. cioè del supplemento della eleuazione, all'arco ae , che è 600. Così il seno totale 100000. ad vn quarto numero 693. E così la hipotenufa ac farà passi 693. Ma per che anco il triangolo rettangolo acd è dato in spezie, facciasi di nuouo. Come il seno retto 50000. dell'angolo adc , il quale è eguale all'angolo dato della eleuazione ead , alla retta ac che si trouò 693. passi, così il seno totale ad vn quarto numero 1386. & così la retta cercata ad farà passi 1386. Ma perche ad essendo la linea dell'impeto, o sublimità è eguale alla metà del massimo tiro, se noi raddoppieremo 1386. verrà a farsi il numero di 2772. passi, che tanta farà la lunghezza del massimo tiro, che si cercaua di quella machina, la quale eleuata gr. 30. si trouò tirar passi 2400.

Ma con molto maggior breuità, e con vn calcolo solo potremo operare così. Pongasi che il seno totale sia cf , faranno fa , & fd le tangenti vna dell'angolo della eleuazione, l'altra del suo supplemento. Facciasi dunque. Come il seno totale, alla cf che è 600. così 230940. (che è la somma d'ambidue le sudette Tangenti) ad vn quarto numero 1386. e così la retta ad si trouerà come prima 1386. passi. la quale raddoppiata darà come sopra la misura del tiro semiretto, o massimo, come vogliam chiamarlo.

Per Corollario si può auuertire che questo è il modo di argomentare, da qualsiuoglia tiro d'un'artiglieria, quanto la medesima sia per tirare all'insu per linea perpendicolare; che sarà quanto

la linea ad . ritrouata per via del calcolo.

La stessa linea ad ci insegna da quanta altezza bisognerebbe lasciar cadere una palla d'artiglieria, acciò arriuasse in terra con il medesimo impeto, che conferisce la stessa artiglieria astraendo però sempre dall'impedimento che può apportare la corpolezza dell'aria, che sappiamo esser sensibile per variare le proporzioni dimostrate de' tiri, ma molto più per impedire questo effetto.

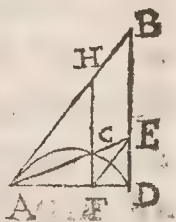
Come con le sole tauole de seni possiamo sapere la massima altezza alla quale è peruenuta per aria la palla di vn tiro. Data però l'elevazione, e lunghezza di esso tiro.

Nell'istessa precedente figura, sia dato l'angolo della eleuazione cab . e la lunghezza del tiro ab . Si cerca l'altezza massima, alla quale è peruenuta la palla per aria: E questa farà la linea ec . Prédasi pure di nuouo ac 600. passi, cioè la quarta parte di tutta la lunghezza ab . e poi facciasi. Come il seno 86602. dell'angolo ac e supplemento della eleuazione, alla ac che è 600. passi, così 50000. seno della eleuazione eac ad vn quarto numero, e troueremo 346. passi per misura dell'altezza ce , cioè della maggiore altezza alla quale sia peruenuta la palla per aria.

Dene auuertirsi, che non sempre si adoprano le artiglierie di maniera tale che la palla vada a terminare nel medesimo piano orizzontale, dal quale era partita, si come suppongono le Tauole del Galileo, e nostre. Però douendosi tirare sopra una spiaggia d'vn colle decline, ouero accline; parimente douendosi tirare dalla sommità d'una Rocca su'l piano sottoposto orizzontale, fin hora non habbiamo scienza alcuna intorno alla misura di questi tiri. Potrebbe calcolarsi la tauola, ma ciascuno s'accorgerà che douendosi quella comporre per ogni grado d'elevazione del pezzo, e poi per ogni grado d'inclinazione della spiaggia, e per ogni passo d'altezza della Rocca, il multiplico anderebbe quasi infinito.

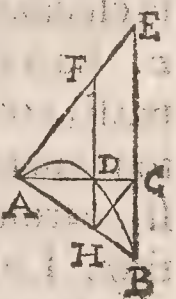
finito. Mostreremo però per regola generale il modo di calcolare i sudetti tiri quando occorrerà.

Vna tale artiglieria con la direzione ab . fa il tiro acd . sopra il piano horizontale ad . Ma io voglio tirare sopra il piano ac inclinato, e cerco quāto farà la lunghezza ac del detto tiro sopra questo piano. Si tirino bd per il punto d , & bf per il punto c . perpendicolari all'orizzonte; e si congiunga fe . quale per le cose mostrate è parallela alla ab .



Misurisi con qualche strumento l'angolo dae , cioè la eleuazione della spiaggia, e dalla Tauola delle amplitudini si troui la lunghezza del tiro orizzontale ad . Dopo questo facciasi. Come db tangente dell'angolo dell'eleuazione dell'Artiglieria, alla be , che è la differenza delle tangenti de duoi angoli dab , dae noti, essendo vno la eleuazione dell'artiglieria; l'altro la eleuazione della spiaggia sopra l'orizzonte; così da nota in passi, ad vn quarto numero; e si trouerà la retta fa in passi. Facciasi poi di nuouo. Come il seno totale, a quel trouato quarto numero che è la misura di af in passi, così ac secante dell'angolo fac , ad vn quarto, e così aueremo noto il numero de i passi, i quali misureranno la linea ac , cioè la lunghezza del tiro che farà quella tale artiglieria sopra il piano ac quando si tira all'insù.

Ma quando dal punto a bisognasse tirare giù per vna spiaggia descendente come ab . Così troueremo la quantità di ab , cioè doue vada a ferire la palla. Sia data la direzione ae , cioè, sia dato l'angolo della eleuazione del pezzo, cae , sia dato ancora l'angolo della inclinazione della spiaggia cab .

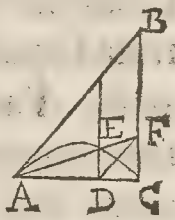


Immaginiamoci l'orizzonte ac . e tiriamo perpendicolari ad esso le be , & hdf , e congiunghiamo cb . la quale farà parallela alla ae . Hora su la tauola delle amplitudini troueremo quanti passi sia ad , ma noi cerchiamo quanto sia ab . Però facciasi il calcolo così. Come fd tangente dell'angolo della

della eleuazione dell'artiglieria, alla db tangente della inclinazione del piano, così ad nota in passi, ad vn quarto numero. Et aueremo la misura di dc in passi; e però anco tutta la ac farà nota in passi. Facciasi dunque di nuouo, Come ac seno totale, alla ac nota in passi, così ab secante dell'angolo cab ad vn quarto numero; e farà la misura cercata della retta ab in passi; cioè la lunghezza del tiro sulla spiaggia discendente ab .

Occorre ancora spesse volte di tirare in piani perpendicolari all'orizzonte, come in muraglie di Città, o di Torri, o d'altro. Però anco in questo caso soggiungeremo il calcolo per trouar l'altezza di quel punto doue nel sudetto muro ferirà la palla.

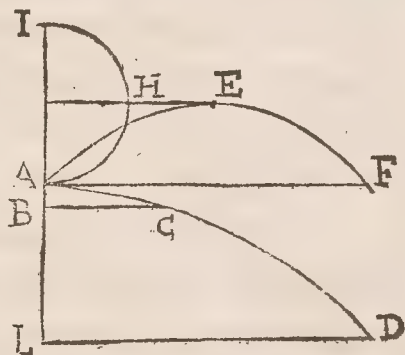
Sia la direzione del pezzo la linea ab , e l'orizzonte ac , & il muro della torre de perpendicolare all'orizzonte, e sia la distanza ad nota in passi. Immaginiamoci che la palla passi liberamente senza battere nel muro, e vada a colpire nell'orizzonte in c . la Tauola delle amplitudini dà la quantità della ac . Ma noi cerchiamo l'altezza de . Tirisi cb perpendicolare all'orizzonte, & df parallela ad ab , e poi congiungasi fa , la quale passerà per la comun sezzione della parabola, e del muro, come si può raccorre dalle cose già mostrate. Facciasi hora, come ca lunghezza del tiro orizzontale, alla cd differenza tra le linee ac , ad , già note, Così la bc tangente dell'angolo della eleuazione dell'artiglieria, alla cf tangente dell'angolo fac . Facciasi di nuouo. Come il seno totale, alla ad nota in passi, così la già trouata tangente dell'angolo fac , ad vn quarto numero; il quale farà la cercata misura della retta de in passi, e troueremo il punto e , nel quale anderebbe a ferire quel tiro. Lo stesso calcolo si può anco ridurre quando il muro de non sia perpendicolare, ma a scarpa, come quelli delle moderne fortezze; ma dubitando di apportar più tedio, che utile lascierò la cura di ciò a quel Geometra che se ne curerà.



Le amplitudini delle parabole, delle quali tratta il Galileo, & anco noi, suppongono che il tiro non termini su'l piano della campagna,

pagna, ma in quel piano horizontale, che passa per la bocca del pezzo. Questo non sarà vero, se non quando l'artiglieria si mettesse con le ruote in una fossa, sì che la bocca venisse per appunto nel liello della campagna: Ma per che ciò non si costuma, e per che i tiri vanno a terminare nell'orizzonte, che tocca l'infimo punto delle ruote, cercheremo Geometricamente quanto possa prolungarsi un tiro liellato, o vogliam dire orizzontale, per cagione dell'altezza della bocca del pezzo sopra il piano della campagna. Pare che il semidiametro delle ruote, e la grossezza del metallo cagionino che la bocca dell'artiglierie ordinarie venga alta sopra il sito orizzontale intorno a

due braccia. Suppongasi dunque in a la bocca d'una colubrina, e sia l'orizzonte bc. altezza della bocca sia la retta ab supposta 2. braccia, & la parabola acd sia il tiro liellato; si cerca la retta bc. Sia il tiro semiretto, o massimo della medesima artiglieria, la parabola aef, e pongasi



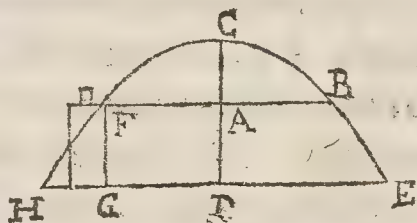
che af sia 5000 passi Geometrici, cioè 15000. braccia Fiorentine. Facciasi il semicircolo solito della Proposizione 9. ahi. & prodotta al eguale alla ai, si applichi ld. Per le cose mostrate sarà la retta ai impeto della parabola aef, ouero della acd (perche sono della medesima machina) però al sarà la quarta parte del lato retto della parabola acd. adunque ld sarà doppia di la; ma anche af si mostrò già doppia di ai, però sono eguali ld, & af; & vengono ad esser date tre linee, cioè la 7500 ld 15000, & ab 2. Dunque se noi faremo per la regola del tre. Come la retta la ad ab note, così il quadrato della retta ld ad un altro nu. troueremo 60000 il quale sarà il quad. della retta bc; e cauatane la radice quadra, troueremo che la retta bc sarà 245. braccia. Concludasi dunque che quella machina, la quale fa il massimo tiro di 15000. braccia, se hauerà la bocca sollevata due braccia sopra l'orizzonte, farà il tiro liellato, cioè con niente d'elevatione, lungo in ogni modo braccia 245.

Quan-

Quanto poi possa prolungarsi qualunque altro tiro, non orizzontale, ma inclinato in su, ouero in giù, per cagione dell' altezza delle ruote, o d' un bastione, o d' una Rocca, o di qualunque altro sito, che la sollevi sopra il piano horizontale, si cercherà in questo modo.

E certo che douendosi tirare dalla cima d' una Rocca, ouero di un castello posto in cima d' un sasso, o da qualunque luogo alto su' l' piano orizzontale della campagna sottoposta, i tiri riusciranno assai più lunghi che i notati sopra la tauola delle amplitudini; e questa differenza sarà maggiore tanto più quanto più alta sarà la situazione dell' artiglieria sopra quel piano orizzontale nel quale deuono ferir le palle, e terminare i tiri.

Sia l' altezza della Rocca, o d' altro luogo gf . e debbasi dal punto f . tirare sopra il piano della campagna ge . Immaginiamoci l' orizzonte fb , e fatto il tiro $fc b$ e con qualunque eleuazione, si cerca la misura di ge .



Dalla Tauola delle amplitudini si trouerà la quantità di ab e dalla Tauola delle altezze si trouerà la ac . altezza della parabola. La pratica poi del calcolo si potrà fare in più modi.

Quadretur numerus ab ; quadratusq; diuidatur per ac , & quotus erit latus rectum parabola $fc b$. Ducatur deinde quotus iam dictus, in cd , & producti radix quadrata dabit de .

Ouero potremo operare così.

Ducantur simul numeri dc, ca , & producti radix quadrata erit medio loco proportionalis inter dc, ca . Fiat ut ca . ad prædictam radicem, ita ab ad alium numerum. & quartus numerus erit iterum de .

Ouero finalmente a questo modo,

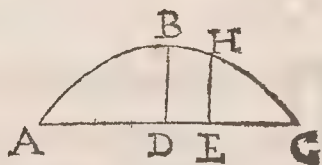
Fiat ut numerus ca . altitudo parabole ex tabula. Ad numerum cd altitud. parabole & arcis simul, Ita ab . semiamplitudo parabola ex Tabula, Ad alium quartum numerum.

Sumatur deinde numerus medio loco proportionalis inter dictum

*quartum numerum, & inter a b, quia medius ille proportiona-
lis exhibebit ipsum d e. Et cum d g equalis ipsi a b nota sit,
erit tota g e nota.*

Ma potrebbe soggiungere alcuno che dalla sommità *g* più spesso forsi occorrerà tirare con l'artiglieria inchinata all'ingiù che all'insù, però sarebbe necessario sapere per regola Geometrica la lunghezza de' tiri, il che si auerà in questo modo, Sia il tiro da farsi all'ingiù il segnato *fb* con qualunque angolo d'inclinazione sotto l'orizzonte, si cerca *gh*. fingasi con l'immaginazione che il tiro abia da farsi sopra l'orizzonte con la medesima inclinazione per l'appunto, & per le regole precedenti si troui la quantità di *de* come sopra, ouero di *dh*, dalla quale se leueremo la già nota *fa*, ouero *dg* rimarrà nota la quantità cercata *gh*.

Ma se data la eleuazione gr. 40. del tiro *abc*, e la base *ac* 1600. passi noi volessimo sapere tutte le diuerse altezze del transito della palla sopra qualunque punto della linea *ac*. Faremo così. Diuisa per mezzo la *ac*, &alzata *db*. questa sarà l'altezza suprema, e si trouerà su la Tauola delle altezze, e delle amplitudini, operando in questo modo. Nella tauola delle amplitudini dirimpetto alli gradi 40. di eleuazione trouo la linea *ad* essere parti 9848. ma nella Tauola delle altezze trouo la linea *bd* essere parti 4132. Poi per la regola del tre, dico. Se *ad* 9848. mi dà passi 800. conforme alla supposizione; *db* che è parti 4132. quanti passi darà? e ritrouo che la retta *bd* è passi 336. Sia ora proposto qualunque punto *e* sopra di cui si vuole saper l'altezza del transito della palla, cioè la linea *eh*. Suppongasi che la retta *ae* sia 1000, & la *ec* 600. e facciasi di nuouo la regola del tre in questo modo. Se il numero quadrato di *ad*, che è 640000. Mi dà il numero rettangolo delle rette *ae*, *ec*. che è 600000, Il numero *bd*, che fu trouato 336. che mi darà? E ritrouo 315 passi adunque l'altezza della parabola sopra il punto *e* fu passi 315. Che è quello che si cercaua.



Basterà l'auer' accennato questo poco per il calcolo di alcune varietà le quali possono occorrere intorno a questi tiri. Potranno porsi altri casi simili a questi, e particolarmente i conuersi loro, ma dalla intelligenza di questi si possono facilmente dedurre quelli, e l'ingegno di qualunque Geometra applicandoui trouerà minor difficoltà nello sciorre molti di questi problemi da se medesimo, che nel passare le lunghezze, & le oscurità delle nostre esplicazioni. Però passeremo alla fabbrica della squadra, la quale pare veramente appropriata, anzi fatta dalla natura a posta per misurar scientificamente, & Geometricamente i tiri de proietti.

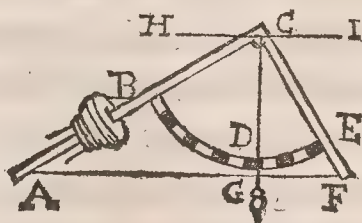
DELLA SQUADRA.

R Iducati ora in pratica, e sciogasi per mezzo di vno strumento alcune delle già dimostrate proposizioni. Fabbricheremo vna squadra militare, la quale con certezza inuaria-
bile insegni (almeno alli Filosofi Geometri, se non a' Bombardieri pratici) quanta eleuazione debba darsi a qualsiuoglia machina, acciò la lunghezza del tiro riesca della proposta misura. Sciorremo anco per mezzo d'essa tutti i Problemi, che sopra il tirar delle artiglierie si possono formare; quali già furono promessi dal Tartaglia, e poi ridotti in Tauole dal Galileo, cò alcun'altro di più. Si accorse l'industria militare, che l'vso di vna machina tanto nobile, e di tanta conseguenza, quanto è l'artiglieria, farebbe stato troppo ristretto, & di poco beneficio, se quella non si fosse potuta adoperare se non dentro a quella poca distanza, ch'ella tira di punto in bianco, o vogliam dire di mira senza dargli con la squadra aiuto vantaggioso di alcuna eleuazione. Fù però pensato come si potesse fare, acciò con quel medesimo pezzo, il quale per se stesso non tiraua più che 200. ouero 250. passi Geometrici si potesse tirarne e 400. & anco 600. e più, e più, sino alla lunghezza del massimo tiro, che possa farsi da quel tale pezzo. L'inuentione fu questa; Co-
min-

minciarono ad aiutare il pezzo con l'eleuazione; cioè non lo dirizzauano a dirittura verso l'oggetto in che doueua colpire, ma tenendolo nello stesso verticale dell'oggetto, lo eleuauano sopra quella linea retta, la quale vada dal pezzo all'oggetto: e ciò faceuano ora più, & ora meno, conforme che la sforzatura del tiro doueua essere maggiore, o minore. Artificio che fino dal principio del mondo è stato noto anco a i putti inesperti. Vediamo che douendo essi con vna palla di neue, o d'altro, colpire in vn segno vicinissimo, la scagliano a dirittura verso esso segno; ma douendo poi giuocare a chi tira più lontano, ouero fare a sassi tra di loro, non tirano già orizzontalmente, ne a dirittura verso i loro contrarij, ma volgendo i colpi a mezz'aria, senza auer fatto altra speculazione, tirano tutti all'eleuazione del quinto, & anco del sesto punto della squadra militare a loro ignota. I Bombardieri poi ebbero col progresso del tempo vno strumento, ilquale facilmente misura queste eleuazioni.

Fu inuentata da Niccolò Tartaglia Bresciano Matematico insigne vna squadra con le gambe disuguali congiunta con il quadrante, la quale già più di cento anni è sempre stata in vso, & è ancora l'vnica regolatrice de' Bombardieri, non solo per adoprare l'artiglieria, & alzarla in quei tiri, che essi chiamano di volata, ma anco per li uellarla negli orizzontali. Diuise il Tartaglia quel quadrante in 12. parti eguali, cominciando la numerazione di esse dalla gamba minore; suddiuisa anco ciascuna di esse in altre 12. parti eguali, nominando quelle prime Punti, e queste seconde Minuti della squadra. Ponghiamo la figura della squadra, e mostriamo come essa misuri l'eleuazione del pezzo.

Sia l'anima del Cannone a b. fermo in qualche positura; Mettasi in bocca d'esso la maggior gamba della squadra ca. si che si addatti su'l fondamento di detta anima, e caschi il piombo in d. Io dico che l'angolo ecd , cioè l'arco ed , è la misura della eleuazione



Ff 2

Zione

zione del pezzo. Tirisi vna orizzontale af. faranno gl'angoli intorno al punto g, retti, ma anco l'angolo a cf. è retto, adunque gl'angoli caf, & f cg sono eguali per l'8. del sesto. Ouero così. Tirisi per c l'orizzontale hi. Se da gli angoli retti hcd, ace, si leuerà il comune acd, resterà l'angolo ecd della squadra eguale all'angolo dell'artiglieria sotto l'orizzonte hi, o sopra l'orizzonte af, che è lo stesso per essere alterni.

Col mezzo poi di questa squadra si è fatta dalli Bombardieri con lunghe offeruazioni vna pratica tale, ch'essi fanno quanti punti debba eleuarfi verbigratia vna Colubrina da 40. per colpire in vn segno lontano per esemplo passi 700. geometrici, o in qualunque altra distanza.

Ma vaglia il vero, le offeruazioni sono tanto fallaci; sono così pochi i Bombardieri che le abbiano fatte, e le abbiano fatte esquisitamente, che l'vso dell'artiglieria, leuatone il tiro di punto in bianco, non può auere se non pochissimo di certezza. Volendosi acquistare qualche scienza sicura intorno alla squadra ordinaria, farebbe necessario di fare l'esperienze non solo con tutte le forti di palle, e con tutte le differenze di poluere, ma in tutte le spezie de i pezzi, & anco in tutti quelli, che essendo della medesima spezie, sono differenti di grandezza, e poi a tutti i gradi delle eleuazioni possibili. Moltiplico, che quasi andrebbe in infinito, E notiamo, che conuerrebbe fare queste esperienze tutte ad vna ad vna; poiche nō è vero che per via di proporzioni si possa da tre, o quattro tiri di vn Cannone, fatti a diuersa eleuazione, argomentare alcun'altro, ne pur dello stesso Cannone caricato con la stessa poluere, e palla. Che questo sia così, si dimostra per mezzo delle Tauole poste dal Sig. Galileo, e da noi. Per esemplo. Quel Cannone che eleuato al sesto punto tira passi 4000. eleuato ad vn punto douerebbe tirar la sesta parte, & a due punti la terza, & a tre punti la metà. Ma la cosa passa molto diuersamente. Perche eleuato ad vn punto, tira 1032. in cambio di 666. che è la sesta parte del sudetto massimo tiro 4000. Al secondo punto poi (& offeruasi che con questa eleuazione l'artiglierie tira-

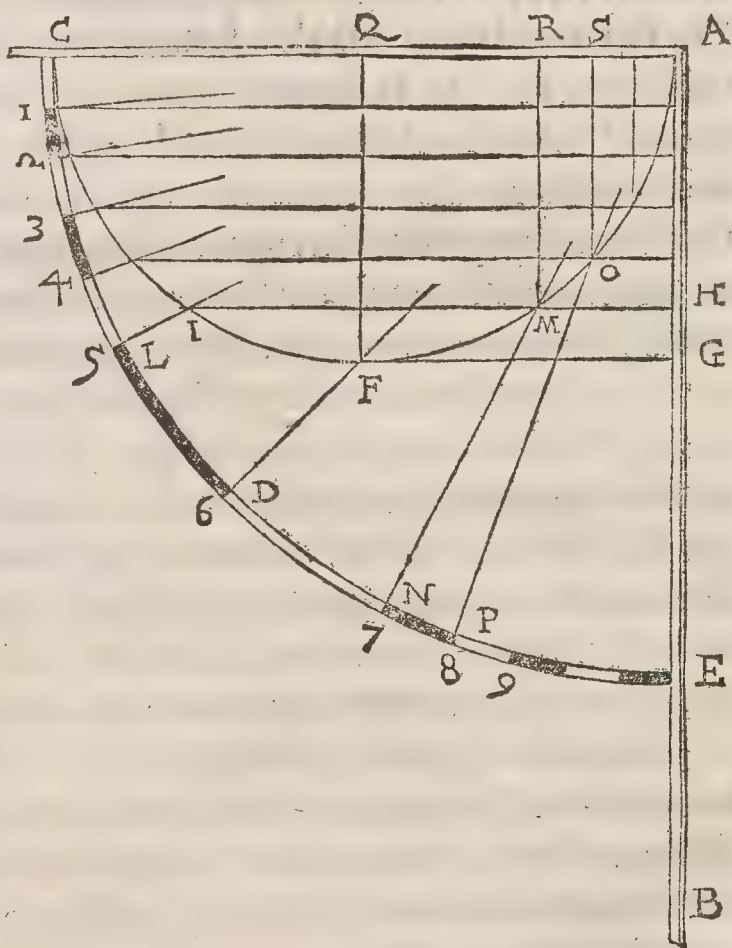
no sem-

no sempre la metà del massimo tiro) nel caso nostro tirerà 2000 in cambio di 1333. che è la terza parte. Al terzo punto tirerà 2824. in cambio di 2000. che è la metà del massimo tiro. Al quarto punto tirerà 3464. in cambio di 2666. Al quinto tirerà 3860. in cambio di 2333, che sono cinque sestî di quel massimo. Vedesi dunque come accrescendo egualmente le eleuazioni del pezzo, cioè tirando prima ad vn punto solo, poi a due, & a tre, e quattro &c. fino al sesto, gl'accrescimenti della lunghezza de i tiri non crescono egualmente, cioè con la medesima proporzione con la quale crescono le eleuazioni: Ma mentre il primo punto tira 1032. il secondo accresce sopra esso, 968. Il terzo accresce 824; il quarto 640. Il quinto 396. Il sesto 140. Per cauar dunque qualche regola dalle esperienze, era necessario il farle esattamente, a tutti i gradi della eleuazione, in tutte le forti de i pezzi, con tutte le varietà delle polueri, e le diuerse materie delle palle, e forsi anco direi che era necessario che le facesse ogni Bombardiere da se stesso. Cose quasi impossibili a ridursi sotto regole, e cauarne certezza alcuna, se la Teorica, e la Geometria non ce ne daua manifesta scienza mediante quell'vnica proposizione del Galileo, nella quale primo di tutti egli hà auuertito, & insegnato a noi, che i proietti camminano tutti per vna linea parabolica. Su questa supposizione fonderemo lo strumento promesso: se poi per l'impedimento del mezzo le parabole venghino troppo deformate, o per molti altri accidenti i tiri riescono incostantissimi, ci basterà auer sodisfatto indubitatamente alla scuola de Matematici, se non a quella de Bombardieri.

Noi auanti di porre la fabbrica della nostra squadra, quale non cōsiste in altro che nel descriuere vn solo semicircolo, diuideremo la squadra ordinaria in punti disuguali, di maniera tale che misurino non le eleuazioni del pezzo, ma le lunghezze de i tiri, che è quello di che l'vso nostro hà bisogno. Così aueremo certezza che l'artiglieria, se farà alzata ad vn punto di essa squadra, tirerà alla lunghezza d'vn' tale spazio, qualunque si sia; alzata poi a due punti raddoppierà precisamente quel

tiro; se a tre punti, tirerà tre di quei spazij, se a quattro e mezzo, tirerà quattro e mezzo: se a cinque & vn quarto, tirerà cinque & vn quarto; e così fino al sesto punto cresceranno sempre nello stesso modo, e con la stessa proporzione i punti della squadra nello strumento, e gli spazij de i tiri nella campagna, e dal sesto fino al duodecimo punto anderanno nella stessa maniera decrescendo. La costruzione, e dimostrazione e Geometrica, cauandosi dalla proposizione da noi posta al numero XI. de proietti, la quale dalla data amplitudine insegna trouar l'eleuazione. E serue comunemente per qualsiuoglia forte d'artiglieria, e di mortari, per qualunque spezie di palla, o di poluere.

Siano le gambe della squadra a b la maggiore, & a c la minore: poi fatto cētro in a facciasi il quadrante c d e. sopra il quale si hanno a notare i punti disuguali; & intorno al diametro a c. facciasi il semicircolo a f c e tirata la f g perpendicolare ad a b, e tãgente al semicircolo diuidasi a g in sei parti uguali per auere i sei punti della squadra, e poi ciascuna parte in 12. per auere i minuti (quãdo però la grandeẏ



ẏa dello stromento sarà capace di questa seconda diuisione.) Hora sia vna delle sei parti la g h. Alzisi la h m i. parallela a g f. la qua-

la quale seghi il semicircolo ne i punti m, i . Tirisi poi dal centro a la retta $a f d$, & il punto d sarà il sesto della squadra. Tirisi la $a i l$, & il punto l sarà il quinto della squadra; tirisi la $a m n$, & il punto n sarà il settimo, e così di tutti gli altri. Auvertasi però che l'operazione sarà più giusta, se dopo auer trouato i punti 1. 2. 3. &c. formeremo con la trasportazione d'essi il nono, decimo, & undecimo. I mezzi punti, i quarti, & i minuti si troueranno nello stesso modo, col diuidere in mezzo, o in quattro parti, ouero in dodici ciascuna delle porzioni della linea $a g$. con alzar le perpendicolari dalli punti delle diuisioni; segheranno dette perpendicolari il semicircolo, & per i punti delle sezioni si tireranno i semidiametri nel quadrante, che questi segheranno il quadrante ne i punti desiderati, de' mezzi punti, de' quarti, o minuti.

Hora è manifesto per la Proposizione IX. nostra, che se la linea della direzione, o vogliam dire della eleuazione del pezzo farà $a o$, ouero $a p$; la amplitudine e lunghezza del tiro farà come la quadrupla di $s o$; e se la direzione farà $a m$, ouero $a n$. il tiro farà come la quadrupla di $r m$: e quando la eleuazione fusse secondo la linea $a f d$, il tiro farà come la quadrupla di $q f$. Ma le linee $s o, r m, q f$. per la costruzione nostra egualmente si eccedono, e però anco le loro quadruple, ouero i tiri sopradetti egualmente si eccederanno l'un l'altro.

Vso della predetta diuisione, fatta nella squadra ordinaria.

Siaci proposta qualunque artiglieria, o mortaro, e con essa facciasi vna sola esperienza; cioè sia eleuata a qualunque punto, come per esemplo al quinto. Sparisi, e si misuri la lunghezza del tiro, e trouisi, verbigratia, essere 2000. parti. fatto questo possiamo sapere quanto tirerà la medesima artiglieria caricata nello stesso modo, & eleuata a qualsiuoglia punto, o minuto, che sarà facile per la regola del tre, essendo in questo strumento tanto i punti quanto la lunghezza de i tiri proporzionali. La pratica è questa. Voglio sapere quanto tira il sesto punto.

punto. Fò così; se 5. punti diedero 2000 passi quanto daranno 6. punti? e trouo 2400. passi. Dico dunque che quella artiglieria al sesto punto, cioè col massimo tiro, tirerà due mila e quattrocento di quelle parti delle quali al 5. punto ne tiraua 2000.

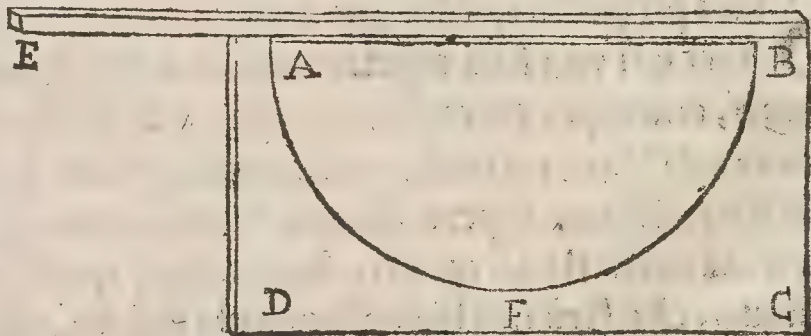
Auuertasi però che in cambio di fare questa operazione cò i punti 7. 8. 9. 10. 11. & 12. si fa con i loro complementi, i quali sono 5. 4. 3. 2. 1. & 0.

Ma se ci fusse comandato (& importa molto più) che noi eleuassimo il sudetto pezzo in tal modo, che la lunghezza del tiro douesse riuscire per esempio passi 1300. opereremo così. Se 2000. passi furono fatti da 5. punti, o per dir meglio da 60. minuti di squadra, 1300. passi da quanti minuti si faranno? ecco l'operazione 2000. 60. 1300. ? 39. E troueremo che per fare il tiro di lunghezza di passi 1300. bisognerebbe dare all'artiglieria l'eleuazione di minuti trentanoue di squadra, ouero di punti tre & vn quarto.

Modo per fabbricare la squadra nostra.

MA se noi voleffimo formare vno strumento, il quale nò solo misurasse la lunghezza de i tiri fatti a diuerse eleuazioni, ma anco l'altezza della parabola, la durazione, o tempo del viaggio, la sublimità, e l'altre cose dimostrate nel precedente libro de proietti; tutto si farà col solo, e semplice semicircolo della proposizione 9. Ma venghiamo alla costruzione.

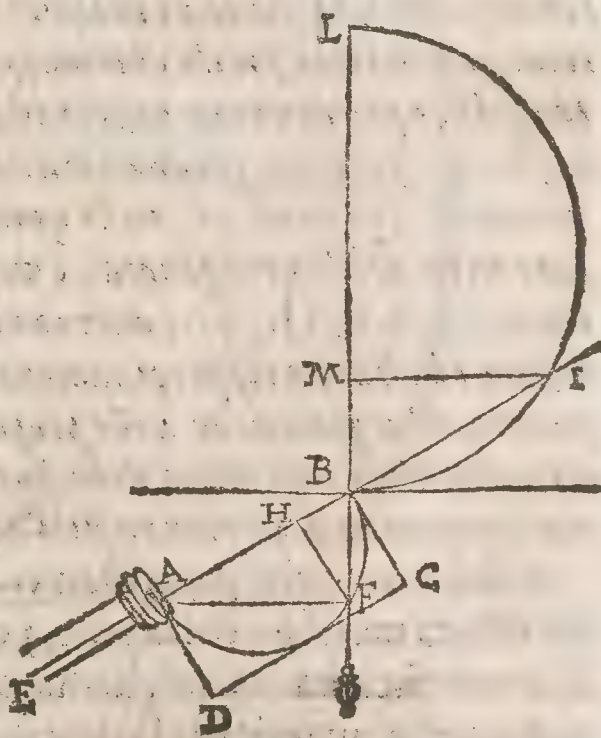
Prendasi la lamina rettangola *ab* *cd*. di ottone, o d'altra foda materia la quale habbia la gam-



ba *ae* lunga da poter mettersi in bocca del pezzo. Faccia si sopra il

pra il diametro ab vno semicircolo afb , che sarà il semicircolo della proposizione 9. de proietti, & in b pongasi il filo con il piombo, e diuidasi il semicircolo afb in 90. parti eguali, che faranno li 90. gradi del quadrante; ouero in 144. parti eguali, che faranno i punti, e minuti eguali della squadra ordinaria. Mostriamo ora Geometricamēte come questa squadra sia atta a misurare con somma semplicità le lunghezze, l'altezze de i tiri, il tempo delle durazioni, le sublimità delle parabole, e le eleuazioni de' pezzi. E poi porremo la diuisione delle linee in essa, senza auer bisogno di Tauola alcuna per operar detta squadra.

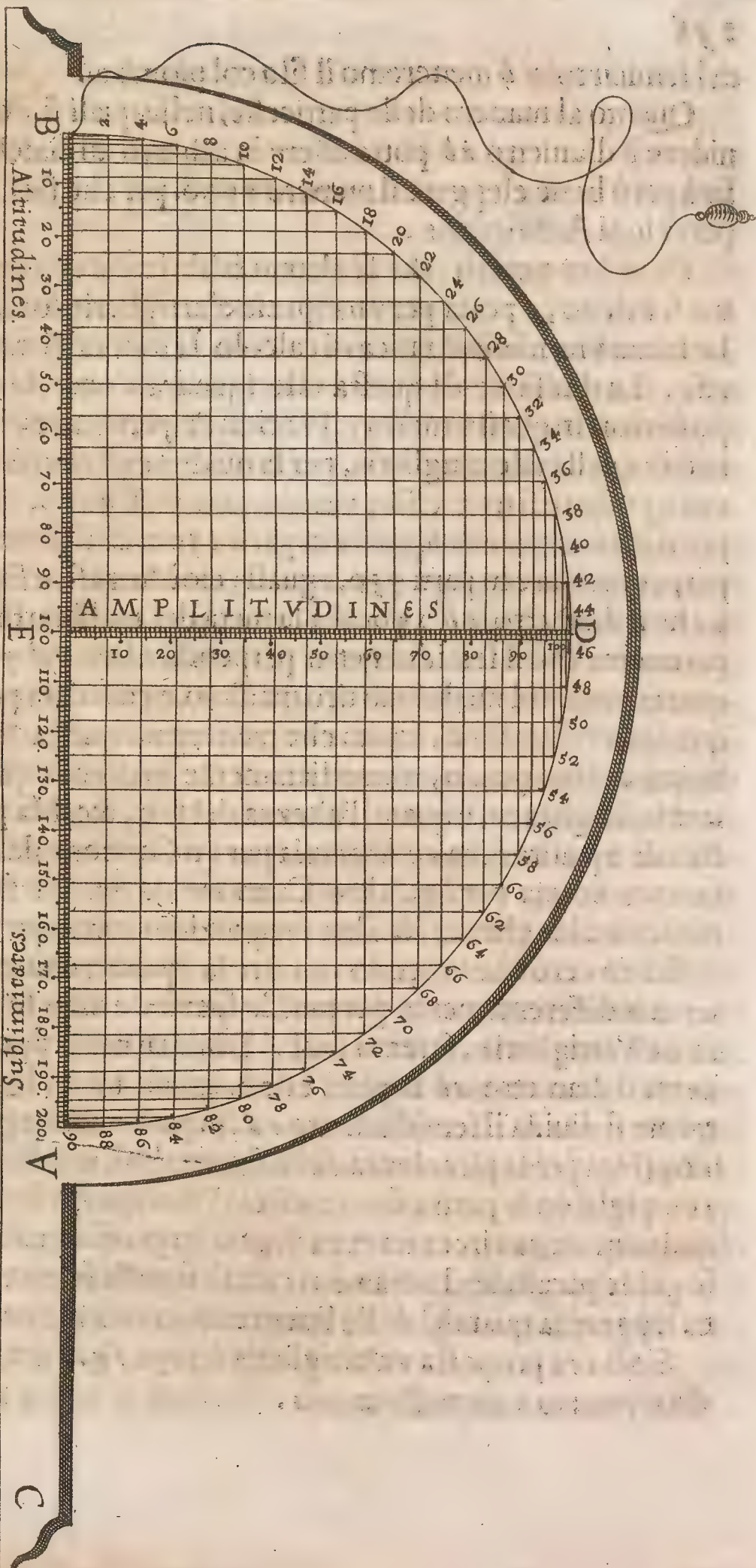
Pongasi, come nella seguente figura, la squadra sopra detta $abcd$. in bocca di vn pezzo ea . qualunque si sia, e caschi il piombo su'l punto f del semicircolo afb diuiso in 90. parti eguali. E certo primieramēte, che l'arco bf misura l'eleuazione del pezzo ea sopra l'orizzonte. imperò che hauendo noi con la diuisione del semicircolo in 90. parti solamente valutato ogni due gradi per vn solo, abbiamo fatto che l'arco bf sia misura dell'an-



golo bat , cioè della eleuazione del pezzo sopra l'orizzonte; quale orizzonte sarà sempre la linea af . Dico di più, che se noi fingeremo che la linea ab . diametro del semicircolo sia l'impeto della proposta artiglieria, ouero la metà del massimo tiro; la linea fh , perpendicolare al diametro, sarà la quarta parte della amplitudine, o lunghezza del tiro; la bh . sarà l'altezza suprema della parabola; la ah , sarà la sublimità; la bf . sarà il tempo o durazione del tiro.

Che tutto questo sia vero si dimostrerà così (accennando la Proposizione 9. de proietti, e le sue annesse.) Prolunghisi la linea della direzione ab , e parimente il perpendicolo fb indefinitamente. Prendasi poi con l'immaginazione la bl di tanta lunghezza che sia eguale realmente alla metà del massimo tiro della nostra proposta artiglieria; & intorno al diametro bl , facciasi col pensiero il gran semicircolo bil , che seghi la bi in qualunque punto i ; e tirisi la orizzontale im . È manifesto, per la citata Proposizione 9. de proietti, che la linea mi sarà la quarta parte reale della lunghezza del tiro: parimente che dm sarà l'altezza non finta, ma reale d'esso tiro; e così l'altre misure nel semicircolo bil saranno tutte vere, e reali. Hora notisi che il triangolo hbf , è simile al triangolo bmi , per essere ambidue rettangoli, e per aver due angoli alla cima b . Adunque nelle medesime proporzioni saranno tra di loro tutte le misure piccole, e finte della squadra ac , nelle quali proporzioni sono tutte le misure vere nell'immaginato, e vasto semicircolo bil . Cioè, le linee ab , bf , fh , hb , aueranno fra di loro le proporzioni medesime che hanno rispettuamente, le lb , bi , im , mb . Però quanto all'argomentar nelle proporzioni, potremo senz'alcuno errore seruirci non meno delle finte su la squadra, che delle vere immaginate nell'ampiezza dell'aria.

Resta hora, che ponghiamo come questa dottrina, che fin qui è stata mera speculazione, possa ridursi in pratica manouale, e con facilità. Ciascheduno vede che per auer noi cognizione della quantità delle linee ab , bf , fh , hb , e loro proporzioni nella precedente figura, sarebbe necessario, che tutte le predette linee fossero diuise in parti minutissime con qualche comune misura. A questo effetto però diuideremo in parti eguali, e minutissime il diametro ab , & il semidiametro ed , come appare nella seguente figura, doue dipinghiamo la squadra finita; e poi daremo a ciascuna diuisione della circonferenza le sue guide parallele a detti diametri, acciò in essi si possa leggere il numero, e la quantità delle linee, che saranno indici della lunghezza, & altezza de tiri; e nel punto dell'angolo
del



del semicircolo *b* metteremo il filo col piombo.

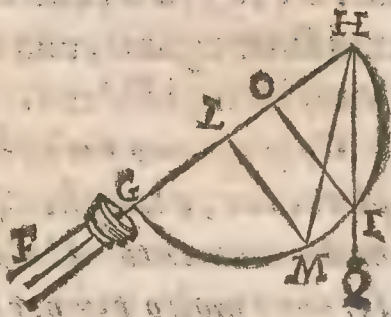
Quanto al numero delle particelle, nelle quali si douerà diuidere il diametro *ab* potrà essere in arbitrio di ciascheduno; farà però bene eleggere il numero 2000. per che faciliterà l'operazioni Aritmetiche.

Deue ben notarsi, che se alcuno fabbricasse vna squadra come si è detto, a posta per vna spezie d'artiglierie sola, auerebbe senza vna minima fatica di calcolo la misura di tutti i tiri di essa. La diuisione di questa tale squadra douerebbe farsi a posteriori in questo modo. Facciasi l'esperienza del massimo tiro di quella tale artiglieria, per la quale vogliamo far la squadra a posta; e si troui essere verbigrazia passi 3000. Diuidasi poi il diametro della squadra in parti 1500. & il semidiametro perpendicolare in parti 750. eguali; cioè fingasi, e suppongasì che il diametro *ab* 1500. sia la metà del massimo tiro 3000. parimente che il semidiametro perpendicolare *cd* 750. sia la quarta parte del medesimo tiro massimo, e così data poi qualunque altra eleuazione, subito che metteremo questa squadra in bocca del suo pezzo, immediatamente vedremo quanti passi farà la lunghezza, e quanti l'altezza del tiro, &c. Ma però questa tale squadra fatta verbigrazia per vn Cannone da 60. farebbe anco buona per ogn'altro Cannone da 60. che fusse della medesima lunghezza, & altre proporzioni come quello.

E ben vero che volendo noi fare la squadra vniuersale, che serua indifferentemente per tutte le spezie, e tutte le grandezze dell'artiglierie, faremo così. Diuidasi nella figura precedente il diametro *ab* in parti 2000. eguali tra di loro. Parimente si diuida il semidiametro *cd*. in parti 1000, eguali fra di loro. (Noi per la piccolezza della figura abbiamo diuiso solo in 100. pigliando le parti a dieci a dieci.) Fatto questo si tirino dalle diuisioni della circonferenza segata in gradi eguali al solito, le guide parallele alli diametri; acciò si possa sopra essi diametri leggere la quantità delle linee rette, conforme occorrerà.

Siaci ora proposta vn'artiglieria ignota *fg*. Facciasi la prima esperienza in questo modo. Pongasi in bocca di essa la
squa-

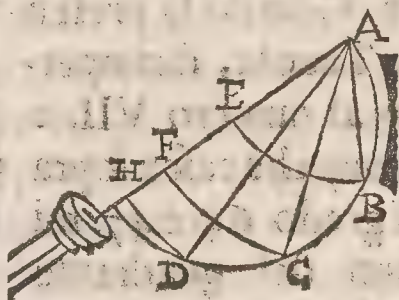
squadra, e caschi il filo in qualunque luogo in *i*. Leggasi per via della sua guida la quantita di *io* su'l semidiametro diuiso, e si tenga a memoria, e poi sparisi l'artiglieria, e si misuri il tiro, che sia passi (per esempio) 1250. Carichisi di nuouo l'artiglieria nello stesso modo, e s'alzi diuersamente tanto che il filo caschi altroue in *m*. si cerca la lunghezza di questo tiro.



Facciasi così. Se il numero di *io* dà la lunghezza di 1250 passi, il numero di *ml*, che si legge su'l semidiametro diuiso, quanti passi darà? e trouerai parimente la lunghezza del tiro numerata in passi.

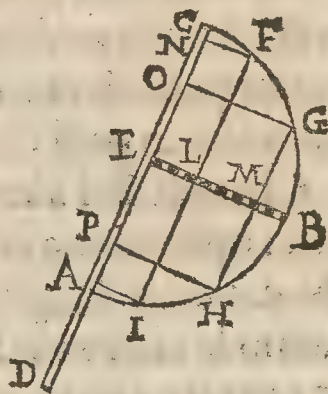
Chi volesse l'altezze, e non le lunghezze de' tiri, faccia la stessa operazione come s'è detto, ma non con le linee *io*, *ml* che danno le lunghezze, ma si bene con le *ho*, *hl*, le quali danno le altezze. Se poi volessimo le sublimità, bisognerebbe operare con le *go*, *gl*. Ma quello che importa più, se alcuno dopo fatta la preuia esperienza, volesse che quella medesima artiglieria facesse vn tiro propostoci, longo per esempio 2200. passi. Si cerca quanta eleuazione debba darsi al pezzo. Operisi così. Se li passi 1250. della preuia esperienza mi danno *io* numerata. li passi 2200. che mi daranno; e trouerai vn numero il quale sia per esempio nella squadra ascritto alla linea *ml*. Si douerà dunque alzar l'artiglieria tanto che il filo passi per il punto *m*. & allora il tiro riuscirà di passi 2200.

I tempi ouero durazioni de i tiri si danno da le linee *hi*, *hm*. e per auer la quantità di queste si può far in due modi. Primo per via di calcolo, perche il quadrato del tēpo *hi* (nella passata figura) è sempre eguale alli due quadrati, dell'altezza *ho*, e della quarta parte della lunghezza *io*. Secondo, con fare a tutte le diuisioni della periferia *b*, *c*, *d*, (nella presente figura) dal centro *a*. le guide circo-



lari be, cf, dh , che così essendo la ab diuisa già in parti minutissime eguali, essa ci misurerà tutte le rette ab, ac, ad . che sono i tempi de' tiri.

Confessiamo però che quanto all'uso militare, solamente l'amplitudini, o lunghezze de i tiri pare che importino, e siano di molto momento. L'altre sono tutte curiosità accessorie, le quali seruono molto più per gusto di Geometria, che per utile di guerra. Però chi volesse la squadra solo per questo rispetto delle lunghezze; io prenderei il semicircolo abc di ottone (come nella presente figura) il quale hauesse la gamba ad , e col semidiametro eb diuiso in parti minutissime & eguali facendo il principio della numerazione dal punto e . Di più darei à tutti i punti della periferia f, g, h, i , le loro guide gh, fi . parallele alla ac , e così s'hauerebbero sopra la eb . diuise, e numerate tutte le fn, go , le quali seruono per le amplitudini, o lunghezze de tiri.



Tauola La quale mostra quanti gradi e minuti del quadrante ordinario contenga ciaschedun punto della nostra squadra, che hà i punti disuguali, posta a car. 230.

Per esempio si cerca doue caschi la diuisione del settimo punto nostro disuguale. Guardo la presente Tauola, dirimpetto al numero VII. e trouo che casca sopra il grado 61. e 47. minuti del quadrante ordinario.

Punti della squadra disuguali	mezzo I	2. 23	mezzo VII	56. 46
	mezzo II	4. 48	mezzo VIII	61. 47
	mezzo III	7. 15	mezzo IX	65. 42
	mezzo IV	9. 44	mezzo X	69. 6
	mezzo V	12. 19	mezzo XI	72. 10
	mezzo VI	15. 0	mezzo XII	75.
		17. 50		77. 41
		20. 54		80. 16
		24. 18		82. 45
		28. 13		85. 32
		33. 14		87. 37
		45. 0		90.

Gradi del Quadrante ordinario.

MA Già che siamo entrati a considerare il moto, e l'impeto de' proietti, non si può sfuggir l'occasione di soggiungere qualche cosa circa la varietà delle forze loro, nel battere sopra le superficie resistenti, ora con maggiore, ora con minor angolo d'inclinazione. Il Galileo contempla l'impeto d'essi proietti in ogni punto della loro parabola, e lo misura solamente quanto è in se medesimo, cioè rispetto a quel piano, in cui perpendicolarmente egli percuotesse.

Noi supponendo che vn'impeto mentre arriua a percuotere, quanto a se sia sempre l'istesso, lo considereremo, e misureremo quanto egli siar rispetto al piano resistente, variato, solamente dalla diuersità de gl'angoli dell'incidenza. Non è Bōbardiero tanto inesperto, il quale non sappia, che le palle dell'artiglieria, mentre percuotono in vn muro, hanno sempre minore, e minor forza, (data ogn'altra parità) quanto l'angolo dell'incidenza sarà più e più acuto. Si che, se quel cannone con sessanta libbre di ferro, e quaranta di poluere, non solo sfonda ma ancora sconquassa con il tiro perpendicolare una cortina; appena poi la offenderà, benchè abbia la medesima carica, e la medesima distanza, con proiezione del tiro, ch'essi chiamano di striscio. Il Problema, per quanto io sappia, è intatto. Però se si produrrà qualche cosa meno sufficiente, e non pur geometrica, o si compatisca fin che altri tratti meglio la dottrina, o si rifiuti affatto, che poco importa.

Supposizioni.

1. Parleremo solamente per i tiri dell'artiglierie: però Supponiamo, che quella porzione della linea, che fa la palla poco prima e poco dopo al colpire, sia come linea retta. Sò che si tratta di linea veramente curua; ma auendo questa (se fusse intera) la sua lunghezza di più di tre mila passi geometrici, si potrà bene confiderarne vn braccio, ouero vn palmo solo, ouero vn dito senza errore sensibile, per linea retta.

2. Supponiamo secondariamente che le forze, ouero impeti de proietti siano come sono i spazij, che nello stesso tempo si

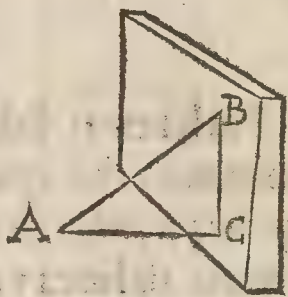
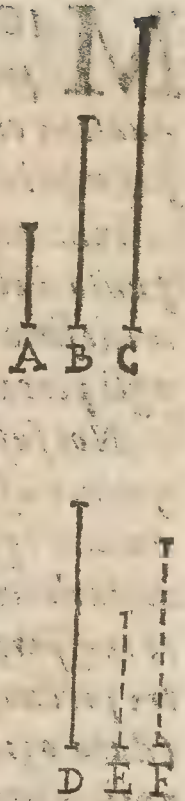
Gal. 2. de motu equa ili po si scorrono. cioè Se gli spazij *a. b. c.* faranno scorsi dal mobile nel medesimo tempo, gl'impeti, o forze nel colpire faranno come gli spazij *a. b. c.* rispettiuamente.

Gal. 3. de motu equabili 3. Ma se il medesimo spazio verrà scorso dal mobile in diuersi tempi, gl'impeti o forze del mobile in percuotere aueranno la proporzione reciproca dei tempi. cioè Se il medesimo spazio *d.* sarà scorso vna volta nel tempo *e*, & vn'altra nel tempo *f*. la forza della prima farà come *f*, e della seconda come *e*.

4. Supponiamo poi che tutti i tiri abbino, quanto a se stessi, sempre il medesimo impeto, ilche seguirebbe quando stādo ferma l'artiglieria sempre nel medesimo luogo, con la medesima carica, medesima eleuazione, e distanza &c. solo si variasse l'obliquità del muro.

Supposto questo: mentre vna palla di cannone si auuicina al muro opposto, la linea, e dirittura del tiro, o è perpendicolare, al muro, o nò. Se è perpendicolare, la percossa opera con vna tal foza (che proueremo esser la massima che possa auer quel tiro.) Se farà ad angoli obliqui, come la linea *ab.* alla parete *bc.* Io noto che rispetto alla parete *bc.* sono nella linea *ab* del proietto due moti insieme composti: vno cioè, di auuicinamento perpendicolare alla parete, l'altro di passaggio laterale, o parallelo alla stessa. Il perpendicolare ci viene, e mostrato, e misurato dalla linea *ac.* il parallelo dalla linea *cb*; poi che nel medesimo tempo vengono passati dalla palla ambigli spazij *ac, cb.*

Hora offeruiamo che di queste due sorti d'impeto, vna sola è a proposito, per accrescer le forze rispetto a rompere il muro, & internar la palla in esso, cioè l'impeto della lazione perpen-

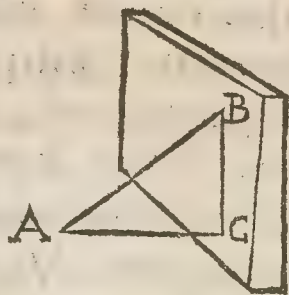


*Inferiremo dunque che, le attuità, o momenti de i tiri diuer-
samente inclinati sono come i seni retti degli angoli d elle inci-
denze.*

Si caua di quì per Corollario che la incidenza perpendico-
lare ab . hà maggior forza di tutte le altre, essendo la forza di
essa come il seno totale. E la proiezione parallela non ne hà
niente, essendo la forza sua come seno nullo. L'incidenza db .
ad angolo di 30. gradi hà la metà della forza totale, essendo il
seno suo la metà del semidiametro. Le altre poi, conforme auer-
ranno maggiore o minor seno retto, aueranno maggiore, o
minor forza.

Le forze delle proiezioni hanno reciprocamente la mede-
sima proporzione, che hanno i lati del triangolo, che sul pia-
no vien formato dalle linee dell'incidenze.

Sia vna proiezione fatta per la linea
 ac l'altra per la linea ab . E sia il piano
del triangolo abc . perpendicolare al
muro.



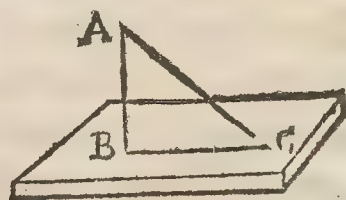
Per la 3.
supposi-
zione.

Perche dunque lo spazio ac . si corre
dalla palla nel tempo ac ; e lo spazio
 ab cioè (leuato il moto parallelo) lo
stesso spazio ac si corre nel tempo ab .
faranno le forze reciproche de i tempi.

Cioè la forza per ac . farà come ab . e per ab farà come ac .

Allora i proietti aueranno la stessa forza nel percuotere,
quando gl'impeti faranno come le secanti de gli angoli del
complemento delle incidenze.

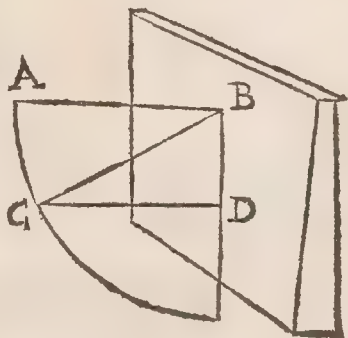
Sia l'impeto per la perpendicolare ab
come ab . & abbia vna tal forza; Acciò
l'impeto per l'inclinata ac . abbia la me-
desima forza, dico che l'impeto per ac
all'impeto per ab deue essere come ac
alla ab ; la quale ac è secante dell'angolo bac complemen-
to dell'inclinazione.



Poiche

Poiche se faranno gl'impeti per ab , & ac . come sono gli spazij ab , & ac . i mobili scorreranno nel medesimo tempo le due linee ab . ac . cioè lo stesso auvicinamento perpendicolare ab . Dunque aueranno la medesima forza contro al muro. *Per la 2. supposizione.*

Di più se col tale cannone, e per la linea cb . la palla s'internasse tutta per l'apunto nel muro; adunque per tutte le linee eleuate non solo s'immergerà tutta nella solidità, ma farà sempre maggior passata, perche hà maggior forza. Ma delle meno eleuate, per che ciascuna auerà minor forza, niuna entrerà totalmente nella parete, ma alcune anco rifalteranno, e sfuggiranno dall'altra parte.



Sia però detto tutto questo astraendo da un certo effetto di piegamento, o refrazione che fanno i proietti nel passar con inclinazione dal mezzo raro al mezzo più denso, incuruandosi la linea al contrario della refrazione della luce, e spezie visibili.

FINE DE' LIBRI DEL MOTO.

THE HISTORY OF THE REIGN OF KING CHARLES THE FIRST

IN WHICH ARE CONTAINED THE MOST IMPORTANT AND INTERESTING
CIRCUMSTANCES OF HIS LIFE AND REIGN



BY JOHN BURNET, ESQ. OF LINCOLN'S INN
IN TWO VOLUMES
LONDON: Printed by J. Sturges, at the Angel in St. Dunstons Church-yard, 1724.

THE SECOND VOLUME
OF THE HISTORY OF THE REIGN OF KING CHARLES THE FIRST
IN WHICH ARE CONTAINED THE MOST IMPORTANT AND INTERESTING
CIRCUMSTANCES OF HIS LIFE AND REIGN

BY JOHN BURNET, ESQ. OF LINCOLN'S INN

IN TWO VOLUMES

LONDON: Printed by J. Sturges, at the Angel in St. Dunstons Church-yard, 1724.

THE SECOND VOLUME

OF THE HISTORY OF THE REIGN OF KING CHARLES THE FIRST

DE DIMENSIONE
PARABOLÆ,
Solidique Hyperbolici

PROBLEMAT A DV O:

ANTI Q V V M A L T E R V M

In quo quadratura parabolæ XX. modis absoluitur,
partim Geometricis, Mechanicisque; partim ex
indivisibilibus Geometria deductis
rationibus:

N O V V M A L T E R V M,

*In quo mirabilis cuiusdam solidi ab Hyperbola geniti
accidentia nonnulla demonstrantur.*

C V M A P P E N D I C E

De Dimensione spatij Cycloidalis, & Cochleæ.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
Vol. 1, No. 1, 1912

CHICAGO, ILL., U.S.A.
PUBLISHED BY THE UNIVERSITY OF CHICAGO
PRESS, 545 EAST 57TH STREET, CHICAGO, ILL.
U.S.A.

Subscription price, \$5.00 per annum in advance.
Single copies, 50 cents.
Entered as Second-Class Matter, May 1, 1912.
Postage paid at Chicago, Ill., May 1, 1912.
Acceptance for mailing at special rate of postage provided for in
Post Office Department Circular No. 1103, approved October 3, 1917.
Postage paid by the University of Chicago Press, Chicago, Ill.

Ad Serenissimum Principem

LEOPOLDVM

AB ETRVRIA



DIFFICILE reor, Serenissime Princeps Leopolde, ferrea hac ætate libros conscribere ; difficilius dedicare : quandoquidem bonarum Artium studia vbique in bella degenerant, & Regnantes viri non exigunt ingeniorum vires, sed corporum. Etrusca tamen Regia, non minus foecunda virtutum, quam Principum, mundum edocet, eandem esse Mineruam & Bellonã, vnumque Apollinẽ, qui arcum simul amat, & citharam. Serenissima enim Celsitudo Tua (vt reliquos omittam) litterarum, & scientiarum omne genus perinde fouet, colitq: , ac si mundus alta pace frueretur, pulsifq; Furijs solæ Musæ

dominarentur. Verùm alia me maior difficultas terret, dum ego tenuitatis meæ conscius mecum ipse cogito, libellum hunc ad eum Principem ire, qui illum non solum protegere potest, sed etiam iudicare. Quicquid est, non acre iudicium Sereniss. Celsitudinis Tuæ, sed incomparabilem humanitatem inuoco, illam inquam humanitatem, quæ nuper amplissima in me beneficia contulit, & humi iacentem erexit fortunam meam. Audiat preces meas Dominus Regnantium, talemq; Principem diu custodiat: siquidem diuinitatis interest huiusmodi viros prosperari, ut æterna Prouidentia magis elucescat, & coniunctam aliquando cum potestate sapientiam in terris demonstrare valeamus.

Sereniss. Celsitud. Tuæ

Humillimus, & obsequentiss. seruus
Euangelista Torricellius.
 Ad Le-

AD LECTOREM

Proemium.

Nullus in uniuerso Mathematicarum disciplinarum
Theatro fortasse tritior puluis reperitur, quàm pa-
rabolæ quadratura. Quare ergò (inquis amice Le-
ctor) circà tritum argumentum tam diu desudasti? libentèr
equidem excipio obiectiones tuas; sed utinam vltimus desu-
dauerim. Quam tamen veniam mihi negas, scias eandem
plurimis, & egregiè laudatis Scriptoribus te denegare. Ob-
iectum enim de parabolæ quadratura, quod nostra hac eta-
te confiteor mihi nimis iam inueterasse, crediderim neq; no-
uum fuisse Canalerio, Galileo, Luca Valerio, & alijs. Quin-
immò ipsum Archimedem accusat, quicumque improbat lu-
cubrations circà subiectum vetus institutas. Audiamus
ipsum in Proëmio Quadraturæ parabolæ, ubi scribens Dosi-
theo inquit. Eorum enim, qui antehac Geometriæ
operam dederunt, nonnulli id inuestigare, & memo-
riæ mandare studuerunt, circulo dato, vel circuli por-
tione quacunque, spatium rectilineum æquale illi pos-
se inueniri. Item spatium à coni totius rectanguli sectio-
ne compræhensum & lineâ rectâ, ad quadrati formam
& mensuram reducere conati sunt; sumentes non faci-
le concessibilia fundamenta. Quibus verbis disertissi-
mè fatetur Geometrarum Princeps argumentum librorum De
dimensione circuli, & de quadratura parabolæ, neque suum
fuisse, neque nouum. Sed si quis attentè consideret Proë-
miale epistolam, libro de lineis spiralibus præfixam, intel-
liget

liget præcipua Archimedis Theoremata, aliorum inuenta fuisse, & magna ex parte Cononis. Maxima enim Propositiones librorum De Sphæra & Cylindro; De conoidibus, & sphæroidibus, & De lineis spiralibus (qui libri inter opera Archimedis Principem locum tenent) Cononis sunt: Qui (ut inquit Auctor) non satis temporis ad hæc excogitanda sortitus, vitam permutauit, & ipsa reliquit inexplicata; cum illa inuenisset, & alia quamplurima perquisisset, ac multum adeò Geometricas facultates ampliasset. Si ergò licuit admirabili, ac propè diuino Auctori, circa aliorum inuenta laborare; quis negabit ignoscendum ingenio meo mutuata theoremata contemplanti? Sed esto quòd conclusio antiqua sit; argumenta certè, quibus illa confirmabitur, ut plurimum noua erunt, & inaudita: Immo cum ad alteram partem libelli accedemus, in quâ de solido acuto hyperbolico dicendum est, non solum ipsum Theorema inexcogitatum, & ut ita dicam paradoxicum erit, sed etiam demonstrandi ratio inusitata, & penitus noua. Verùm (inquis) reliqui Scriptores, qui huiusmodi quadraturam aggressi sunt, vel singulas, vel ad summum binas prodiderunt; neque tamen mediocrem laudem consequuti sunt. Fateor; sed nec ego libellum hunc ex professo institui, composuique: immò quod & alijs, mihi quoq; accidit; singulas hæc quadraturas diuersis temporibus inueni, quas in vnum collectas nunc demum volentibus simul exhibeo. Tu tamen exclamas; heu nimis est: quotus enim quisq; reperietur tam famelicus Geometra, qui legat penè viciè repetitam propositionem, cum numero lemmatum ferè duplo? Huic sanè obiectioni libet contradicere. Cum enim libellus in Propositiones, ut plurimum

non coherentes digestus sit; sed ita dispositas ut ubicunque
libuerit initium facere possis, & finem, dicam cum Martiale
..... tibi carta plicetur

Altera; diuisum sic breue fiet opus,

Si verò mauis probare consilium eorum qui vnā, aut al-
teram tantum quadraturam edidere; quis prohibet? & in
hoc legere potes vnā, aut alteram; si tamen hoc quoq; nimis
videbitur, nullam. Vtilitatem exigis? concedo; & in hanc
partem libellum excusare non ausim. attamen non deerit for-
tasse aliquis qui penitus inutilem non existimet, cum Geo-
metricus, sit. Sola enim Geometria inter liberales discipli-
nas acriter exacuit ingenium, idoneumque reddit ad ciuita-
tes exornandas in pace, & in bello defendendas: ceteris enim
paribus, ingenium quod exercitatum sit in Geometrica pale-
stra, peculiare quoddam, & virile robur habere solet: præ-
stabitq; semper, & antecellet, circa studia Architecturæ,
rei bellicæ, nauticæq; siue mauis circa Aritmeticam, artemq;
metiendi, vnde totum ciuile commercium dependet, regitur-
que. Quinetiam circa ministeria flumiorum, & aquarum
stagnantium, vnde non nisi magna percipiuntur siue damna,
siue beneficia; pro ut bene, vel male intellecta fuerit huius-
modi rerum natura. Sed esto quod inutilis penitus habeatur
libellus; siue quia Reipub. nihil interest parabola quadratu-
ra; siue quia multis ab hinc seculis excogitata fuerat, & de-
monstrata. Huic verò obiectioni respondeat Reuerendiss.
D. Benedictus Castellius Magister meus. Ipse enim dicet,
quod si Principes terræ, solam illam vulgarem, & apparen-
tem vtilitatem in Artibus magni facerent, exigenterque dam-
nandi penitus essent Sculptores, Celatoresque egregij seijcien-
di ci-

di ciuitatibus Pictores, Musici, Citharædi, Poëta, atque id genus alij. Contrà verò ditandi essent, atq; opibus, officijsq; omnibus demerendi pictores, quorum utilitati nulla alia par est; caupones, sutores, & quicunque artem colunt vitæ hominum summoperè utilem. Quinetiam si utilitas sola attendatur, damnandus erit vini vsus, & detestanda cultura vinearum. At in summo prætio habenda aqua, cuius utilitates tam facile est numerare, quàm difficile sit ijs non indigere.

Vt cumque ea res sese habeat, veniamus ad obiectiones quæ circa artis fundamenta versantur. Indignor equidem Lucam Valerium, verè nostri sæculi Archimedem, cum optimam causam suscepisset, pessimâ defensione usum fuisse. Solent ab eruditis culpari figurarum Geometricarum dimensiones, quæ Mechanicis fundamentis innixæ stabiliuntur, tam quàm duplex falsum supponant: alterum, quòd superficies grauitatem non habentes, habere tamen concipiuntur: alterum verò, quòd fila quæ magnitudines ad libram suspendunt æquidistantia supponuntur, cum tamen in centro terræ concurrere debeant. Ego verò in ea sum sententia, vel nullam ex his suppositionib. esse falsam, vel reliqua omnia principia Geometriæ falsa existere eodem modo. Falsum enim est, quòd circulus habeat centrum, sphaera superficiem, conus soliditatem. Loquor de figuris abstractis quales Geometria considerare solet; non autem de fictis, & concretis. Necesse igitur erit fateri quòd circuli centrum, superficies sphaeræ, soliditas coni, & reliqua huiusmodi non controuersa, nullam aliam habeant existentiam, præter illam quam accipiunt per definitionem, & per intelle-

ctum;

Etum . Eodem prorsus modo gravitas est in figuris Geometricis, quomodo in iisdem est centrum, perimenter, superficies, soliditas &c. Laudarem igitur in Mechanicis contemplationibus nova definitione figuras generare ; hoc, aut alio non ab simili modo .

Quadratum est quadrilaterum, quod, cum æquilaterum, & æquiangulum sit, singula ipsius puncta momentum habent procedendi versus aliquam mundi plagam per lineas inter se parallelas .

Huiusmodi enim definitio omnem demeret occasionem dubitandi, illis, qui Mechanica Archimedis opera, secundum ipsius mentem non accipiunt . Sed hucusque dictum sit pro oblitteranda primæ falsitatis nota, quòd figuræ Geometricæ graves sint .

Venio nunc ad secundum (ut aliqui existimant) falsum . Principiò, vulgatissima est etiam apud gravissimos viros obiectio illa, videlicet Archimedem supposuisse aliquod falsum, dum fila magnitudinum ex librâ pendentium consideravit tanquam inter se parallela, cum tamen revera in ipso tetra centro concurrere debeant . Ego verò (quod pace clarissimorum virorum dictum sit) crediderim fundamentum Mechanicum longè alia ratione esse considerandum . Concedo si Fisicæ magnitudines ad libram liberè suspendantur, quòd fila materialia suspensionum conuergentia erunt ; quandoquidem singula ad centrum terræ respiciunt . Verumtamen si eadem libra, licet corporea, consideretur non in superficie terræ, sed in altissimis regionibus ultra orbem Solis ; tum fila (dummodo adhuc ad terræ centrum respiciant) multò minùs conuergentia inter se erunt ; sed quasi equi-

B
distan-

distancia. Concipiamus iam ipsam libram Mechanicam ultra stellatam libram firmamenti in infinitam distantiam esse prouectam; quis non intelligit fila suspensionum iam non amplius conuergentia, sed exactè parallela fore? Quando ego considero libram, figuras Geometricas ponderantem, non concipio illam esse inter cartas librorum in quibus depicta conspicitur; neque suppono punctum, ad quod magnitudines ipsius tendunt, esse centrum terræ; sed libram fingo in infinitum remotam esse ab eo puncto, ad quod ipsius graua contendunt. Si postea ibi concludero triangulum aliquod triplum esse cuiusdam spatij; retrahatur imaginatione ipsa libra ad nostras regiones; concedo quòd retracta libra destruetur æquidistantia filorum suspensionis, sed non ideò destruetur proportio iam demonstrata figurarum. Peculiare quoddam beneficium habet Geometra, cum ipse abstractionis ope, omnes operationes suas mediante intellectu exequatur. Quis igitur mihi hoc negauerit, si libeat considerare figuras appensas ad libram, quæ quidem libra ultra mundi confinium in infinitam distantiam remota supponatur? Vel quis proibeat considerare libram in superficie terræ constitutam, cuius tamen abstracta magnitudines tendant, non ad medium terræ punctum, sed ad centrum caniculæ, siue stellæ polaris? Triangula & parabola, immò etiam spheræ, cylindriq; Geometrici, cum nullam per se habeant motus differentiam, non magis ad ipsius terræ, quàm ad Saturni centrum contendunt. Destruit ergò beneficium suum quisquis figuras illas, tamquam ad unicum terræ centrum tendentes, contemplatur. Cur denique non licebit mihi considerare puncta cuiuscunq; figuræ eiusmodi virtute prædita, ut singula versus eandem mundi plagam per lineas in-

ter se parallelas æquali momento contendant? His ita suppositis, quæ vera sunt, quemadmodum sunt veræ passionēs figurarum, quæ in definitionibus adhibentur, vera etiam erunt quæcunq; Theoremata per Mechanicas rationes ab ipsis abstractis fuerint considerata, neque per falsas positiones demonstrabuntur. Tunc itaque falsum dici poterit fundamentum Mechanicum, nempe fila libræ parallela esse, quando magnitudines ad libram appensæ fisikæ sint, realesque, & ad terræ centrum conspirantes. Non autem falsum erit, quando magnitudines (siue abstractæ, siue concretæ sint) non ad centrum terræ, neque ad aliud punctum propinquum libræ respiciant; sed ad aliquod punctum infinitè distans conmittantur.

Cæterum, breuitatis, & facilitatis gratiâ à vocabulis consuetis non discedemus; punctumque illud ad quod magnitudines libræ contendere supponuntur, Centrum terræ nominabimus; Planum verò illud, quod erectum est ad lineam connectentem prædictum punctum cum centro libræ, Horizontem de more appellabimus.

Suppositiones, & definitiones.

I.

POnatur eam esse centri grauitatis naturam, vt magnitudo liberè suspensa ex quolibet sui puncto nunquam quiescat nisi cum centrum grauitatis ad infimum suæ sphaeræ punctum peruenerit.

Concipiamus figuram *ABC*, suspensam ex sui puncto *D*,
B 2 median-

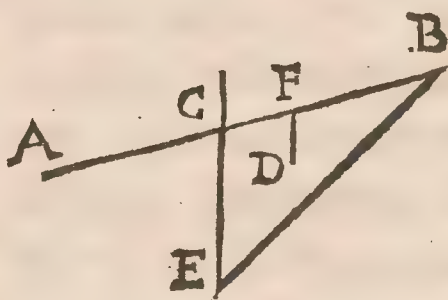
IV.

Centrum gravitatis tunc reperitur in ipso suspensionis perpendiculo, quando figura liberè suspensa sibi ipsi æquiponderat. Alias enim figura quiesceret, & centrum gravitatis ipsius posset adhuc inferiùs descendere. Quod est absurdum.

V.

Centralitèr ad illud libræ punctum appendi figura dicetur, in quod cadit perpendiculum, ex centro gravitatis figuræ productum.

Esto enim libra AB , cuius fulcrum sit C , & ad ipsam appensa sit figura CEB , ita ut totum latus CB cohereat, & sit veluti ad ipsam libram conglutinatum. Est centrum gravitatis figuræ punctum D , & ex D agatur perpendiculum DF ad horizontem erectum.



Iam figura CEB dicetur, & considerabitur, tamquam appensa centralitèr ad punctum F . Constat enim ex prædictis, quòd si figuræ latus CB solvatur vndiq; à brachio libræ, solumque remaneat filum connexionis DF , nihilo tamen minus figura adhuc manebit ut prius manebat, eandemq; servabit versùs libram positionem, quam antea habebat. Vide Arch. Prop. 6. De Quadratura parabolæ.

VI.

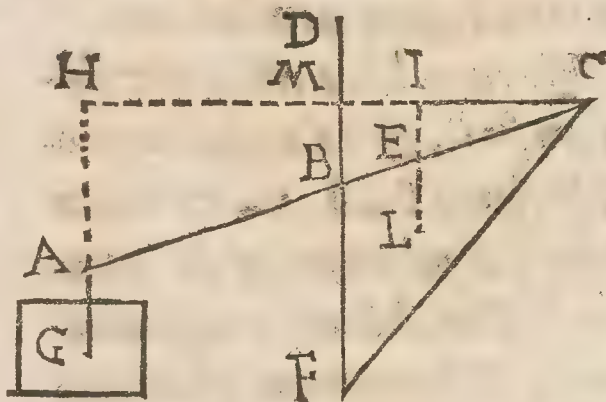
Æqualia graua ex æqualibus distantijs æquiponderant, siue libra ad horizontem parallela fuerit, siue inclinata.

Et gra-

Et grauia eandem reciprocè rationem habentia, quam distantia, æquiponderant, siue libra sit ad horizontem parallela, siue inclinata.

Hæc sine alia explicatione præmitti poterant; quandoquidem in doctrina æquiponderantium nunquam supponitur libra horrizonti æquidistans: Attamen quia ostendi possunt, non omittendam censeo demonstrationem; præsertim cum nonnulli ex libra materiali male fabricata, errorem susceperint, & in intellectum admiserint.

Esto inclinata libra AC suspensa ex puncto B ad filum BD. Sintq; magnitudines BFC, & G. centralitèr appensæ ex punctis E, & A. Et ponatur esse, vt magnitudo BFC, ad magnitudinem G, ita reciprocè distantia AB ad BE. Dico libram AC, quamuis inclinatam, magnitudinesque ab ipsa pendentes, penitus conquiescere, & æquiponderare.



Producantur enim perpendiculara GAH, LEI, per centra grauitatis figurarum G, & L, transeuntia, ducaturq; horizontalis libra CH, quæ item appensa sit ad filum MD. Quoniam igitur est per suppositionem, vt magnitudo BFC, ad magnitudinem G, ita reciprocè AB ad BE; siue (ob parallelas) HM ad MI; æquiponderabunt magnitudines BFC, & G, ad libram horizontalem HC appensæ. Ergo commune centri grauitatis erit omninò in perpendicularo DF. Propterea magnitu-

gnitudines æquiponderabunt etiam dum ad libram AC suspenduntur: aliàs, si mouerentur, commune centrum gravitatis ipsarum, quod demonstratum est esse in perpendiculo DF , ascenderet. Quod est impossibile.

Hæc autem brevius concludentur hoc modo.

Connectantur (in eadē figura) centra gravitatis ductā rectā GL .

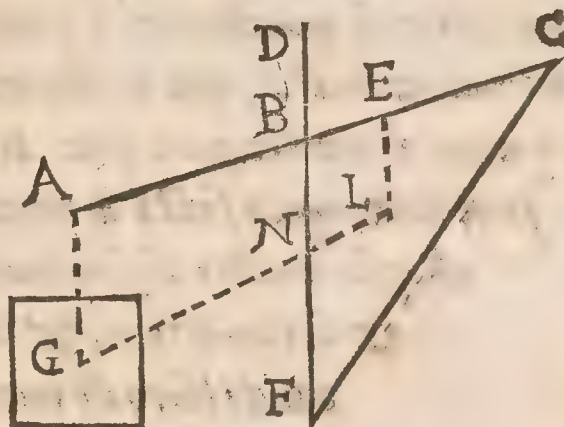
Quoniam magnitudo BFC ad magnitudinem G , est ut AB ad BE , siue (ob parallelas) ut

GN ad NL , erit N centrum commune gravitatis magnitudinum appensarum. Si ergo libra AC non quiesceret, centrum gravitatis N , ascenderet. Cum enim sit in perpendiculo DF , moveri non potest quin ascendat.

Non me latet Auctorum controuersiam, circa libram inclinatam, an redeat, maneat uè, supponere centra magnitudinum in ipsa libra esse collocata. Nos tamen, quia in hoc libello, semper considerabimus magnitudines infrà ipsam libram appensas, maluimus rei nostræ seruire, quàm aliorum controuersie demonstrationem accomodare.

Cæterum passiones parabola quas in operis progressu supponemus tamquam notas, vel ipsius Apollonij erunt, vel Archimedis, vel saltem ex Apollonio ipso facili negotio deducuntur, cuiusmodi sunt hæ, quæ sequuntur.

Si Parabola rectam lineam tangentem habuerit, à quibuslibet autem punctis ipsius tangentis rectæ lineæ usque ad parabo-



parabolam demittantur æquidistantes diametro, erunt demissæ inter se longitudine ut sunt portiones tangentis potentiâ inter se. Deducitur enim hoc ex 20. prim. Conic. Nam re, & illæ demissæ portionibus diametri respondent; at partes ipsius tangentis, ordinatim applicatis æquales sunt.

Item, si intra parabolam à punctis quibuslibet rectæ illius ordinatim ductæ, quæ basis parabole dicitur, rectæ lineæ erigantur diametro parallele. Erunt erectæ inter se ut sunt rectangula facta à portionibus basis, quæ ab ipsis erectis abscinduntur. Hoc enim & à Cavalerio, & à nobis in secundo libro de motu ostenditur.





QVADRATURA PARABOLAE.

Pluribus modis per duplicem positionem, more antiquorum, absoluta.



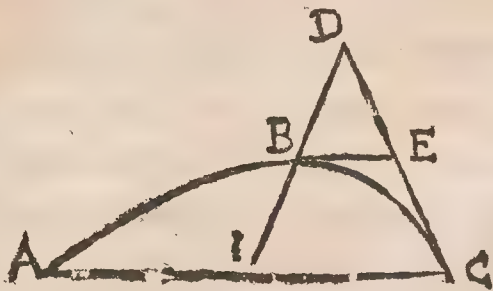
Lemma Primum.



PARABOLA duas tangentes habuerit, alteram ex termino basis, alteram verò ex vertice: tangens, quæ ad basim est, bisariam secabitur ab illa, quæ per verticem ducitur.

Est parabola abc, cuius diameter bi, ordinatim verò applicata (sive basis) sit ac; tangens ex termino basis sit cd; per verticem verò tangens be. Dico ipsam cd bisariam secari in puncto e.

Cum. n. cd sit tangens, di diameter, erunt aequales inter se db. bi. Et quia ac ordinatim appli-



35 primæ
Conio.

CASA

18 De Dimensione Parabolæ

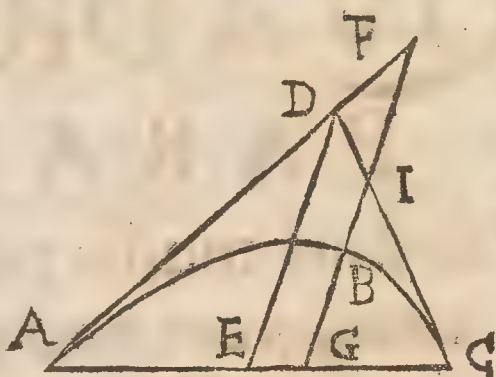
per 32.
eiusd.
per 2 sex
ti.

cata est ad diametrum bi , ipsa verò be tangit in puncto b , erunt parallele ac , be . Et ideo erit ut db ad bi , ita de ad ec . Quare æquales erunt etiam de , ec . Quod erat ostendendum &c.

Lemma I I.

Si parabola duas tangentes habuerit ex basis terminis; recta linea quæ ab occurſu duarum tangentium ducitur diametro parallela, propositæ parabolæ diameter erit.

Est parabola abc , cuius ex punctis a & c , dua tangentes sint ad , cd , concurrentes in d . Ex puncto autem d , recta ducatur de diametro parallela. Dico ipsam de propositæ parabolæ diameter esse.



per 35.
1. Conico
rum.

Sit enim, si possibile est, diameter fg . Erunt ergò ob tangentem ad æquales inter se diametri portiones fb , bg . Iterum ob tangentem cd , æquales erunt ib , bg . Et ideo æquales erunt inter se ipsæ fb , bi : totum, & pars. quod fieri non potest. Non est ergò alia diameter præter ipsam de . Quod erat ostendendum &c.

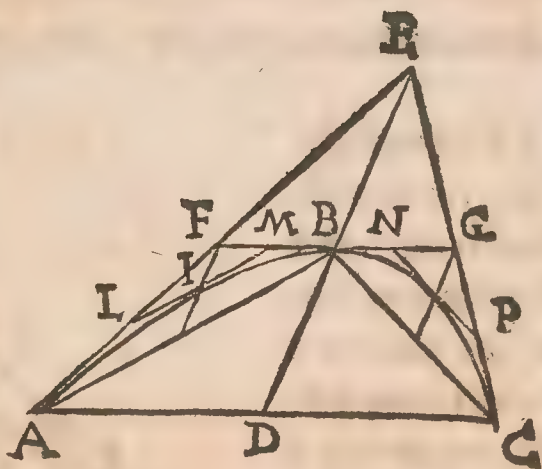
Lemma I I I.

Si parabola tres tangentes habuerit; duas ad basim, & tertiam per verticem; erit triangulum sub tangentibus compræhensum octuplum trianguli, quod oritur ex ductu quartæ tangentis per verticem alterutræ semiparabolæ.

per Lem.
preced.

Est parabola abc , cuius basis ac , diameter bd ; dua tangentes ad basim ae , ce . Tangens per verticem sit fbg . Demittatur ex f , concursu tangentium af , gf , recta afi , diametro parallela: eritque fi diameter parabolæ aib . Ducatur denique lm , tangens semiparabolam aib per verticem i . Dico triangulum feg , sub tangentibus compræhensum, octuplum esse trianguli lfi .

num aequales bases af, fe .) Propterea totum triangulum feg
octuplum erit trianguli lsm . Quod erat ostendendum &c.



per 320
R. Cor.
per Leno.
primus

Ergò triangulum feg , factum à primis tribus tangentibus, octuplum ostendetur eodem modo etiam trianguli ngp . & propterea semper quadruplum erit duorum simul triangulorum lfn, ngp ; quæ post ipsum (ductæ à utrinque alia tangente) oriuntur.

Manifestum etiam est triangulum feg sub tangentibus contentum, auferre plusquam dimidium ex trilineo mixto $abce$: siquidem triangulum feg dimidium est duorum simul triangulorum eab, ebc . Ergo erit plusquam dimidium trilinei mixti $abce$.

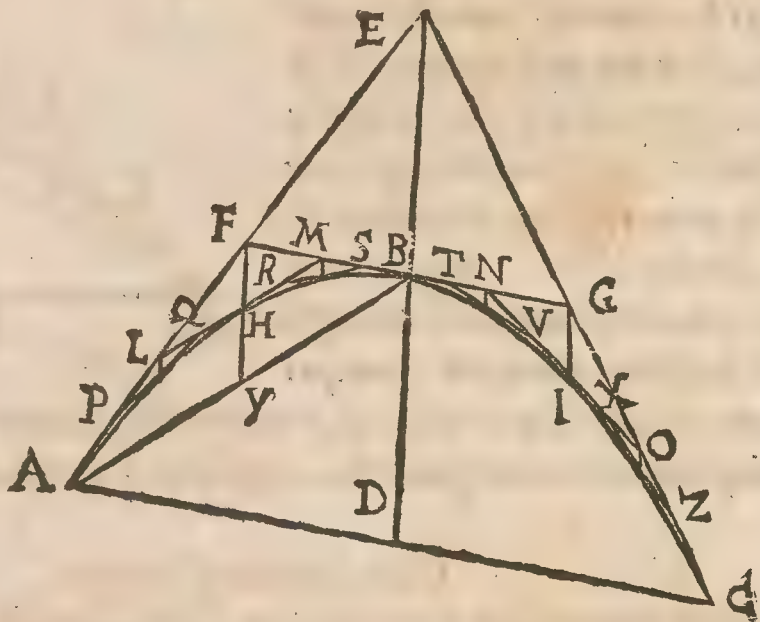
Hinc sequitur quòd possibile sit intrà figuram mixtam abcgf. figuram rectilineam inscribere per continuum ductum tangentium; qua quidem figura inscripta deficiat à figura mixta, defectu minori quàm sit qualibet data magnitudo.

per prima
mano de
cimb.

Si parabola duas tangentes habuerit ad basim: deinde per
vertices factarum portionum aliæ tangentes ex ordine ducan-
G 2 tur

tur; & hoc fiat quotiescunq; libuerit: figura à tangentibus circumsepta, si ex vertice parabolæ suspendatur (posita diametro ad horizontem perpendiculari) æquiponderabit.

Est parabola abc , cuius diameter bd , & duæ tangentès ad basim sint ae , ce ; per verticem verò b tangens sit fg . Deinde, demissis (ut in præcedenti Lemma) diametris fh , gi , per vertices portionum ahb ,



bic , tangentès ducantur lm , no . Iterumque per vertices reliquarum quatuor portionum tangentès ducantur pq , rs , tu , xz ; & sic semper donec libuerit: Dico figuram; siue potius duas figuras rectilineas à tangentibus pqr lfp , $tuxz$ gt ; circumseptas, ex puncto b æquiponderare: statuta prius diametro bd ad horizontem perpendiculari.

Ponatur itaque bd diameter parabolæ ad horizontem perpendicularis; & rectam fg , (quamcunq; inelinationem sortiatur) concipiamus esse libram, cuius fulcrum sit in b .

Quoniam igitur applicata ab bifariam secatur à diametro fh in puncto y ; suntq; ab , lm , parallelæ, erit etiam lm secta bifariam in h ; & ideò duorum triangulorum lfm , ngo , centra gravitatis sunt in fh , gi ; suntq; fh , gi ad horizontem perpendiculares, ideò appensa centralitèr erunt dicta triangula ad libram fg . ex punctis f & g . Aequiponderabuntque ex distantijs equalibus bf , bg . Cum ipsa quoque triangula sint equalia; nempe suboctupla eiusdem trianguli feg . Eadem prorsus ratione posita librà lm , duo triangula plq , rmf appensa erunt ex punctis

lem. 3.

& m ; equi-

Problema Primum.

21

& m; equiponderabuntq; ex puncto h, & ideo appensa erunt ex puncto f. (quandoquidem filum suspensionis fh perpendiculare est ad horizontem.) Duo verò triangula tnu, xoz, prædictis equalia (cum sint singula suboctupla equalium lfm, ngo.) ponderabunt simul ambo ex puncto g. Ergo quatuor simul prædicta triangula equiponderabunt ex puncto b, nempe medio totius libræ fg: Eodem modo concludemus reliqua triangula, quotcunque sint, ex puncto b equiponderare. Vniuersa ergo figura à tangentibus circumsepta ex puncto b equiponderabit. Quod &c. Lem 3.

Corollarium I.

Hinc pro Corollario animaduertemus centrum grauitatis prædictæ figuræ, à tangentibus comprehensæ, esse in diametro parabole. Cum enim figura prædicta equiponderet ex puncto b, erit centrum grauitatis illius in linea quæ ex puncto b ducitur perpendicularis ad horizontem; quapropter erit in bd diametro parabole.

Corollarium II.

Colligemus etiam centrum grauitatis omnium trilineorū mixtorum, quæ sub linea parabolica abc, & sub omnibus tangentibus apqrstuxzc, comprehenduntur, semper in diametro parabole existere. Patebit autem hoc modo. Centrum trapetij afgc, est in diametro; centrum etiam parabole est in diametro; ergo centrum reliquæ figuræ mixtæ erit in diametro. Si ergo centrum huiusmodi figuræ est in diametro; centrum etiam figuræ à tangentibus circumseptæ demonstratum est esse in diametro; propterea ceterum omnium simul trilineorum, quæ continetur sub tangentibus & linea parabolica, erit in diametro per 8. prim. Aequipond.

15 primi
equipon-
der.
4. secun-
di eiusd.
8. primi
eiusd.

Lemma V.

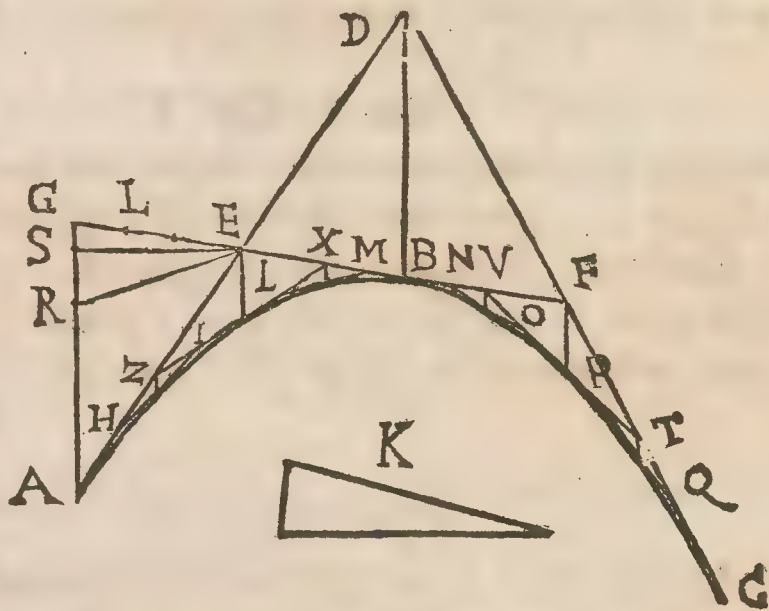
Si parabola duas tangentes habuerit alteram per verticem, alteram verò ad basim, & ex altera parte basis habeat parallelam diametro; figura sub tribus prædictis rectis lineis, & curuâ parabolicâ comprehensa, æquiponderabit ex puncto tangen-
tis ver-

22

tis verticalis, in quo ea sic diuiditur, vt pars ad reliquam tangen-
tem terminata, dupla fit illius quæ ad parallelam diametro ter-
minatur.

*Est parabola abc , cuius tangens ad basim sit cd ; per verticem verò fbg ; & ag sit parallela diametro. Secetur deinde fg in e , ita ut fe dupla sit reliqua eg . Dico figurā $abcf$ (statu-
tā diametro ad horiz. perpendiculari) equiponderare ex puncto c .*

Concipiamus
enim diametr.
parabola esse
horizonti per-
pendicularem
(hoc autem mo-
do sēper intel-
ligendum est)
qua mcunq; tā-
dem inclinatio-
nem sortiatur
libra gf. Et
ducta tangen-
te ad (qua om



nino transibit per e, ut infra ostendemus) intelligatur g f. libræ esse, cuius fulcrum est e; ex qua pendent ab una parte triangulum a g e; ab altera verò, figura mixta a b c f e. Quæ quidem figure si inter se non æquiponderant, ponamus alteram ipsarum præponderare. Esto igitur; & præponderet primò a b c f e, tanto excessu quantum est spatium k.

*Inscribatur intra ipsam alia figura à tangentibus hilmnop
qfeh, terminata, ita ut reliquae portiunculae sub dictis tan-
gentibus & curua parabolica contentae, simul minores sint spa-
tior k (quod fieri posse constat ex Corollario Secundo Lemmatis
Tertij.) Praeponderabit igitur adhuc figura sub tangentibus
compraehensa; quandoquidem pars ablata minor est excessu K,
& in eodem puncto b ponderat simul cum tota magnitudine; tam
enim ablatae, quam totius, centrum gravitatis est in diametro,
ut osten-*

Problema Primum.

23

ut ostendimus ad Corollarium Secundum Lemmatis Quarti.

Accipiat^r iam gr quarta pars totius ga ; ducaturq; er . Sumatur etiam el dupla reliquae lg ; & ex puncto l centralitè suspensum erit quodlibet triangulum habens verticem in e puncto, & basim in recta ga , quae ad horizontem recta ponitur.

Iam sic: duo triangula $z ex$, uft, ad triangulum edf . sunt ut duo ad 8. & ad triangul. ebd ut 2. ad 4. & ad aequale age . ut 2. ad 4. ergò ad triangulum are . erunt ut 2. ad 3., nempe ut le ad eg , hoc est ut le ad eb reciprochè. Quare in libra lb duo praedicta triangula $z ex$, uft aequiponderant triangulo are ex puncto e .

Sumatur iterum gl quarta pars totius gr , & iungatur ef . Cū ergo gre sit quarta pars ipsius gae , vel ipsius edb , erit gre octava pars totius edf . Quapropter aequale erit gre , alterutro ipsorum $z ex$, uft. Sed quoniam hzi est octava pars ipsius $z ex$, erunt quatuor simul triangula hzi , lxm , nuo , ptq . (quoniam aequalia sunt inter se) ad triangulum $z ex$ ut 4. ad 8; siue ut 2. ad 4: & propterea etiam ad triangulum gre , erunt ut 2. ad 4; ad ipsum verò sre erunt ut 2. ad 3, nempe ut le ad eb . Equiponderant igitur ex puncto e hinc triangulum sre , & inde quatuor praedicta triangula hzi , lxm , nuo , ptq . Eodem prorsus modo, si sub quatuor his triang. alia fuerint in residuis portionculis triang. ex ordine descripta, ostendentur aequiponderare ex eodem puncto e , cum quodam triang. cuius vertex sit e , basis vero contineat 3. quar. ipsius gl & c. Sed in nostro casu, cum demonstratum sit prima duo triangula $z ex$, uft, aequiponderare triangulo are . Reliqua item quatuor triangula, quorum unū est hzi . aequiponderare triangulo sre ; Aequiponderabit tota simul figura ex praedictis triangulis composita, triangulo aef , ex puncto e . Sed demonstratum fuit, eandem figuram praeponderare triangulo aeg ; necesse igitur est ut triangulum aeg minus sit triangulo aef ; totum sua parte; Quod est impossibile.

Si vero ponamus praeponderare triangulum aeg figurae $abcf$. Esto; & sit excessus quo praeponderat, spatium k . Accipiat^r gre quarta pars trianguli age : & iterum accipiat^r gle ,
quar-

Vide Archim. de Quadratura parabol. Propos. 6. 8. 10. et 12.

per Corol prim Lem. 3.

Ex Lemmate 3.

possibile
est per 1.
Decimi.

quarta pars trianguli gre; & hoc semper fiat, donec veniatur ad aliquod triangulum gfe, quod minus sit spatio k. Tunc enim triangulum afe adhuc praeponderabit figurae abcfe. Sed eodem modo, ut supra demonstrabimus triangulum ipsum ale aequi ponderare alicui figurae rectilineae inscriptae intra figuram mixtam abcfe. Necesse ergo iterum erit ut inscripta figura rectilinea maior sit quam figura mixta abcfe, cui ipsa inscribitur; pars suo toto. Quod est absurdum &c.

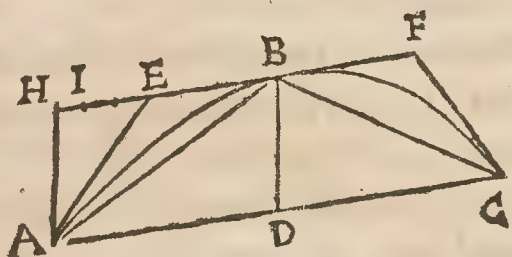
Aequi ponderat ergo ex puncto e uniuersa figura abcfg, quae sub curua parabolica, duabusq. tangentibus, & linea ipsi diametro parallela continetur. Quod &c.

Quod assumptum est ita ostendemus: Nempet tangentem ad transire per punctum e: hoc est, ita secare rectam fg, ut pars fe, dupla sit reliquae eg. Secet enim ad tangens rectam fg ut cunq; in e. Iam; cum parallelae sint ag, bd, & aequales ae, ed; erunt aequales etiam ge, eb, Sed aequales sunt fb, be, ergo fe dupla est ipsius eg. Ideo ad transit per illud e punctum, quod ab initio dixeramus.

Propositio Prima.

QVAELIBET parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, cuius diameter BD, iunganturq. AB, BC, Dico parabolam sesquitertiam esse trianguli ABC, eandem cum ipsa basim, & eandem altitudinem habentis,



Ducantur tangentes AE, CF ad basim: FH verò per verticem B; & AH sit ipsi diametro parallela. concipiamusq. parabolae diametrum erectam esse ad horizontem. Iam secta HE in I, ita ut EI dupla sit ipsius IH, erit triangulum HAE centralitèr appensum ad punctum I (habet enim

Problema Primum.

25

nim centrum grauitatis in recta quæ ex I ducitur parallela ad HA, & propterea ad horizontem perpendiculari.) Erit insuper figura mixta ABCFE centraliter appensa ad punctum B. (quandoquidem habet centrum grauitatis in diametro BD ad horizontem perpendiculari.) Sed vniuersa magnitudo, composita ex dicto triangulo HAE, dictaq; figura mixta, æquiponderat ex puncto E; erit ergo triangulum HAE ad figuram mixtam ABCFE, vt reciproce BE ad EI, nempe vt 3. ad 2. Propterea trapezium AEFC sextuplum dicti trianguli, erit ad figuram mixtam ABCFE, vt 18. ad 2. & per conuersionem rationis, ad parabolam erit vt 18, ad 16. Qualium ergo partium parabola est 16, earum trapezium AEFC est 18. & triangulum ABC 12. Quare parabola ad triangulum ABC erit vt 16, ad 12 nempe lesquitertia. Quod erat ostendendum.

Vide Corol 1. Lemmat. 4.

Lemma. preced.

ostendetur inf.

ostenditur inf.

Quod trapezium aefc sextuplum sit trianguli hae, patet. Nam parallelogrammū hd, duplum est trianguli hab & propterea quadruplum trianguli hae. ergo trapezium aebd triplum erit trianguli hae. totum verò trapezium aefc. sextuplum dicti trianguli hae. Quod &c.

Cum autem trapezium aefc sextuplum sit trianguli hae, erit sextuplum etiam trianguli eab; & ideo triplum duorum eab, bcf, Nempe vt 18. ad 6. Per conuersionem verò rationis, erit ad triangulum abc vt 18. ad 12. Quod &c.

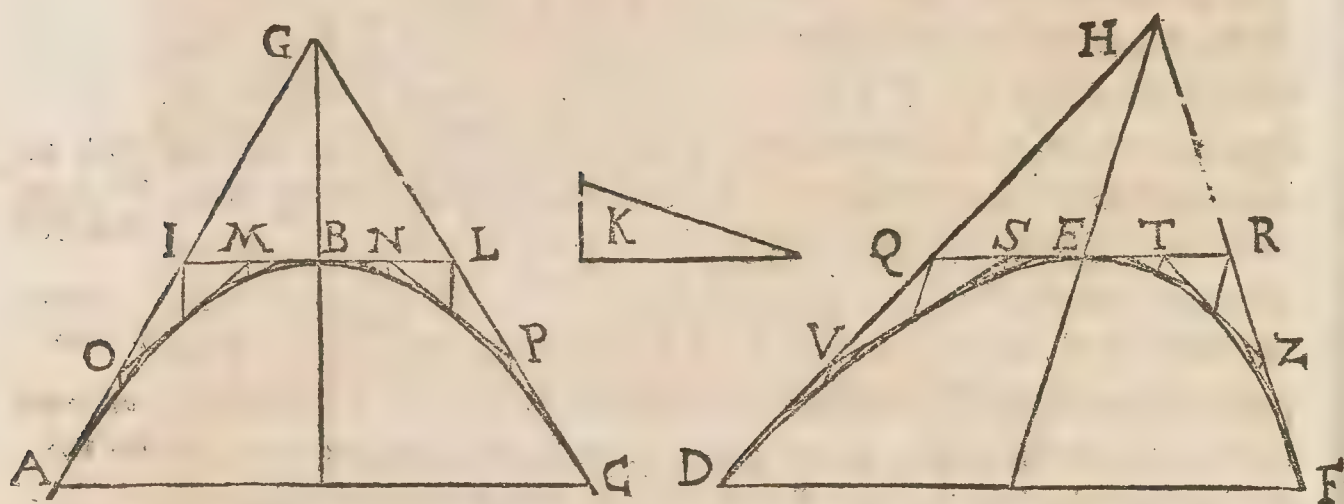
Lemma VI.

Si duæ parabolæ vtrique duas tangentes ad basim habuerit; erunt inter se trilinea mixta sub tangentibus, & curuis parabolicis contenta, vt sunt ipsa triangula sub tangentibus comprehensa,

Sint duæ parabola abc, def. quarum vtrique duas tangentes ad basim habeat ag, gc prioris, & dh, fh, posterioris parabola. Dico trilineum mixtum abcg, ad trilineum mixtum defh, esse vt triangulum agc, ad triangulum dhf.

D

Si enim



Si enim non est ita: habebit alterum ex trilineis, puta $abcg$, ad reliquum, maiorem rationem quàm triangulum agc , ad dhf . Estò spatium k excessus, quo trilineum $abcg$, maius est quàm ut sit in ratione triangulorum.

Lem. 2. Ducatur per verticem b , tangens il ; demissisq; ex punctis i , & l , lineis diametro parallelis (quæ diametro semiparabolarum erunt) ducantur tangentes om , np : & ex punctis o ; m ; n ; p , demittantur aliæ diametro ut supra; ducanturq; aliæ tangentes: Et hoc semper fiat, quousq; reliquæ simul omnes portiuncula, quæ sub tangentibus, & curua parabolica continentur; minores sint spatio k . Tunc. n. vniuersa figura tangentibus circumsepta, & in trilineo mixto $abcg$ inscripta, habebit adhuc ad trilineum $dchf$, rationem maiorem, quàm triang. agc , ad triangulum dhf .

Corol. 1.
Lem. 3.

Inscribatur iam etiam in altero trilineo mixto $dchf$. figura totidem laterum; ductis nimirum tangentibus toties, quoties ductæ fuerint in priori trilineo.

81. quin
91.

Quoniam verò est, ut triangulum igl ad triangulum qrh , ita duo simul triangula oim , nlp , ad duo simul uqf , trz . (sunt enim partes cum pariter multiplicibus in eadem ratione.) Et ut duo simul triangula oim , nlp , ad duo uqf , trz , ita quatuor triangula quæ sunt infra puncta o , m , n , p , ad quatuor illa, quæ sunt sub punctis u , f , t , z ; ob eandem causam & c. Erunt etiam omnia antecedentia simul (nempe figura inscripta in prio-

82. quin
91.

ri tri-

Problema Primum.

27

in trilineo mixto,) ad omnia consequentia simul (nempe ad figuram inscriptam in posteriori trilineo mixto) ut unum ad unum; nempe ut igl , ad qhr . Sive sumptis eorum quadruplis, ut agc ad dhf . Sed eadem inscripta figura habebat ad trilineum $d e f h$ maiorem rationem quàm sit trianguli agc ad $d h f$. Minus ergo erit trilineum mixtum $d e f h$, quàm figura sibi inscripta: totum sua parte. Quod est impossibile. Trilinea ergò sub tangentibus, & curuà parabolicà comprehensa, sunt inter se ut triangula sub iisdem tangentibus & basibus contenta.

Propositio II.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Sit parabola ABC , cuius diameter BD ; & sit inscriptum triangulum ABC . Dico parabolam sesquiterciam esse trianguli ABC ,

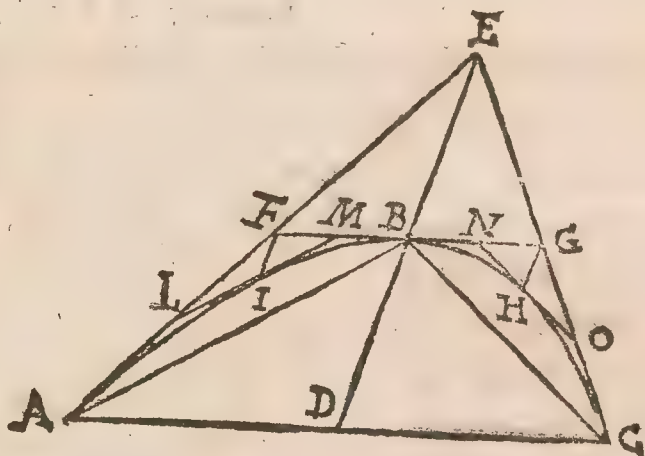
Ducantur duæ tangentés ad basim, quæ sint AE , CE . & FG . tãgat per verticem B Demissis deinde FI ,

GH diametro parallelis, ut sint diametri portionum AIB , BHC ; ducantur per I , & H tangentés LM , NO .

Erit ergo per Lemma præcedens, trilineum $ABCE$, ad trilineum $AIBF$, ut est triangulum AEC , ad AIF . siue ad FBE . Idem verò trilineum $ABCE$ ad aliud trilineum $BHCG$, erit ut idem triangulum AEC , ad triangulum BGC ; hoc est ad BGE , Coniunctim ergo, erit trilineum $ABCE$ ad duo trilinea $AIBF$, $BHCG$, ut triangulum AEC ad triangulum FEG , nempe ut 4, ad 2.

D 2

ad unum



ad vnum, & diuidendo, erit triangulum F E G ad duo trilinea AIBF, BHCG, vt 3, ad vnum. Trapezium autem AFCG, ad eadem trilinea erit vt 9. ad vnum; & per conuerfionem rationis, ad parabolâ erit vt 9. ad 8. & ad triangulum A B C, vt 9. ad 6, Qualium ergò partium parabola est 8, talium triangulum ABC est 6. Constat ergo parabolam inſcripti ſibi trianguli ſeſquiter- tiam eſſe. Quod erat &c.

Lemma V I I.

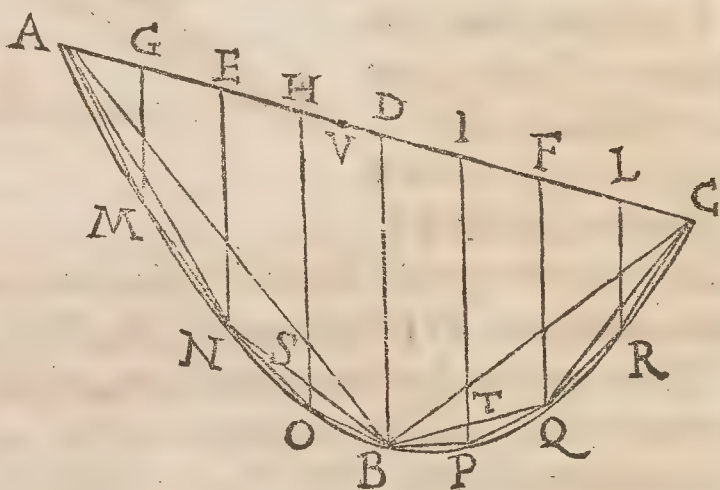
Si in parabola inſcribatur triangulum: eandem habens cum parabola baſim, eandemq; altitudinem. Inſcribantur etiam pariter & in reliquis portionibus duo alia triangula: Erit trian- gulum primò inſcriptum, octuplum alterutri poſteriùs inſcripti trianguli.

Demonſtratur hoc Lemma ab Archimede Prop. 21. De Qua- dratura parabolæ.

Lemma V I I I.

Si in parabola euidentè inſcribatur figura ex triangulis con- ſtans. Tam bina ipſius triangula (ſi prout ſibi mutuò reſpondent ita ſumantur) quàm etiam tota inſcripta figura, æquiponderabit ex puncto medio baſis ipſius parabolæ.

Eſto parabola a b c, cuius diame- ter ſit b d; & in- uerſa ſtatnatur ſi- gura, ita vt dia- meter ad horiſon- tem ſit perpendi- cularis. Seſtà de- inde utraq; ad, d c bifariam in e f; ite- rumque ſectis par- tibus bifariâ in g, h, i, l. &c. Ducantur g m, e n, h o, i p, f q, l r. &c. Paralle- le ad diametrum.



Inſcri-

Problema Primum.

29

Inscribaturque in parabola figura $amnobpqr$. (quæ dicitur euidentè inscribi.) Dico triangula quæ figuram inscriptam componunt, sibi inuicem, & prout sibi mutuò respondent ita sumantur, equiponderare ex puncto d . Præterea uniuersam figuram inscriptam, ex ipsis triangulis compositam, ab eodem puncto d , equiponderare.

Sumantur enim duo triangula sibi mutuò respondentia, puta, nob , bpq , quæ inter se equalia erunt; cum triangula anb , bqc suboctupla sint eiusdem trianguli abc : ipsa uero nob , bpq , suboctupla sint equalium triangulorum anb , bqc . Habebunt insuper contra gravitatis in rectis os , pt , quæ quidem ab angulis o , p , ducuntur ad puncta media basium, nb , bq , Cum uero osh , pti rectæ ad horizontem positæ sint perpendiculares, erunt prædicta triangula nob , bpq centralitè appensa ex punctis h , & i . Quamobrem ab equalibus distantijs hd , di , equiponderabunt. Et sic de reliquis figuræ triangulis. Quod erat primò propositum.

Lem. 9.

13 primi equiponder.

4. secundi eiusd.

8. primi eiusd.

Figura autem uniuersa euidentè inscripta componitur ex partibus equiponderantibus à puncto d ; quare etiam ipsa ex d puncto equiponderabit. Quod erat ostendendum, &c.

Lemma IX.

Positis iisdem. Si à parabola dematut uniuersa figura euidentè inscripta, etiam omnia segmenta parabolica, quæ circumrelinquuntur, ex puncto D . equiponderabunt.

Repetita enim eadem figura demonstratum est figuram inscriptam equiponderare ex puncto d . Ergo figura inscripta centrū gravitatis habet in perpendiculo horizontali db . (per 4. suppositionem) sed etiam parabola centrum gravitatis habet in diametro db , (per 4. secundi equiponderantium) ergo centrum omnium reliquorum segmentorum erit in diametro db . Quare ex puncto d equiponderabunt. per 3. suppositionem. Quod &c.

Cotollarium;

Constat etiam eodem prorsus argumento, reliquum figuræ euidentè

Problema Primum.

31

Accipiatur do quarta pars totius db ; & ducta ao , non solum triangulum abo , equiponderabit sibi ipsi ex puncto h ; sed etiam quodcumq; aliud triangulum habens verticem in a , & basim in recta db , sibi ipsi equiponderabit ex puncto eodem h .

Iam sic: Qualium partium ad est 15 , dh est 5 , & de est 3 . Ergo de ad eh , erit ut 3 . ad 2 . Cum autem demonstratum sit duo triangula afb , bgc , equiponderare ex puncto d ; triangulum verò boa , ex puncto h ; & cum duo prædicta triangula sint ad totum triangulum abd ut duo ad 4 .; erunt eadem ad triangulum abo , ut 2 . ad 3 .; nempe ut he ad ed reciproce. 7. Quamobrem duo illa triangula afb , bgc , cum triangulo abo , equiponderabunt suspensa ex puncto e . 6. Aequipond.

Sumatur deinde dp quarta pars ipsius do ; ducaturque ap . Iam; quia duo triangula flb , bmg equiponderant ex d itemque duo aif , gnc , equiponderant ab eodem puncto d ; omnia simul prædicta quatuor triangula equiponderabunt ex puncto d ; Quatuor autem prædicta triangula ad triangulum afb sunt ut duo ad 4 . Sunt autem afb , aod , subquadrupla eiusdem trianguli abd & propterea ad triangulum aop , erunt ut 2 . ad 3 . nempe ut he ad ed , reciproce. Aequiponderant ergo quatuor illa triangula cum triangulo aop , ex puncto e . Er- 6. Aequipond. go uniuersa simul figura euidenter inscripta $aiflbmgncba$ equiponderat triangulo abp . Sed eadem præponderabat triangulo abd , Minus ergò est triangulum abd quàm triangulum abp . totum sua parte: quod est impossibile.

Ponamus deinde præponderare triangulum abd ; & sit excessus quo præponderat aequalis spatio K .

Accipiatur aod quarta pars totius trianguli abd ; iterumque sumatur apd , quarta pars trianguli aod ; et hoc semper fiat, donec veniatur ad aliquod triangulum, puta apd , quod minus sit quàm spatium K . Tunc enim reliquum abp adhuc præponderabit duabus portionibus parabolicis afb , bgc . Sed idem triangulum ostendetur (eodem prorsus modo ut supra) equiponderare alicui figure intra parabolicas portiones inscripte: necesse igitur erit quòd portiones parabolicæ minores sint quàm figura illa

32 De Dimensione Parabolę

illa sibi inscripta; totum sua parte. Quod est impossibile. Aequi-ponderant ergo parabola inuersa (de mpto semitriangulo inscrip- to) ex puncto quod dictum est, Quod erat ostendend. &c.

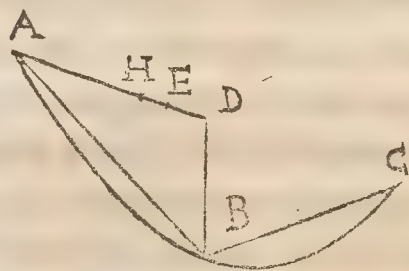
Corollarium

Hinc inferre possumus, quod si ex puncto e, recta ducetur diametro aequidistans, centrum praedictae figurae erit in produ- cta. Siquidem figura ex puncto e aequiponderat, & linea ex e ducta aequidistans diametro, cſt ad horizontem perpendicu- laris. Posset etiam demonstrari, nisi extrā rem esset, centrum praedictae figurae dictam parallelā ita secare, ut pars quae ter- minatur ad curuam sit ad reliquam vt 11. ad 12.

Propositio III.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem sibi basim, & ean- dem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, ex qua demptum sit dimidium trianguli inscripti: Sumptaq; DH, quæ sit tertia pars totius DA & DE quin- ta pars eiusdem; si parabola hu- iusmodi statuatur inuersa, ita vt diameter sit horizonti perpendi- cularis, æquiponderabit figura



ex puncto E, Sed triangulum ABD appensum est secundum centrum grauitatis ad punctum H libræ HD. Duæ autem pa- rabolicæ portiones residuæ appensæ sunt secundum centrum grauitatis ad punctum D; Ergo triangulum ABD, ad duas re- liquas portiones erit vt DE ad EH, reciprocè, nempe vt 3. ad 2: Sumptis autem antecedentiū duplis erit totum inscriptum trian- gulum ad reliquas portiones vt 6. ad 2. Conuertendo igitur, & componendo, erit ipsa parabola ad inscriptum sibi triangulum vt 8, ad 6. Nempe sesquitertia. Quod &c.

*preced.
Lem.*

Libet

33

Lemma XI.

[illegible]

Accipiatur a h c quarta pars totius trianguli a b c. Cum au-
tem d e sit ad horizontem perpendicularis, & triangulum b e c
E habeat

13 primi *habeat centrum gravitatis in recta ge; erit dictum triangulum*
equipon. appensum ad d. Triangulum vero bhc appensum ad punctum
i; quandoquidem ai tertia pars est totius ac, ipsa vero ab per-
pendicularis ad horizontem constituta est, Quoniam autem b
ec ad abc est ut unum ad 4., erit idem bec ad hbc ut unū
ad 3. nempe reciproce ut if ad fd, Aequiponderant ergo ex pun-
cto f, triangula bec, & hbc.

Sumatur iterum alc quarta pars trianguli ahc; Et quoniā
duo triangula bme, enc aequiponderant ex g (viti demonstra-
tum est) aequiponderabunt etiam suspensa ex d. Cum autem duo
dicta triangula bme, enc, sint ad triangulum bec, siue ad ip-
si aequale ahc, ut unum ad 4.; erunt ad lhc, ut unum ad 3;
nempe reciproce ut if ad fd. Aequiponderant ergo ex puncto
f. duo triangula bme, enc, cum triangulo lhc. Figura ergo
uniuersa euidenter inscripta intrā parabolam bec. aequiponde-
rat ex puncto f. cum triangulo lbc. Sed eadem preponderabat
triangulo abc. Necesse igitur est quod triangulum abc mi-
nus sit triangulo lbc. totum sua parte, Quod est absurdum.

Ponamus deinde preponderare triangulum abc, & sit exces-
sus quo preponderat equalis spatium K. Sumatur ahc quarta
pars totius trianguli abc. Iterum sumatur alc quarta pars
trianguli ahc, Et hoc semper fiat, donec ventum fuerit ad ali-
quod triangulum, puta alc, minus spatium K. Tunc enim trian-
gulum lbc adhuc preponderabit parabolæ bec. Sed eodem mo-
do, quo supra, demonstrabimus dictum triangulum lbc aequipon-
derare cuidam figuræ euidenter inscriptæ intrā parabolam bec.
Vnde sequeretur ipsam parabolam bec minorem esse aliqua figu-
râ sibi inscriptâ; totum videlicet sua parte. Quod est absurdum.
Aequiponderat ergo semiparabola, vti dictum est constituta, &
ex puncto f suspensa. Quod &c.

Corollarium.

Hinc patet, quod (cum semiparabola aequiponderet ex puncto
f.) si ab f demittatur recta horizonti perpendicularis, in hac de-
scripta erit centrum gravitatis semiparabolæ; aliàs enim non equi-
pon-

Problema Primum.

35

ponderaret ex f . Verùm quoniam etiam diameter parabolę a d horizontem perpendicularis constituta est, concludemus; quò d recta quę ex puncto f ducitur diametro equidistans, transit per centrum semiparabolę.

Propositio IV.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, cuius diameter BD, triangulum verò inscriptum sit ABC, Dico parabolam dicti trianguli esse sesquitertiam.



Sumatur, qualium partium tota DC est 24. talium DE 8.; DF 9; & DG, 12. Eritque earundem EF vna, & FG tres, Ductis verò EH, FI, GL, diametro parallelis, erit in EH centrum trianguli BDC; in FI centrum semiparabolę DBMC, & in GL centrum portionis BMC,

13. prim.
equip.

Lem pra
ced.

4. sec. a
quip.

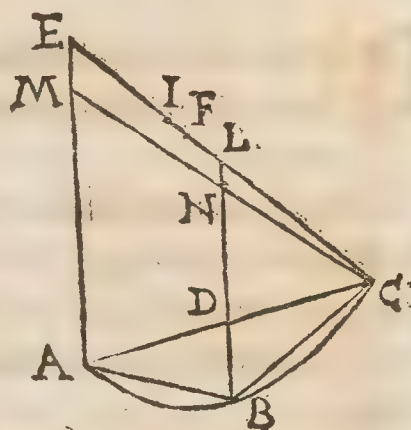
Ponatur centrum trianguli esse punctum quodcumque H. Item centrum semiparabolę esse punctum quodcumque I (quamquàm huiusmodi puncta extrà ipsas figuras vbicunq; libuerit sumantur, tamen verum semper eodẽ modo inferemus.) iunctà deinde HI, & productà, in ipsa HI erit centrum portionis parabolice BMC; quod cum sit etiam in recta GM producta, necessariò erit in communi concursu L. Parabola ergò BMC ad triangulum DBC erit reciprocè vt HI ad IL, hoc est, vt EF ad FG, nempe vt vnum ad 3. Componendo ergo, sumptisq; duplis, erit tota parabola ad totum triangulum vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum, &c.

8. prim.
equipon

Poterat hæc demonstratio produci etiam hoc modo, præmissò hoc Lemmate.

Si parabola ad extremum basis lineam habuerit diametro parallelam, & diametri quadruplam, ductoq; tercio latere, compleatur triangulum. Vniuersa hæc figura equiponderabit ex puncto tertij lateris, in quo sic diuiditur ut pars ad curuam terminata sit ad reliquam ut 5. ad 3.

Est parabola abc , cuius diameter db statuatur ad horizontem perpendicularis; considereturque ipsa parabola inuersa: Tum ad alterutrum basis a c extremum, puta ad punctum a , adiungatur recta ac , diametro equidistans, & ipsius diametri quadrupla. Ducto deinde tertio latere ec trianguli aec , secetur in f , ita ut cf . ad fe sit ut 5. ad 3. Dico huiusmodi figuram ex-



Ostende puncto f equiponderare. Quoniam

cur infra enim ce ordinatim applicatur ad diametrum ac ; erit tota figura $eabc$ semiparabola. Ergo iisdem rationibus, eodemq; progressu, quo vsumus in lemmate. 11, ostendemus totam figuram equiponderare ex f . Sumatur iam ei octo earum partium, quallium tota ec est 24. & el 12. & ef 9, Eritq; if earundem una, & fl 3. Ergo cum parabola abc pendeat ex puncto l , appensa ad ipsum secundum centrum grauitatis; triangulum uerò aec ex puncto i ; erit parabola abc ad triangulum aec ut reciproce if ad fl , nempe ut unum ad 3.; siue ut 4. ad 12.

& propterea ad triangulum abc ut 4. ad 3. & c. Est enim abc quartapars ipsius aec & c. Constat ergo parabolam sesquitertia esse inscripti sibi trianguli.

Quod assumptum est, nempe rectam ce ordinatim applicari ad diametrum ac , ostendemus hoc modo.

Si enim non est ordinatim applicata ce , applicetur ordinatim; eritq; $mabc$ semiparabola; & quia sunt æquales ad , dc , erit mc secta bifaria in n . Ergo ma sesquitertia est ipsius n parabola b ; sed etiam ea ob constructionem sesquitertia est ipsius lb ;

ergo

Problema Primum.

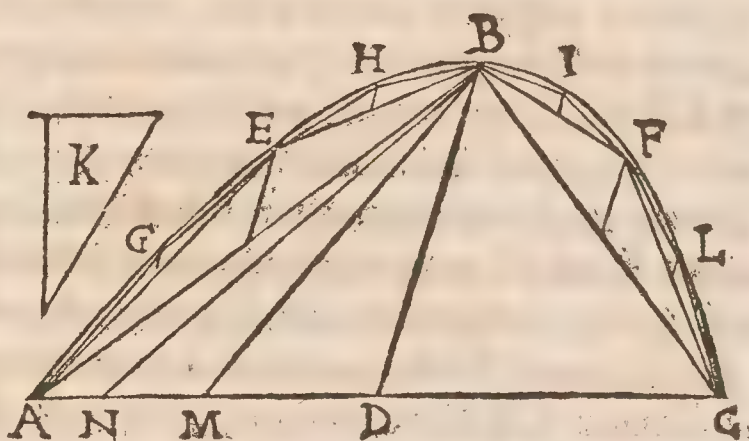
37

ergo & reliqua em sesquitercia est relique In; & ec sesqui-
 aertia ipsius cl. quod est impossibile. Est enim dupla, non au-
 tem sesquitercia. Quare nulla alia præter ce ex puncto c ordi-
 natim applicari potest ad diametrum ae. Quod &c.

Propositio V.

Parabola sesquitercia est trianguli eandem ipsi basim, ean-
 demq; altitudinem habentis.

Esto parabola
 ABC, cuius dia-
 meter, BD, trian-
 gulum inscriptum
 ABC; Dico pa-
 rabolam esse ses-
 quiterciam trian-
 guli ABC. sibi
 inscripti.



Sienim ita non
 est, neq; triangu-
 lum ABC erit triplum duarum simul reliquarum portionum A
 EB, BFC. Sed erit vel magis quam triplum, siue minus quam
 triplum.

Sit primò minus quam triplum, eruntq; duæ reliquæ portio-
 nes magis quam tertia pars trianguli ABC. Esto excessus æ-
 qualis spatio K, & inscribantur intrà portiones primùm trian-
 gula AEB, BFC; iterumque in reliquis portiunculis quatuor
 triangula AGE, EHB, BFF, FLC; deinde octo &c. & hoc
 semper donec excessus portionum supra inscriptas euidentèr fi-
 guras sit minor spatio k. Tunc .n. erunt inscriptæ figuræ adhuc
 maiores quam tertia pars trianguli ABC.

Sumatur iam triangulum ABM quarta pars totius trianguli
 ABC. Et quoniam ABC quadruplum est tam trianguli ABM, ^{ex Lm.}
 quam triangulorum AEB, BFC simul sumptorum, æquale erit ^{7.}
 trian-

triangulum ABM duobus simul triangulis AEB , BFC ; & propterea triangulum MBC triplum erit duorum simul triangulorum AEB , BFC .

Accipiat¹²ur iterum triangulum ABN quarta pars totius trianguli ABM . Cum ergo ABM quadruplum sit ipsius ABN ; & duo AEB , BFC , quadrupla sint quatuor simul subsequentiũ triangulorum AGE , EHB , BIF , FLC ; cumque anteceden-
12 Quin- ti. tia sint æqualia, æqualia erunt etiam consequentia; & propterea cum triangulum NBM triplum sit trianguli ABN , triplum etiã erit idem triangulum NBM . quatuor simul triangulorum AGE , EHB , BIF , FLC . Et ut vnum ad vnum ita omnia simul ad omnia. Quare totum simul triangulum NBC , triplum erit figurarum euidentè intrà portiones inscriptarum. Sed triangulum ABC minus erat quàm triplum earundem: Ergo ABC minus est quàm NBC totum sua parte. Quod est absurdum &c.

Ponamus deinde triangulum ABC esse plus quam triplum duarum simul reliquarum portionum. Esto: & excessui, quo est magis quàm triplum, æquale sit spatium k .

Accipiat¹²ur ABM quarta pars totius trianguli ABC . Iterum sumatur ABN quarta pars ipsius ABM . Et hoc semper fiat donec veniatur ad aliquod triangulum, puta ABN , quod minus sit spatio K . Eritq; adhuc triangulum NBC magis quàm triplum duarum portionum. Sed eadem prorsus ratione, & ordine quo supra, ostendemus triangulum NBC triplum esse cuiusdam figuræ intrà portiones euidentè inscriptæ; Necesse igitur erit quòd portiones ipsæ minores sint quàm figuræ intrà ipsas descriptæ: Totum sua parte. quod est impossibile.

Triangulum ergo ABC duarum reliquarum portionum triplum est; & componendo; & per conuersionem rationis parabola ad suum triangulum erit ut 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum &c.

Lemma XII.

Si parabola tres tangentes habuerit, duas ad basim, tertiam verò per verticem: Erit triangulum sub tangentibus compræhensum, reliquæ figuræ (demptà parabolà) triplum.

Est

Est parabola
abc, cuius dia-
meter bd; tan-
gentes ad basim
ae, ce; per uerti-
cem uerò fbg.

Dico triangu-
lum feg, sub
tangētibus com-
prehensum reli-
qua figure mix-
tae abcgf (dē

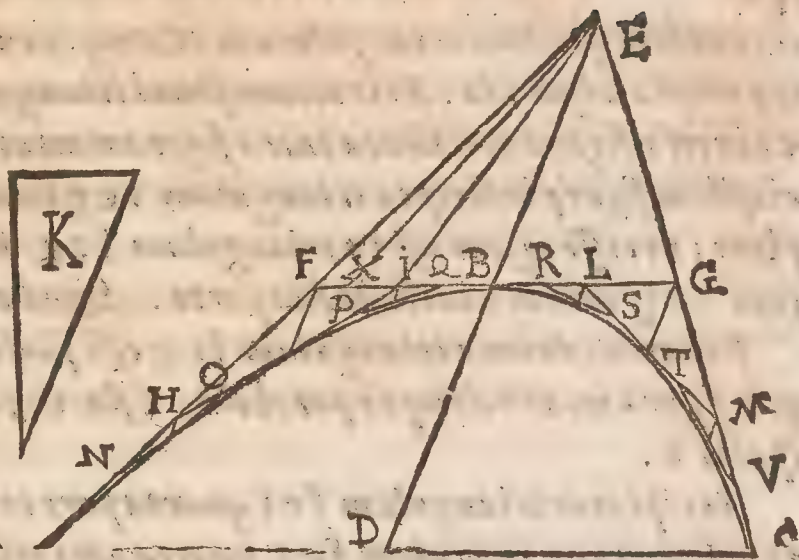
pta scilicet parabola) triplum esse.

Si enim non est triplum, erit certè uel magis, uel minùs quàm
triplum.

Sit primò minùs quàm triplum; eritq; reliqua figura mixta
abcgf, magis quàm tertia pars trianguli feg. Sit excessus
K. Ducanturq; per uertices abscissarum portionum tangentes
hi, lm; Iterumque per uertices subsequentium portionum, tā-
gentes agantur no, pq, rs, tu. & hoc semper; donec excessus
figurae mixtae abcgf, supra figuram ex triangulis constan-
tem nopqrstugt, minus aliquando relinquatur quàm spa-
tium K. Tunc enim erit ad huc figura ex triangulis inscripta
maior quàm tertia pars trianguli feg.

Accipiatur triangulum fei quarta pars trianguli feg; erit
que triangulum fei aequale duobus simul triangulis hfi, lgm:
(cum tam ista duo, quàm illud solum, subquadrupla sint eiusdē Lem. 3.
trianguli feg) Ergo triangul. ie g triplum erit duorum simul
triangulorum hfi, lgm.

Sumatur iterum triangulum fex quarta pars ipsius fei. Cum
que sit fei quadruplum trianguli fex, duo uerò triangula hf
i, lgm quadrupla sint quatuor simul triangulorum nho, piq Lem 3.
rls, tmu, & antecedentia aequalia; etiam consequentia aqua-
lia erunt; eritq; triangulum fex, aequale quatuor predictis tri-
angulis nho, piq, rls, tmu: & propterea xei triplum erit
eorum-



Quin eorumdem quatuor triangularum. Cumq. sit ut unum ad unum, ita omnia ad omnia: Erit totum simul triangulum xeg triplum uniuersa figura rectilinea intra figuram mixtam inscripta. Sed eiusdem figure inscripta triangulum feg minus erat quàm triplum; necesse igitur est ut triangulum feg minus sit quàm ipsum xeg totum uidelicet sua parte. Quod est impossibile.

Ponamus deinde triangulum feg esse plusquàm triplum reliquę figura mixta demptà parabolà. Esto & sit excessus equalis spatio k .

Accipiatur triangulum fci quarta pars totius feg : & iterum sumatur triangulum fex quarta pars trianguli fci : & hoc fiat semper donec veniatur ad aliquod triangulum, puta fex , quod minus sit spatio K . Eritq. triangulum xeg adhuc maius quàm triplum reliqua figura mixta $abcgf$. Sed eadem penitus ratione, atque ordine ut supra, ostendemus triangulum xeg esse triplum cuiusdam figure intra figuram mixtam $abcgf$ descriptę. Necesse ergo erit, ut figura mixta $abcgf$ minor sit quàm aliqua figura sibi inscripta; totum sua parte. Quod est absurdum.

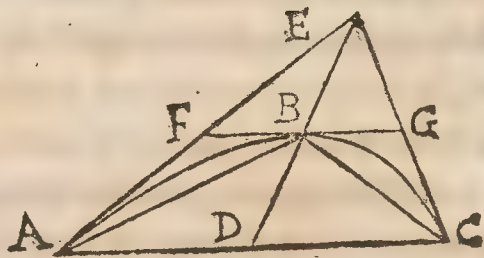
Si ergo parabola tres tangentes habuerit, ut positum est, erit triangulum sub tangentibus contentum, reliqua figurę, demptà parabola triplum. Quod erat propositum &c.

Propositio VI.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC , cuius diameter BD ; duę tangentes AE , CE ad basim, & tertia FBG per verticem. Dico parabolam sesquitertiam esse inscripti sibi trianguli ABC .

Triangulum enim FEG ad



duo

41

quitertia. Quod erat &c.

Lemma XIII.

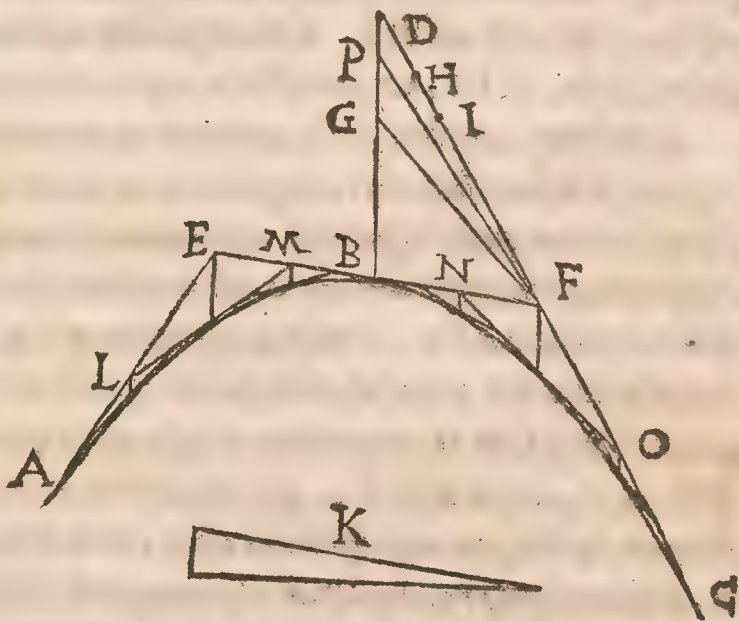
minatur fit ad reliquam vt 9. ad vnũ.

ut q. ad unum; Di

ticali ebd) equiponderare ex puncto h.

F

b c f.



b, c, f, appense erunt secundum centrum gravitatis ad punctum b, sine ad punctum d. Triangulum verò bdf ob eandem causam, & eodem modo pendebit centraliter ex puncto i. (quandoquidem si dupla est ipsius id; & ipsa db ad horizontem perpendicularis.) Iam si ista magnitudines non aequiponderant ex h puncto libra di, altera ipsarum preponderabit. Esto; & preponderent primò dua portiones mixtæ abe, bcf. Sitq; excessus quo preponderant, aqualis spatio K.

Inscribatur intrà mixtas portiones figura ex tangentibus, ut iam sæpè factum est. Donec excessus portionum suprà figuram rectilineam inscriptam minor sit spatio K. Tunc enim figura inscripta adhuc preponderabit triangulo bdf.

ex Lem. 3. Accipiatur triangulum dfg quarta pars totius trianguli dfb; eritq; triangulum dfg aequale triangulo nfo (cum ambo sint subquadrupla eiusdem trianguli dfb) & propterea triangulum dfg ad duo triangula lem, nfo, erit ut unum ad 2. ergò bgf ad duo triangula lem, nfo, erit ut 3. ad 2. nempe reciprocè ut dh ad hi. Triangulum igitur bgf, & duo triangula lem, nfo, ex puncto h aequiponderant inuicem.

en Lem. 3. Sumatur iterùm dfp quarta pars totius dfg, eritq; dfp aequale duobus simul triangulis quæ sunt infrà puncta n, & o. (Sunt enim quarta partes equalium triangulorum dfg, nfo, Propterea triangulum dfp ad quatuor simul triangula l, m, n, o, erit ut unum ad 2. Sed triangulum pfg, ad eadem quatuor triangula erit ut 3. ad 2. nempe reciprocè ut dh, ad hi. Aequiponderat igitur triangulum pfg, cum quatuor dictis triangulis l, m, n, o, ex puncto h. Quamobrem uniùersa figura intrà portiones inscripta aequiponderabit cum triangulo bpf ex puncto h. Sed eadem preponderabat triangulo bdf. Necesse igitur est ut triangulum bdf minus sit quàm triangulum bpf, totum sua parte. Quod esse non potest,

Ponamus deinde preponderare triangulum bdf duabus simul portionibus mixtis abe, bcf; & ponatur excessus quo preponderat, æqualis spatio K.

Accipiatur triangulum dfg quarta pars ipsius dfb. & ite-

Problema Primum.

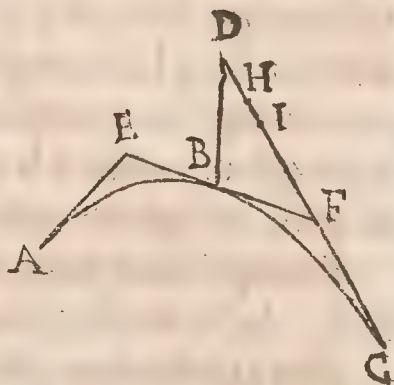
43

cum sumatur dtp quarta pars ipsius dfg, & sic semper, donec veniatur ad aliquod triangulū, puta dfp minus spatio K. Tunc enim reliquum triangulū adhuc preponderabit portionibus mixtis abe, bcf. Sed ostendemus eodem penitus argumento, atq; ordine ut supra, idem triangulum pfb equiponderare alicui figurę intra portiones abe, bcf, descriptę. Neceſſe ergo erit quod ipsę duę portiones mixtę minores sint quàm aliqua sibi inscripta figura; totum sua parte; quod est absurdum. Constat ergo quod propositum fuerat.

Propositio VII.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eādem altitudinem habentis.

Esto, ut in præcedenti lemmate, parabola ABC. cum duabus tangentibus lateralibus, siue ad basim, AE, CD; atque EBF per uerticem. Concipiaturq; diameter ad horizontem perpendicularis; & ablata parabola, detractoque dimidio uerticis trianguli; accipiaturn DI tertia pars totius DF, & sit DH sesquialtera ipsius HI. Aequiponderant ergo (per lemma præcedens) ex puncto H librę DI, duę magnitudines.

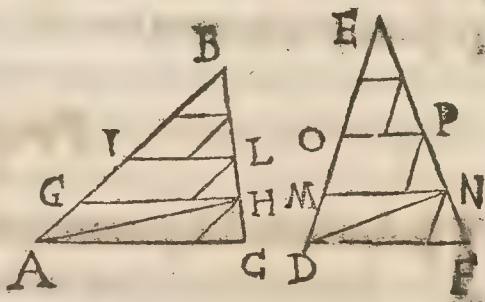


Nempe hinc duę portiones ABCFE appensę ad punctum D; inde uerò triangulum DBF appensum ad punctum I. Quamobrem DBF ad ABCE, erit ut recprocè DH ad HI, nempe ut 3. ad 2. Sumptisq; antecedentium duplis, erit totum uerticale triangulum EDF ad reliquam figuram mixtam triplum. Propterea (ut in Propositione sexta demonstratum est) parabola inscripti sibi trianguli sesquitertia erit. Quod erat propositum demonstrare.

Lemma XIV.

Si duorum conorum latera trianguli per axem secta fuerint in partes æquales numero, & magnitudine, ductisque per puncta sectionum planis basi parallelis, super sectionum circulis intelligantur cylindri æquealti intrâ conos descripti: Erit ut primus conus ad secundum, ita omnes cylindri primi conî, ad omnes cylindros secundi conî,

Sint duorum conorum triangula per axem abc , def , & duorum latera, puta ab , de , secantur in partes numero æquales; nempe in totidem partes dividatur tam ab , quàm de ; sintq; partes lateris ab æquales inter se, & partes de item æquales inter se. Ductis deinde per singula sectionum puncta planis gh , il &c. basi ac parallelis; item planis mn , op &c. basi df parallelis; Concipiantur cylindri ah , gl &c. eiusdem altitudinis intrâ conum abc descripti; itemq; in altero cono alij cylindri æquealti intelligantur; Dico esse ut conus abc ad conum def , ita omnes cylindros conî abc ad omnes cylindros conî def ,



Concipiantur duo conî gah , mdn ; quorum vertex sint a & d , bases verò circuli gh , mn .

Iam; Cylindrus ah ad conum gah , est ut cylindrus dn ad conum mdn . (nempe in ratione tripla) conus verò gah ad conum gbh in eadem basi, est ut ag ad gb ; siue (propter divisionem in constructione adhibitam) ut dm ad me , hoc est ut conus mdn ad conum men . Conus denique gbh ad conum similem abc , est ut cubus gb ad cubum ba ; siue (propter constructionem) ut cubus me ad cubum ed , nempe ut conus men ad conum similem def . Quare ex æquo cylindrus ah ad conum abc , erit ut cylindrus dn ad conum def . Et permutando cylindrus ah ad cylindrum dn erit ut conus abc ad conum def .

Uterius. Cylindrus etiam gl ad cylindrum mp . eodem per-
itus

Problema Primum.

45

nitus modo demonstratur esse ut conus gbh ad conum men , si-
ue ut conus abc ad conum def ; & hoc modo semper. Propre- ^{11 Quin}
reà ut unus cylindrus ah ad unum dn , ità quilibet anteceden- ^{ti.}
tium ad quemlibet consequentium, ergò ut unus ad unum, nem- ^{12 Quin}
pe ut conus abc ad conum def , ità omnes simul cylindri coni ^{ti.}
 abc , ad omnes simul cylindros coni def . Quod &c.

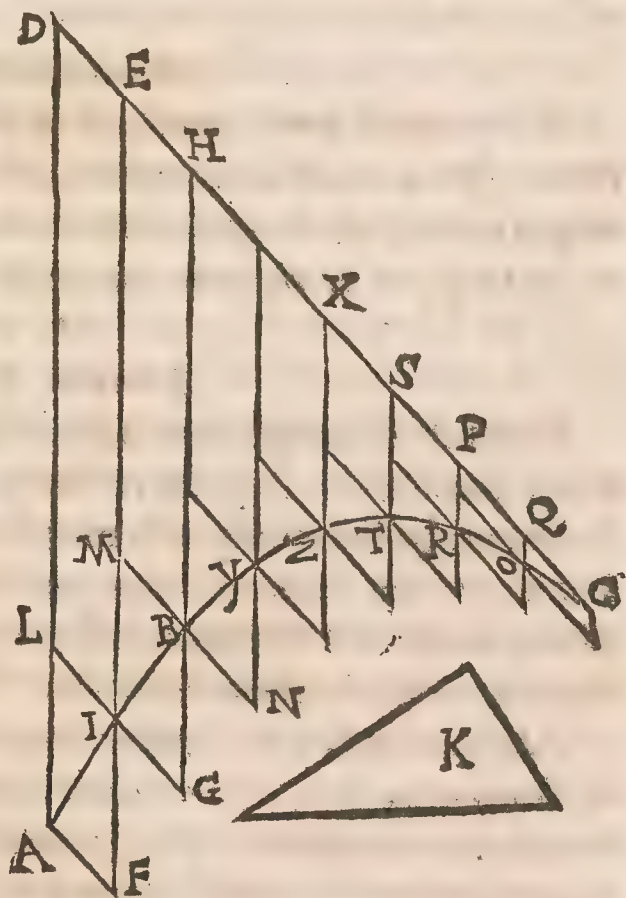
Lemma XV.

Dato trilineo mixto, sub lineà parabolica, eiusq; tangente,
& alià rectà diametro parallela compræhenso; possibile est in
dato trilineo figuram inscribere constantem ex parallelogram-
mis æquealtis, quæ figura deficiat à trilineo mixto minori dif-
ferentià quàm sit quæcumq; data magnitudo.

Esto linea parabolica a
 bc , cuius tangens cd , &
diametro æquidistans sit a
 d . Dico intrà trilineū mix-
tum $abcd$. describi posse
figuram constantem ex pa-
rallelogrammis æquealtis,
quæ figura deficiat à trili-
neo mixto, minori defectu
quàm sit spatium quodcun-
que datum K .

Secetur enim dc bifari-
am in x ; iterumq; partes bi-
fariam diuidantur in h &
in p ; semperq; hoc fiat, do-
nec veniatur ad sectionem
aliquam puta de , eiusmo-
di, ut parallelogram. ade ,

minus sit spatium K . (Quod autem hoc fieri possit, patet. Si enim
compleatur parallelogrammum adc , ex ipso per continuam bi-
sectionem semper detrahatur dimidium; ergò tandem remane-
bit



46 De Dimensione Parabolę

bit a e minus quolibet dato spatio .) Ducantur deinde ex punctis sectionum rectę ef, hg &c. æquidistantes ipsi da; per puncta autem i, b &c. ubi parallele secant parabolam, ducantur ig, mn &c. æquidistantes tangenti cd. Et factum erit quod oportebat.

36. Pri-
mi.

Parallelogrammum enim co, æquale est ipsi op, & addito communi or, erunt duo co, or, equalia ipsi rq, siue ipsi rf: additoq; cōmuni rt, erunt tria co, or, rt, equalia ipsi tp, hoc est ipsi tx, additoq; cōmuni tz. & sic semper procedendo, erunt deniq. omnia simul parallelogrāma cortzybia equalia ipsi parallelogrāmo ae. nempe minora spatio k. Multo igitur minor eris defectus figura inscriptę ex parallelogrammis æquealtis compositę, à trilineo mixto abcd, quàm sit propositum spatium K. Quod erat &c.

Corollarium.

Hinc notabimus, quod eodem prorsus modo, eademq; operatione, figura etiam circumscribitur dato trilineo mixto, constans ex parallelogrāmis æquealtis, ita ut excessus figura circumscriptę suprà ipsum trilineum, minor sit quocunque spatio dato K.

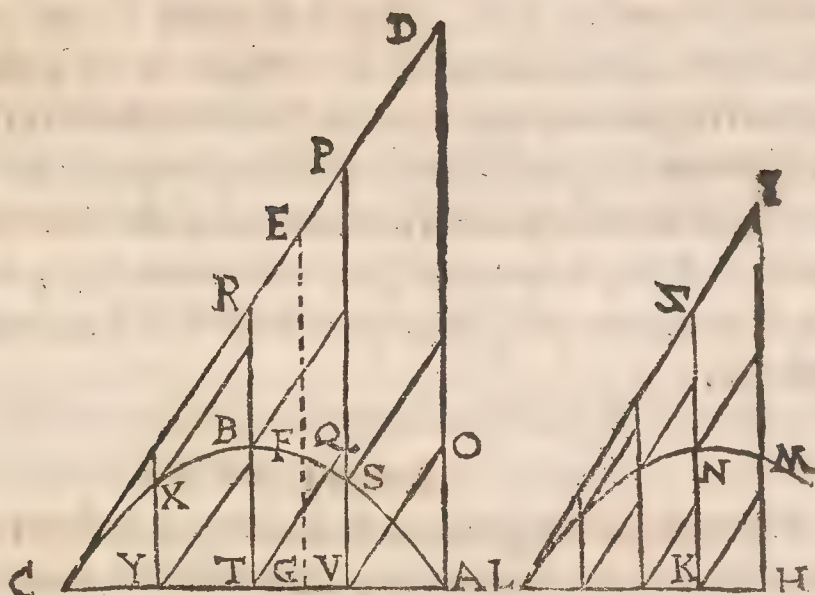
Lemma XVI.

Si parabola tangentem habuerit: & insuper duas rectas diametro parallelas, quę duo trilinea abscindant sub tangente, & lineā parabolicā comprahensa; Erit figura ex parallelogrammis æquealtis constans in maiori trilineo descripta, ad figuram eiusdem speciei in minori trilineo descriptam, ut cubus maioris tangentis ad cubum minoris.

Estō parabola abc, cuius tangens cd; & diametro parallela sit utraque da, ef; ut fiant duo trilinea mixta abcd maius, & fbce minus. Dico, si in utroque trilineo inscribatur figura constans ex parallelogrammis equalibus utrimque numero; (ut in precedenti Lemmate expositum est) figuram trilinei abcd, ad figuram trilinei fbce, esse ut cubus dc ad cubum ce.

Concipiamus, (ad evitandam linearum multitudinem, & confusio-

fusionem) tri-
angulum gec
cum sua portio
ne parabolę in-
sercepta fbc,
transferri, et ef-
se idem quod
positum est sub
signis hil. tri-
lineumq. fbc
e esse idem cū
trilineo mnli.



Inscribatur
iam in utroque
trilineo abcd, & mnli, (quod quidem representat ipsum
fbce trāslatum) figura constans ex parallelogrammis aequal-
tis; & sit idem numerus parallelogrammorum in utroq. trilineo.
Intelligatur etiam conus, cuius uertex c, siue l; & diameter
basis sit, hinc quidem ad, inde uerò hi. Sintque in singulis
coni segmentis cylindri æquealti op, qr &c.

Iam parallelogrammum bp ad fd, est ut recta br ad fp, ^{1. sent.}
hoc est ut quadratum rc ad cp: hoc est ut quadratum rt ad ^{ob para-}
quadratum pu: hoc est ut cylindrus qr ad cylindrum op. ^{bolam.}
Eodem modo, erit parallelogrammum xr ad fd, ut cylindrus
yr ad ud. Ergo erunt duo simul parallelogramma bp, xr, ^{24 Quis}
ad fd; ut duo simul cylindri tp, yr, ad cylindrum ud. ^{ii.} Pro-
cedendo itaque semper hoc modo, & denique componendo, erit to-
ta inscripta figura ex parallelogrammis constans in trilineo ab
cd, ad parallelogrammum fd, ut omnes simul cylindri, qui in
cono acd, ad cylindrum ud.

Amplius; parallelogrammum fd ad ni compositam habet
rationem, ex ratione rectę sp ad nz, siue quadrati pc ad zl
(sunt enim due figura, sed circa eandem parabolam translata)
siue quadrati pu ad zk; Et ex ratione rectę dp ad iz. Est
ergo parallelogrammum fd ad ni ut cylindrus ud ad ki,

Deni-

48 De Dimensione Parabolæ

Denique parallelogrammum ni ad totam figuram inscriptam in-
 ostende- tralincum mnlī, est ut cylindrus ki ad omnes cylindros
 tur eodē inscriptos intrā conum hli, Propterea ex æquo erit figura ex
 modo vi in altera parallelogrammis constans inscripta in maiori trilineo abcd,
 figura. ad figuram ex parallelogrammis inscriptam in minori trilineo
 mnlī, ut omnes cylindri in cono acd ad omnes cylindros in co-
 Lem. 14. no hli. Nempe ut conus acd ad conum hli, hoc est ad conum
 gcc (qui idem est.) Nempe ut cubus dc ad cubum ce. Quod
 erat &c.

Lemma XVII.

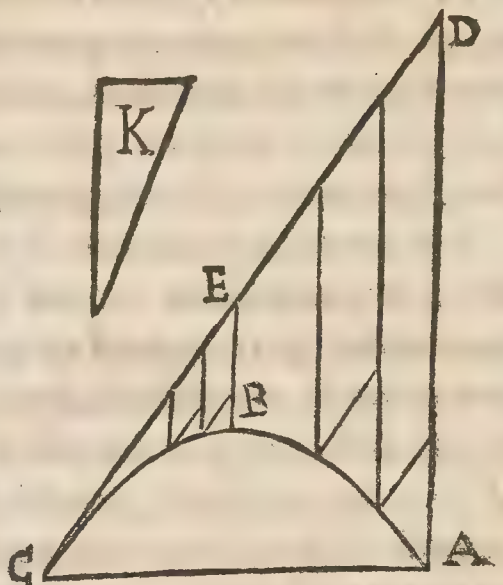
Si parabola tangentem habuerit, & insuper duas diametro
 parallelas rectas lineas, quæ duo trilinea mixta abscindant; E-
 runt inter se abscissa trilinea vt cubi suarum tangentium.

Est parabola abc, cuius tan-
 gens cd : & diametro parallela
 sit utraque da, eb. Dico triline-
 um mixtum abcd ad trilineum
 mixtum bce, esse ut cubus tan-
 gentis dc, ad cubum tangentis
 ce.

Si enim ita non est, sit alterum
 illorum, si possibile est, maius quā
 ut habeat dictam proportionem ad
 reliquum ; & ponamus illud esse
 abcd, maius quā quod esse de-
 beret excissa K.

Inscribatur intrā trilineum abcd figura ex parallelogram-
 mis æque altis constans ; ita ut à trilineo deficiat minori defectu
 Lem. 15 quā sit spatium k (hec autem fieri posse ostendimus) Habebit-
 que adhuc figura inscripta ad reliquum trilineum bce maiore
 rationem quā cubus dc ad cubum ce.

Inscribatur intrā alterum trilineum bce figura eiusdem spe-
 ciei, & eiusdem numeri parallelogrammorum cūm descripta in-
 tra



Preoblma Primum.

49

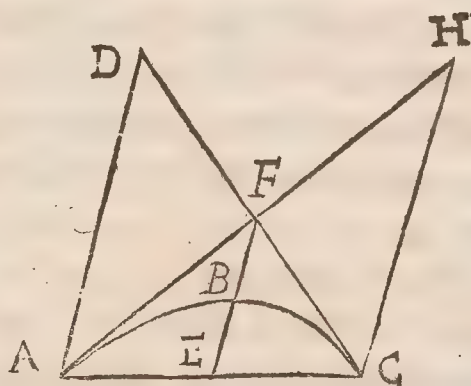
tra trilineum $abcd$. Erit ergò figura inscripta trilineo $abcd$ ad figuram inscriptam trilineo bce ut cubus dc ad cubum ce . Sed eadem figura inscripta trilineo $abcd$ ad trilineum bce habet maiorem rationem quàm cubus dc ad ce . Minus ergo est trilineum bce quàm inscripta sibi figura. totum suaparte. Quod est impossibile. Constat ergo propositum.

Propositio VIII.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC , cuius diameter BE , tangentes verò AF , CF , productæ eousque, donec occurrant ipsis AD , CH , diametro parallelis. Iunganturq; rectę lineę AB , BC . (licet in figura omisse sint.) Dico parabolā trianguli ABC esse sesquitertiā.

Erit enim $ABCD$ ad trilineum BCF , ut cubus DC ad cubum CF , nempe ut octo ad unum. (cum enim sit ut AE ad EC , ita DF ad FC , erit DF æqualis ipsi FC ; cubusq; DC octuplus cubi CF .) Item trilineum $CBAH$ ad trilineum BAF , est ut octo ad unum. Coniunctim ergò erunt duo trilinea $ABCD$, $CBAH$, ad spatium $ABCF$. ut octo ad unum. Et diuidendo bis, erunt duo triangula AFD , CFH , ad spatium $ABCF$, ut 6. ad unum. Quamobrem triangulum AFD , siue AFC ad spatium $ABCF$ erit ut 3, ad unum; & ad parabolam erit ut 3. ad 2. uel ut 6. ad 4. Propterea parabola erit ad triangulum ABC ut 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare, &c.



Lem. præcedens.

2. Sexti.

G

Lem-

Lemma XVIII.

Si fuerit ut prima magnitudo ad secundam, ita tertia ad quartam; Et hoc quotiescunq; libuerit. Fuerintq; omnes primæ inter se, item omnes tertiæ magnitudines inter se æquales. Erunt omnes primæ simul ad omnes secundas, ut sunt omnes tertiæ simul, ad omnes quartas magnitudines.

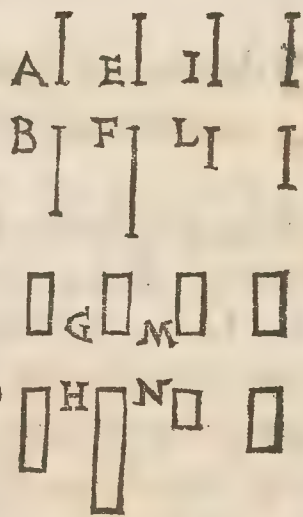
Esto ut a prima ad b secundam, ita c tertia ad d quartam. Et iterum ut e prima ad f secundam, ita g tertia ad h quartam; Et sic quotiescunq; libuerit. Sintq; omnes primæ a, e, i, &c. item omnes tertiæ c, g, m, &c. inter se æquales.

Dico omnes primas simul ad omnes secundas simul, ita esse ut sunt omnes simul tertiæ, ad omnes quartas magnitudines.

Quoniam enim conuertendo est ut b ad a ita d ad c. Item ut f ad e; siue ad æqualem a, ita h ad g, siue ad c; erunt simul b f ad a, ut sunt d h simul ad c. Hoc modo procedendo, ostendemus omnes secundas simul esse ad a, ut sunt omnes quartæ simul ad ipsam c. Ipsa verò a ad omnes primas est ut c ad omnes tertiæ (sunt enim æque submultiplices) Ergo ex æquo omnes secundæ ad omnes primas, sunt ut omnes quartæ simul ad omnes tertiæ. Conuertendo igitur constat quod erat propositum demonstrare.

24. quin-
ti.

15 quin-
ti.



Lemma XIX.

Si parabola tangentem habuerit ad basim; ex alia verò parte rectam diametro parallelam. Erit triangulum sub tangente, & parallela diametro, ipsaq; basi compræhensum, ipsius parabolæ triplum.

Esto

Est parabola abc , cuius tangens cd , parallela diametro sit ad ; Dico triangulum adc esse parabola ipsius abc , triplum.

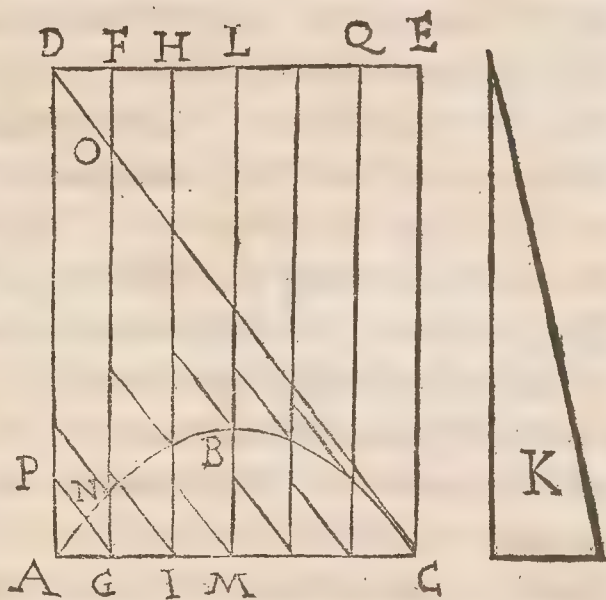
Si enim non est triplum parabola, per conversionem rationis, non erit sesquialterum trilinei $abcd$; & propterea (duplicato antecedente) totum parallelogrammum ae non erit triplum trilinei $abcd$.

Trilineum ergo $abcd$ erit vel plus, vel minus quam tertia pars parallelogrammi ae . Ponatur primum esse plus quam tertia pars, & sit excessui equale spatium K .

Inscribatur intra trilineum $abcd$, figura constans ex parallelogrammis aequaltis, deficiensque ab ipso trilineo minori defectu quam sit ipsum spatium K . Et inscripta iam sit eiusmodi figura. Erit ergo adhuc figura inscripta plus quam tertia pars parallelogrammi ae .

Concipiatur circa rectam ad , circulus, qui sit basis cuiusdam cono verticem habentis in puncto c . & super eadem basi intelligatur cylindrus ae eiusdem altitudinis cum ipso cono; sectusque sit tam conus quam cylindrus planis basi parallelis per singulas rectas fg , hi , lm & c. ductis. Concipiantur etiam intra conum acd cylindri aequalti po , oi & c.

Iam sic: Parallelogrammum af ad nd , est ut recta da ad on : nempe ut quadratum dc ad quadratum co ; siue, ut quadratum da ad quadratum og , nempe, ut cylindrus af ad cylindrum po , Et sic, semper. Suntq; omnes primae magnitudines aequales parallelogrammo af , & ideo aequales inter se; omnes autem tertiae magnitudines aequales cylindro af , atque ideo inter se. Erunt ergo omnes primae simul, hoc est parallelogram-



I. sexti.

ob parabola.

o^o simili-
tud. trian-
gul.

52 De Dimensione Parabolæ

nam aq, ad omnes secundas simul, nempe ad figuram inscriptam in trilineo abcd, ut sunt omnes tertia simul, nempe cylindrus aq, ad omnes quartas simul, hoc est ad omnes cylindros intra conum acd descriptos. Conuertendo igitur; erit figura trilineo inscripta ad parallelogrammum aq ut omnes cylindri intra conum acd ad cylindrum aq. Parallelogrammum verò aq ad parallelogrammum ae est ut dq ad de, hoc est ut cylindrus aq ad cylindrum ae. Propterea ex aequo, figura inscripta in trilineo ad totum parallelogrammum ae, erit ut omnes cylindri in cono inscripti ad cylindrum ae. Sed figura inscripta in trilineo est (ex iam dictis) plusquam tertia pars parallelogrammi ae, ergo omnes cylindri in cono descripti erunt plusquam tertia pars cylindri ae, nempe maiores quam conus acd. pars videlicet suo toto. Quod est impossibile.

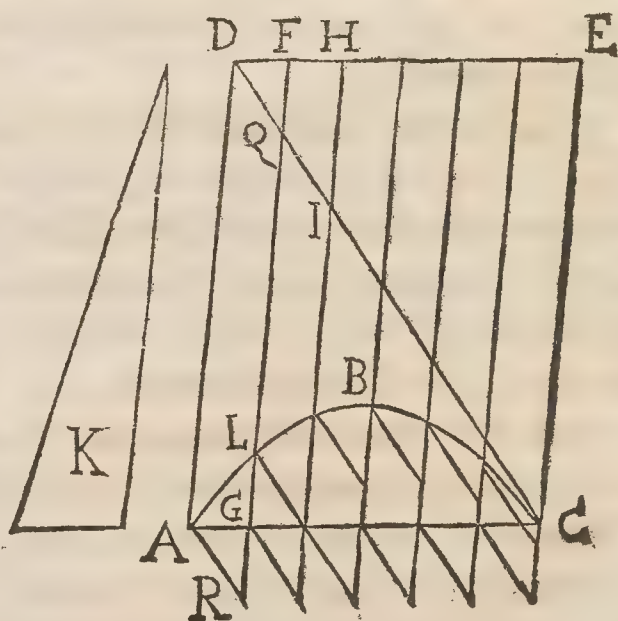
Corol. L2
mat. 19.

Sed ponamus nunc trilineum abcd esse minus quam tertia pars parallelogrammi ae; sitq; defectus equalis spatio K. Circumscribatur trilineo abcd figura constans ex parallelogrammis aequaltis excedensq; minori excessu quam sit spatium K; & erit figura circumscripta adhuc minor quam tertia pars parallelogrammi ae.

Concipiatur iterum circa rectam ad circulus pro basi cono, qui verticem habeat c; itemq; pro basi cylindri acd eiusdem altitudinis cum ipso cono acd.

Intelligatur insuper circa conum descripta figura solida constans ex cylindris aequaltis aq, gi &c.

Iam parallelogrammum af ad parallelogrammum aq (ob aequalitatem) est ut cylindrus adig ad cylindrum adqr. Amplius. Parallelogrammum



Problema Primum.

53

num gh ad parallelogrammum li est ut gf , siue ad ad lq ; nempe ut quadratum dc ad quadratum cq , siue ut quadratum da , vel tg , ad quadratum gq ; nempe ut cylindrus gh ad cylindrum gi . &c. & hoc modo semper. Suntq; omnes singillatim prima magnitudines aequales parallelogrammo af , & ideo inter se: item omnes tertię aequales cylindro af , & ob id inter se; ergo erunt omnes prima simul, hoc est parallelogrammum ae , ad omnes secundas simul, hoc est ad figuram trilineo circumscriptā, ut omnes tertię simul, nempe cylindrus ae , ad omnes quartas simul, nempe ad cylindros conum acd circumferibentes. Conuertendo igitur, erit figura circumscripta trilineo, ad parallelogrammum ae , ut omnes cylindri circumscribentes conū ad cylindrum ae . Sed figura trilineo circumscripta minor est quā tertia pars parallogrammi ae ; ergo etiam omnes cylindri circūscribentes conum minores erunt quā tertia pars cylindri ae ; Nempe minores cono acd . Totum sua parte: quod esse non potest. Triangulum ergo adc ipsius parabola omninò triplum erit. Quod propositum fuerat.

1. sexti.
ob para-
bolam.
ob simili-
tud. triā.
gal.

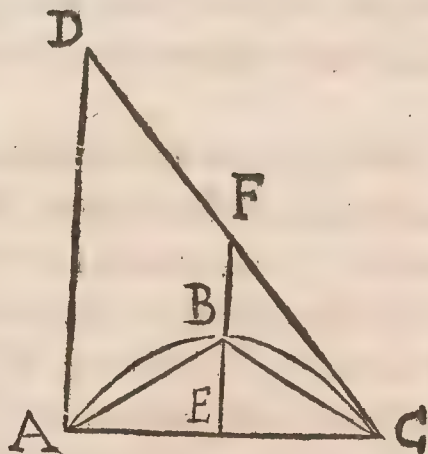
Propositio IX.

Parabola fefquitercia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC , cuius diameter EB , triangulum inscriptum sit ABC , Dico parabolam trianguli ABC esse fefquiterciam;

Ducatur enim tangens CD , & sit recta AD diametro æquidistans:

Erit ergò per præcedens lemma, triangulum ACD parabolæ triplū; & propterea erit parabola partes quatuor earum, quarum triangulum ADC est duodecim, nempe qualiū



trian-

54 De Dimensione Parabolę

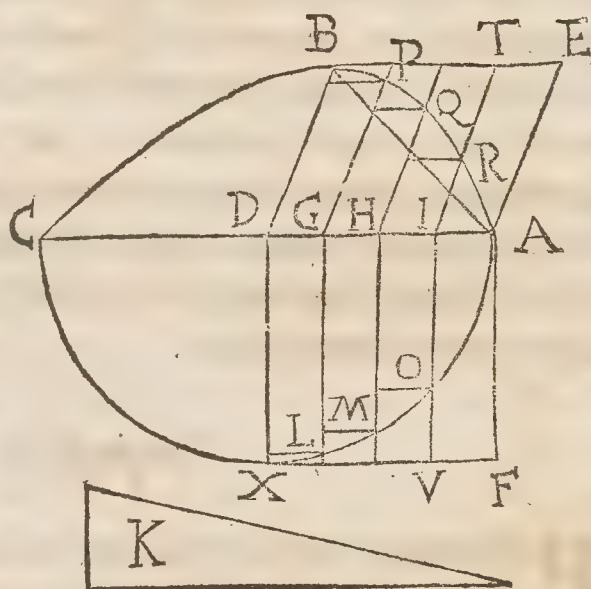
triangulum ABC est tres. (triangulum enim ABC æquale est triangulo $EF C$, cum vtrumq; duplum fit trianguli $EB C$, ergo triangulum ABC quarta pars erit totius ADC .) Constat ergo parabolam ad inscriptum sibi triangulum esse vt 4. ad 3. Nempe sesquitertiam. Quod &c.

Propositio X.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem sibi basim, eandemq; altitudinem habentis.

Esto parabola ABC cuius diameter BD . Dico parabolam ABC inscripti sibi trianguli esse sesquitertiam.

Compleatur parallelogrammum $ADBE$, & nisi parabola sesquitertia sit trianguli sibi inscripti, neque (sumptis dimidijs) semiparabola ABD sesquitertia erit trianguli ABD ; neq; eadem semiparabola ABD erit 2. tert. parallelogrammi ED , sed vel plus, vel minus quàm 2. tert. eiusdem.



Esto primùm si fieri potest semiparabola ABD magis quàm 2. tert. parallelogrammi ED ; & ponatur excessus æqualis spatio K . Ipsiq; semiparabolę figura inscribatur constans ex parallelogrammis æquealtis (more apud Geometras vsitato, prout factum est Lemmate XV.) ita vt differentia inter figuram inscriptam, & ipsam semiparabolam minor sit spatio K . Tunc enim inscripta figura adhuc maior erit quàm 2. ter. parallelogrammi $ADBE$.

Duca-

Problema Primum.

55

Ducatur circa diametrum AC semicirculus AXC , completoq; rectangulo, siue quadrato $AFXD$. ducantur GL, HM, IO perpendiculares ad AC , & compleantur rectangula DL, GM, HO ; Tum intelligatur figura $AFXD$ circumuer ti circa axem AD ; ita ut quadrans ADX hemisphærium describat, quadratum verò $AFXD$, cylindrum; & rectangula in quadrante inscripta totidem cylindros faciant in ipso hemisphærio compræhenfos.

Iam parallelogrammum BG ad PD , est ut BD ad GP , siue ut rectangulum CDA ad rectangulū CGA ; siue ut quadratum XD ad quadratū LG ; siue ut cylindrus XG ad LD . Et hoc modo semper. Suntque omnes primæ magnitudines æquales parallelogrammo BG , & omnes tertiæ æquales cylindro XG . Ergo erunt omnes primæ simul, hoc est parallelogrammum TD , ad omnes secundas simul, nempe ad figuram inscriptam in semiparabola, ut sunt omnes tertiæ simul, nempe cylindrus VD ad omnes quartas simul, hoc est ad omnes cylindros in hemisphærio inscriptos. Parallelogrammum verò TD ad ED est ut cylindrus VD ad FD , ergo ex æquo, erit parallelogrammum ED ad figuram in semiparabola inscriptam ut cylindrus FD ad omnes cylindros in ipso hemisphærio compræhenfos. Sed parallelogrammum ED minus est quam sesquialterum figuræ intra semiparabolam inscriptæ; Ergò cylindrus FD minor erit quàm sesquialter omnium cylindrorum in hemisphærio descriptorum. Quod est absurdum. Scimus enim dictum cylindrum hemisphærij esse sesquialterum.

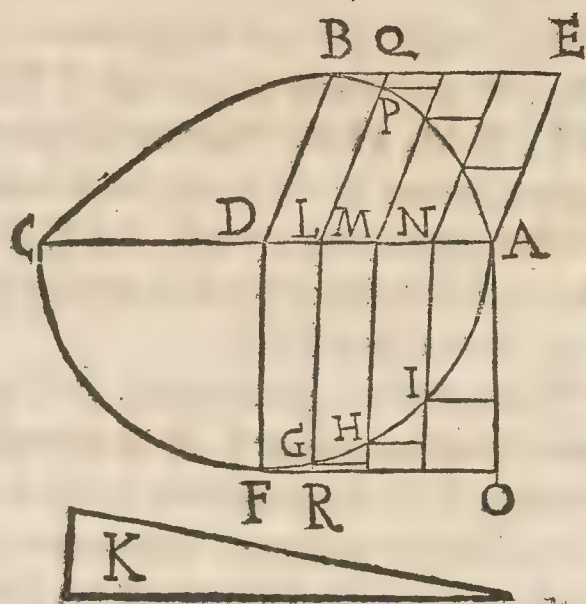
Lem. 18.

Esto deinde (si fieri potest) semiparabola minor quam 2. tert. ipsius parallelogrammi ED . Ponaturq; defectus æqualis spatium K .

Tum ipsi semiparabolæ figura quædam circumscribatur, constans ex parallelogrammis æquealtis (more solito, ut factum est in Lemmate XV . [eiusque Corollario] ita ut differentia inter circumscriptam figuram ipsamq; semiparabolam minor sit spatium K . Tunc enim manifestum est, quòd figura circumscripta adhuc

adhuc minor erit quam 2.
ter. parallelogrammi. ED .

Fiat circa diametrum A
 C semicirculus, vt in de-
scriptione præcedentis con-
structionis, completoque
quadrato $AOFD$, perfici-
antur reliqua rectangula
 FL , GM , HN , IA . cir-
ca quadrantem descripta.
Tum reuoluatur figura AF
circa axem AD , ita vt so-
lida generentur iam dicta:
nempe hemisphærium ex



quadrante, cylindrus ex quadrato AF ; totidemque cylindri
quot rectangula erunt ipsi quadranti circumscripta.

Iàm parallelogrammum BL ad se ipsum est vt cylindrus fa-
ctus ex FL ad se ipsum. Amplius. Parallelogrammum QM
ad PM ; est vt QL ad LP ; siue BD ad LP , siue vt rectang.
 CDA ad CLA , siue vt quadratum FD ad LG , siue vt qua-
dratum RL ad LG ; nempe vt cylindrus factus ex RM ad cy-
lindrum ex GM : & hoc modo semper. Suntq; omnes primæ
magnitudines æquales parallelogrammo BL , omnesq; tertiæ
Lem. 18. æquales cylindro facto ex FL . Ergo erunt omnes primæ simul
nempe parallelogrammum AB ad omnes simul secundas, nē-
pe ad figuram semiparabolæ circumscriptam, vt sunt omnes ter-
tiæ simul, nempe cylindrus ex OD factus, ad omnes quartas,
nempe ad cylindros hemisphærio circumscriptos. Sed paralle-
logrammum ED magis est quàm sesquialterum figure circum-
scriptæ ad semiparabolam, ergo cylindrus ex OD magis quàm
sesquialter erit ad omnes cylindros hemisphærio circumscrip-
tos. Quod est absurdum: Scimus enim cylindrum hemisphæ-
rio circumscriptum ipsius hemisphærij esse sesquialterum.

Patet itaq; parallelogr. ED sesquialterū esse ad semiparabo-
lam ABD ; & ideo semiparab. sesquitertia trianguli ABD ,

QVA -



QVADRA TVRA P A R A B O L A E.

per nouam indiuisibilium Geometriam
pluribus modis absoluta.



*ACTENVS de dimensione parabola
more antiquorum dictum sit; Reliquum
est ut eandem parabola mensuram noua
quadam, sed mirabili ratione aggredia-
mur; ope scilicet Geometria Indiuisibi-
lium, & hoc diuersis modis: Suppositis
enim præcipuis Theorematib. antiquorū
tam Euclidis, quàm Archimedis, licee
de rebus inter se diuersissimis sint, mirū
est ex unoquoq; eorum quadraturam parabola facili negotio elici
posse; & vice versa. quasi ea sit commune quoddam vinculum
veritatis. Posito enim quòd cylindrus inscripti sibi coni triplus
sit, hinc sequitur parabolam inscripti sibi trianguli esse sesqui-
tertiā: Si verò mauis præmittere cylindrum inscriptae sibi sphae-
rae esse*

*ara esse sesquialterum, continuo parabola quadratura infer-
tur. Eadem concluditur supposita demonstratione, qua probat
centrum gravitatis conï positum esse in axe, ita ut pars que
ad verticem est, reliquæ sit tripla. Parabola non minus quadra-
tur etiam supponendo spatium à lineâ spirali in primâ reuolutio-
ne descripta, & à rectâ quæ initium est reuolutionis, comprehen-
sum, subtripulum esse primi circuli. Contrâ verò; suppositâ pa-
rabola quadratura, prædicta omnia Theoremata facillè demonstra-
ri possunt. Quod autem hæc Indiuisibilium Geometria nouum
penitus inuentum sit, equidem non ausim affirmare. Crediderim
potius veteres Geometras hac metodo usos in inuentione Theo-
rematum difficillimorum, quamquã in demonstrationibus aliam
viam magis probauerint, siue ad occultandum artis arcanum, si-
ue ne vlla inuidis detractoribus proferretur occasio contradicen-
di. Quicquid est, certum est hanc Geometriam mirum esse pro in-
uentione compendium, & innumera quasi imperscrutabilia Theo-
remata, breuibus, directis, affirmatiuisq; demonstrationibus con-
firmare; quod per doctrinam antiquorum fieri minimè potest.
Hac enim est in Mathematicis spinetis via verè Regia, quàm pri-
mus omnium aperuit, & ad publicum bonum complanauit mira-
bilium inuentorum machinator Caualerius.*

Propositio XI.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & ean-
dem altitudinem habentis.

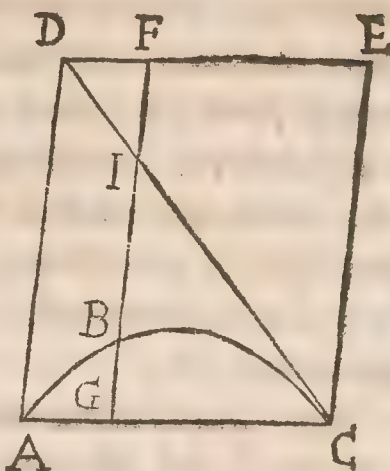
Esto parabola ABC , cuius tangens CD , & diametro æqui-
distans sit AD . Perficiatur parallelogrammum AE ; & circa
diametrum AD intelligatur circulus, qui sit basis conï cuiusdã
verticem habentis in puncto C , & item sit basis cylindri alicu-
ius $ACED$ eiusdem altitudinis cum dicto cono.

Ducantur iam quælibet recta FG parallela ad AD , & per
ipsam intelligatur transire planum parallelum circulo AD .

Erit

Erit ergò FG ad IB vt recta DA ad IB
hoc est vt quadratum DC ad quadra-
tum CI , siue vt quadratum DA ad IG ,
hoc est vt circulus DA ad circulum IG
nempe vt circulus FG ad eundem IG .

Et hoc semper; suntque omnes primæ
magnitudines æquales rectæ DA . &
ideò inter se; omnes etiam tertiæ æqua-
les circulo DA , & ob id inter se; ergo
per Lemma 18, erunt omnes primæ si-
mul, nempe parallelogrammum AE ,
ad omnes secundas simul, nempe ad tri-



ob para-
bolam.
ob simi-
litud. tri-
ang.

lineum $ABCD$, vt sunt omnes tertiæ simul, nempe cylindrus AE ,
ad omnes quartas simul hoc est ad conum ACD . Est igitur
parallelogrammum AE triplum trilinei $ABCD$. Sump-
toque dimidio, erit triangulum ACD sesquialterum trilinei
 $ABCD$; & per conuersionem rationis, erit triangulum ACD
triplum ipsius parabolæ. Propterea, ex demonstratione pro-
positionis 9. erit parabola inscripti sibi trianguli sesquitertia.
Quod erat &c.

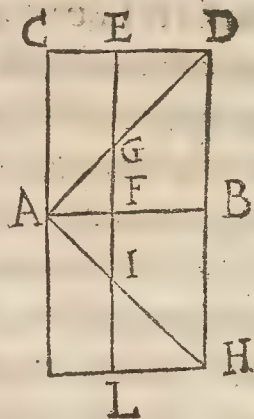
*Alia quoque ratione parabolam quadrabimus, demonstratis
prius, quâ fieri poterit breuitate, indiuisibilium principijs. De-
clinabimus autẽ ab immenso Caualerianæ Geometria oceano, mi-
nori audacia radentes terram. Qui volet, hac omnia videre
poterit (in fonte dicam, an in pelago?) circa medium secundi
libri Geometria Indiuisibilium Caualerij.*

Lemma XX.

Quadrata omnium partium cuiuscunq; rectæ lineæ subtripla
sunt totidem quadratorum totius.

*Est o qualibet recta linea ab . Dico omnia simul quadrata om-
nium partium rectæ ab esse subtripla totidem quadratorum eius-
dem rectæ lineæ ab .*

Fiat enim quadratum $acdb$, ductaq; diametro ad . conuertatur figura circa axē ab donec in eum locum redeat unde cepit moueri. Manifestum eſt, quod à quadrato cylindrus ch deſcribetur, à triangulo verò abd conus dah , qui verticem habebit in a . Ducatur iam qualibet ef parallela ipſi ca ; eritq; af , ſive fg (ſunt enim æquales) una ex infinitis partibus totius ab .



2. Duo-
decimi.

LEM. 18.

Iam; quadratum totius ab , ad quadratum partis af , eſt, ob æqualitatem, ut quadratum ef ad fg , nempe ut circulus diametro el fa-
ctus, ad circulum diametro gi . Et ſic erit ſemper. Suntq; primæ magnitudines ſingulæ æquales quadrato ab , & tertiæ ſemper æquales circulo dh . Ergo omnes primæ ſimul, hoc eſt tot quadrata lineæ ab . quot ipſa habet partes, ad omnia quadrata partium, erunt ut omnes tertiæ ſimul, hoc eſt ut cylindrus ch ad omnes quartas ſimul, nempe ad conum dah . Sunt ergo tot quadrata alicuius lineæ quot ipſa habet partes, ad omnia quadrata partium ipſius ut cylindrus ch ad conum dah , nempe tripla. Et cōuertendo conſtat propoſitum quod demonſtrandum fuerat &c.

Lemma XXI.

Omnia rectangula, quæ continentur ſub aliqua recta lineâ cum ſingulis ſuis partibus, & reliquis partibus, ſub ſeſquialtera ſunt totidem quadratorum eiufdem rectæ lineæ.

Aſſumpta præcedentis Lemmatis figura, acceptum ſit in recta ab quodlibet punctum f . Rectangulum ſub baf tanquàm una recta lineâ, & ſub fb . contentum, erit unum ex omnibus prædictis rectangulis (unum enim latus componitur ex tota ab , cum parte af ; alterum verò eſt fb , nimirum reliqua pars.)

Rectangulum autem prædictum, ſub baf tanquàm una recta, & ſub fb contentum, idem eſt, ob æqualitatem laterum, ac rectangulum cil . Et hoc ſemper verum erit hoc modo, ubicunq; ſit pun-

Problema Primum.

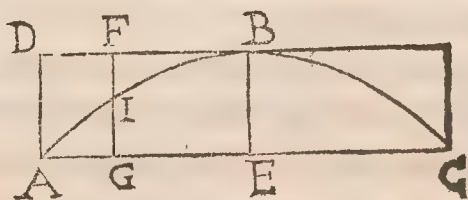
59

fit punctum f. Sed omnia rectangula sub rectis interceptis in trapezio cahd (qualium una est ei) & sub reliquis, qualium una est il; una cum omnibus quadratis intermediarum sectionum (qualium una est fi) aquantur (propter vsecundi elementorū) omnibus quadratis dimidiarum, qualium una est fl. Omnia vero quadrata intermediarum sectionum (qualiam una est fi) ad omnia quadrata dimidiarum (qualium una est fl,) sunt ut vnū ^{praced.} ad 3. Si ergo demantur omnia quadrata intermediarum, remanebunt omnia rectangula, quorum vnū est eil, siue omnia rectangula contenta sub ab. cum singulis suis partibus, & reliquis partibus, sub sesquialtera omnium quadratorum, quæ fiunt à dimidijs, siue totidem quadratorum totius ab. Quod fuerat ostendendum &c.

Propositio XII.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eādem altitudinem habentis.

Est parabola ABC cuius diameter BE, & circa parabolā fit parallelogrammum DC. Ducatur quælibet FG diametro parallela; eritq; FG. ad GI, vt BE ad GI, siue vt rectangulum CEA, ad CGA, hoc est vt quadratum CE ad rectangulū CGA. Et hoc modo semper; Suntq; primæ magnitudines semper æquales rectæ BE; tertiæ autem semper æquales quadrato CE. Ergo omnes primæ simul, hoc est parallelogrammum AB, ad omnes secundas simul, nempe ad femiparabolā AIBE; erunt vt omnes simul tertiæ, videlicet tot quadrata lineæ CE quot ipsa habet partes, ad omnes quartas simul, nempe ad omnia rectangula sub CE cum singulis suis partibus, & sub reliquis partibus. Ergo (ex præcedenti lemmate) parallelogrammum AB erit ipsius femiparabolæ sesquialterum: Totumq;



Lem. 18.

60 De Dimensione Parabolæ

tumque parallelogrammum DC erit totius parabolæ sesquialterum, nempe vt 6. ad 4. Propterea parabola ad inscriptum sibi triangulum (quod quidem parallelogrammi DC sub duplum est) erit vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod erat &c.

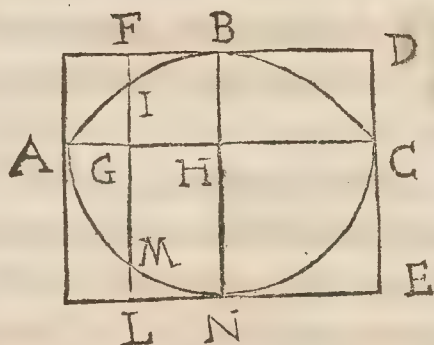
Possumus sine molestia illorum lemmatum, parabolam quadrare eodem argumento, diuersis tamen principijs, nempe per suppositionem proportionis, quam cylindrus habet ad spheram sibi inscriptam; quae quidem proportio sesquialtera est, ut ostenditur ex Archimede; libro Primo de Sphaera & Cylindro.

Propositio XIII.

PArabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eādem altitudinem habentis .

Esto parabola ABC , circa
 quam sit parallelogrammū AD ;
 & circa diametrum AC fiat fe-
 micirculus, circa quem sit rectan-
 gulum AE . Tum manente axe
 AC , intelligatur circumuerti ip-
 sum semicirculum, ita vt ex ipsi-
 us reuolutione Sphæra circum-
 scribatur: ex cōuersione verò rectang. AE cylindrus nascatur.

The diagram illustrates the construction of a sphere and a cylinder from a parabola and a semicircle. A parabola ABC is shown with vertex A and focus B . A rectangle AD is circumscribed around the parabola. A semicircle is drawn with diameter AC . A rectangle AE is circumscribed around the semicircle. The diagram is divided into several regions labeled with letters: F (top left), B (top right), D (top right corner), I (top left of center), G (top left of center), H (top right of center), C (top right), M (bottom left of center), L (bottom left), N (bottom right), E (bottom right corner), and A (bottom left).



Sumpto iam quolibet puncto G . ducatur recta GF parallela diametro HB ; & per idem punctum G agatur planum GL erectum ad axem AC .

Erit recta FG ad GI , vt BH ad GI (ob æqualitatem)
hoc est vt rectangulum CHA , ad rectangulum CGA , siue vt
quadratum HN ad quadratum GM (ob circulum) siue vt qua-
dratum GL ad quadratum GM ; nempe vt circulus ex semi-
diametro GL in cylindro, ad circulum ex semidiametro GM
in sphæra. Et hoc semper, vbicunque sumatur punctum G . Sunt
autem æquales inter se tam omnes primæ, quàm omnes tertiæ
magni

Problema Primum.

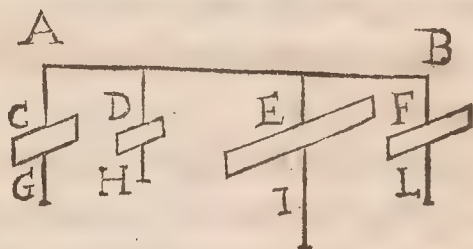
61

magnitudines. Ergò omnes primæ, nempe parallelogrammū AD ad omnes secundas, nempe ad parabolam ABC, erunt L^{tes}. 18. vt omnes tertiæ, hoc est cylindrus, ad omnes simul quartas, videlicet ad sphæram. Sed cylindrus ad sphæram est sesquialter; ergò parallelogrammum etiam AD parabolæ sesquialterum erit: & ipsa parabola inscripti sibi trianguli sesquitertia; vt in præcedenti conclusum est. Quod &c.

Lemma XXII.

Si magnitudines quotcunque ad libram appensæ fuerint ex quibuscunq; punctis: totidemq; magnitudines alterius ordinis ex iisdem punctis pendeant, pariter cum prædictis magnitudinibus proportionales. Erit vnum idemq; libræ punctum centrum æquilibrij vtriusque ordinis magnitudinum.

Sint ad libram a b magnitudines primi ordinis quotcunque c, d, c, t, ex quibuscunq; punctis appensæ. Totidemque magnitudines g, h, i, l, secundi ordinis pendeant ex iisdem punctis;



& sint proportionales: nempe: Vt c ad d, ita sit g ad h. Iterum ut c. ad e, ita sit g ad i. &c. Dico idem punctum libræ esse centrum commune æquilibrij vtriusque ordinis magnitudinum suspensarum.

Cum enim sit ut c ad d, ita g ad h, ex eodem puncto equiponderabunt, tam duæ magnitudines c & d, quàm duæ g & h.

Amplius. Cum sit ut c ad d ita g ad h, erit conuertendo & componendo dc ad c, ut hg ad g. c autem ad e est ut g ad i; ergò ex equo cd simul ad e, erit ut gh simul ad i. Quare magnitudines cd, & e, ex eodem puncto equiponderabunt, ex quo equiponderant duæ gh, & i.

Vlterius. Cum autem per iam dicta, sit ut cd ad e, ita gh ad i, erit componendo cde ad e, ut ghi ad i. Sed e ad c est ut i ad g; & c ad f, ut g ad l. Quare ex equo cde simul ad f, erit

62 De Dimensione Parabolæ

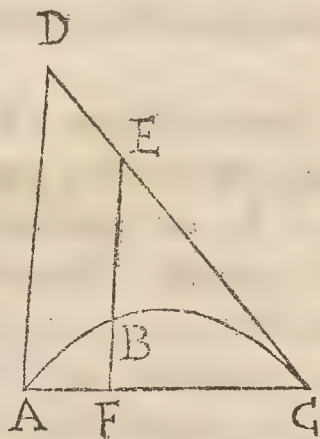
erit ut ghi simul ad l. Ergo duæ magnitudines cde, & f. habebunt idem punctum æquilibrij, quod habent duæ magnitudines ghi & l. Et sic etiam si sint plures magnitudines, usque in infinitum, quod erat propositum &c.

Lemma XXIII.

Si parabola tangentem habuerit ad basim, ex altera verò parte lineam diametro parallelam. Trilineum compræhensum sub curuâ parabolicâ, sub tangente, & sub parallela prædictâ, æquipo-
nderabit ex puncto tangentis vbi ea sic diuiditur, vt pars ad contactum terminata reliquæ sit tripla.

Est parabola abc, cuius tangens ad basim sit cd; æquidistans diametro sit ad. Dico trilineum mixtum abcd æquipo-
ndere ex puncto tangentis cd, ubi ea sic diuiditur ut pars uersus contactum c, reliqua sit tripla.

Concipiatur figura ita ut da ad horizon-
tem sit perpendicularis; & circa diametrum da intelligatur circulus, qui sit basis coni uerticem habentis in puncto c.



Sumpto iam quolibet puncto e ducatur ef æquidistans ipsi da; & per ipsam transeat planum paralle-
lum basi coni.

ob para-
bolam.

Erit ergo recta da ad eb, ut quadratum dc ad ce; siue
ut quadratum da ad ef, hoc est ut circulus da ad ef. Et
hoc semper, ubicunq; sit punctum e. Ergo cum ad libram dc
pendeant ab iisdem punctis magnitudines duorum ordinum pro-
portionales ut in præcedenti lemmate imperatum est, habebunt
omnes magnitudines simul primi ordinis (hoc est omnes lineae
trilinei abcd, siue ipsum trilineum) idem punctum æquilibrij,
quod habent omnes magnitudines simul secundi ordinis (hoc est
omnes circuli coni acd, siue idem conus.) Conus autem æqui-
ponderat ex puncto quod secatur cd ita ut pars ad c reliquæ sit
tripla

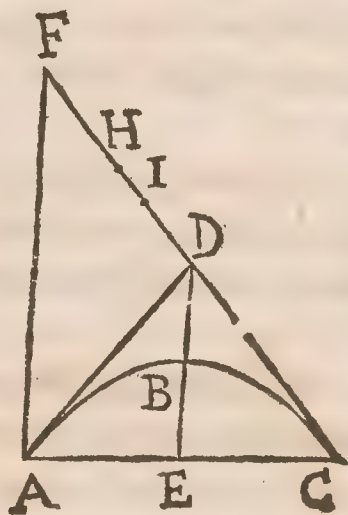
tripla, quandoquidem recta da est ad horizontem perpendicularis; ergo etiam trilineum abcd aequiponderabit ex eodem puncto. Quod erat propositum &c.

Propositio XIV.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto parabola ABC, cuius diameter DE intelligatur ad horizontem perpendicularis; sintque CF, & AD tangentes; ipsa vero AF diametro æquidistans.

Sumatur deinde FH quarta pars totius FC; & ex puncto H (per Lemma præcedens) aequiponderabit trilineum mixtum ABCF. Accipiaturn etiam FI tertia pars totius FC, & ex I aequiponderabit totum triangulum AFC. Parabola vero, cum habeat centrum in diametro, æquiponderat ex D. Ergo trilineum ABCF ad ipsam parabolam erit reciprocè ut DI ad IH, nempe duplum (qualium enim partium FC est 12. talium ipsa FD est 6. FI vero 4. & FH 3. & ideò DI 2, & IH una.) Propterea componendo erit totum triangulum AFC, parabolæ triplum. Reliquum quadraturæ absolvitur ut in Propositione IX. factum est. Quod erat &c.



Aliter.

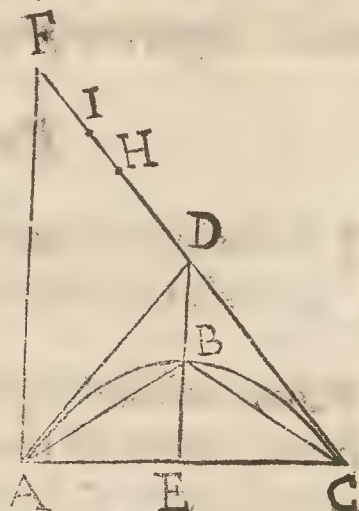
Positis iisdem, ut supra, sumatur fh, quarta pars totius fc, aequiponderabitq; ex puncto h trilineum mixtum abcf. Sumatur etiam fi, tertia pars ipsius fd; tunc enim aequiponderabit ex puncto i triangulum fda. Trilineum uerò mixtum abcd, æquiponderat ex puncto d. (nam triangulum totum adc æquiponderat ex puncto d; parabola etiam ablata ex eodem pun-

I

cto d

64 De Dimensione Parabolæ

Eto d equipanderat, ergò etiam reliquũ trilineum $abcd$ ex puncto d æquiponderare necesse est.) Erit itaque triangulum fda ad trilineum $abcd$ ut reciprochè dh ad hi nempe ut 3. ad unum; & per conuersionem rationis triangulum adc ad parabolam erit ut 3. ad 2. siue ut 6. ad 4. Quare parabola ad triangulum abc erit ut 4. ad 3. Nēpe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare. &c.

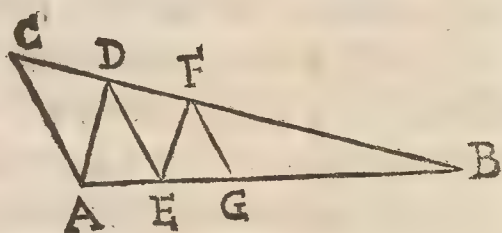


Alijs etiam principijs parabolæ quadraturam aggrediamur, præmissa sequenti progressionum Geometricarum speculatione.

Lemma XXIV.

Si duæ rectæ lineæ inuicem concurrant, & inter ipsas descriptum sit quoddam flexilineum constans ex lineis alternatim parallelis; erunt omnes lineæ, quæ inter se parallelæ sunt, in continua proportionē.

Concurrant inuicem duæ rectæ lineæ, ab , cb in puncto b ; & inter ipsas descriptum sit flexilineum $cadefg$. &c. ita ut ca , de , fg &c. sint inter se parallelæ; item ad , ef , & reliquæ uicisim sumptæ inter se parallelæ sint. Dico ac , ed , gf , esse in continua proportionē.



Est enim, ob parallelas, ut ac ad ed , ita ab ad be , siue db ad bf , hoc est ed ad gf . Constat ergò quod propositum fuerat.

Lemma XXV.

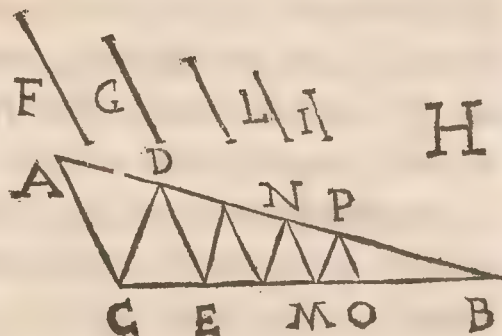
Positis duabus rectis lineis inuicem concurrentibus, ut suprà;
Si inter

Problema Primum.

65

Si inter ipsas fuerint duæ parallelæ AC, DE, & iunctâ CD, continuatum intelligatur flexilineum ACDE in infinitum vsque ad punctum concursus B. Dico in huiusmodi flexilineo esse omnes, & singulos ad vnguem terminos qui sunt in progressionem proportionis AC ad DE. in infinitum continuatæ.

Ponatur f æqualis ipsi ac, & g æqualis ipsi de: Et concipiatur proportio f ad g continuata in infinitis suis terminis f H.



Iam, si possibile est, aliquem, siue aliquos terminos esse in progressionem f H, qui nō reperiantur in flexilineo. Esto: & sit maximus terminus i, illorum, qui cum sint in progressionem f H, non sunt in flexilineo. Erit ergo terminus l ipsi præcedens, in flexilineo. Sit ille mn. Et quoniam l ad i est ut f ad g, siue ut ac ad de, siue ut nm ad po proximè sequentem, suntq; æquales l, & nm; erunt æquales etiam i & po. Terminus ergo i qui ponebatur non esse in flexilineo, in eodem repertus est.

Eodem penitus modo demonstrabimus nullum terminum esse in flexilineo, qui non sit etiam in progressionem f H. &c. Concludemus igitur esse in flexilineo omnes præcisè terminos proportionis ac ad de in infinitum continuatæ, cum demonstratum sit nullum in flexilineo terminum desiderari qui sit in progressionem f H; neq; ullum superabundare, qui non reperiatur etiam in progressionem f H. &c.

Eodem penitus modo demonstrabimus nullum terminum esse in flexilineo, qui non sit etiam in progressionem f H. &c. Concludemus igitur esse in flexilineo omnes præcisè terminos proportionis ac ad de in infinitum continuatæ, cum demonstratum sit nullum in flexilineo terminum desiderari qui sit in progressionem f H; neq; ullum superabundare, qui non reperiatur etiam in progressionem f H. &c.

Lemma XXVI.

Suppositis infinitis rectis lineis in continua proportionem maioris inæqualitatis, rectam lineam, quæ prædictis omnibus sit æqualis reperire.

Ponantur primæ duæ lineæ datæ progressionis esse a, b: quib. ponantur æquales; cd maiori a, & ef minori b. Sintq; cd, ef

I 2 paral-

parallela; & iungantur df , ce , quæ necessario concurrent. Concurrent itaq; in puncto g , & ducta cf , ipsi æquidistans sit gl .

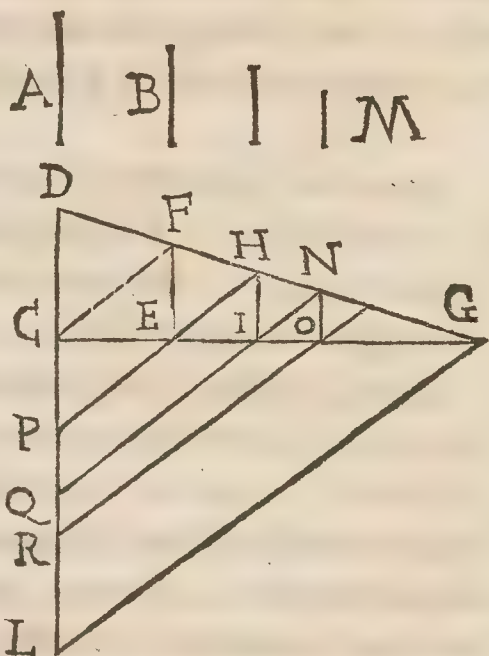
Dico rectam dl æqualem esse omnib. infinitis terminis progressionis abm simul sumptis.

Concipiatur enim continuatū flexilineum dce & c. in infinitum, usq; ad punctum g , eruntq; in ipso omnes lineæ, siue termini datæ progressionis abm .

34 primi.

Producantur iam he , ni . & reliquæ ipsis parallelæ usq; ad dl . Eritq; ef . æqualis ipsi cp , & hi æqualis ipsi pq ; & no ipsi qr ; & sic de singulis. Qualibet enim linea quæ sit in flexilineo, habebit suam portiunculam respondentem

in recta dl , sibi æqualem; donec flexilineum peruenerit ad ultimum punctum g : Tunc autem neque de flexilineo, neque de linea dl quidquam supererit; sed tam ipsum flexilineum, quàm etiam recta dl penitus absumpta erit: Est enim ipsa gl , quæ ab ultimo flexilinei puncto g ducitur, ultima omnium parallelarum, quæ producuntur usque ad dl . Ergo omnes simul lineæ flexilinei, quarum prima est cd , alternatim sumptæ (hoc est omnes lineæ progressionis abm) æquales sunt omnib. portiunculis rectæ dl simul sumptis: hoc est ipsi dl . Quod erat ostendendum & c.

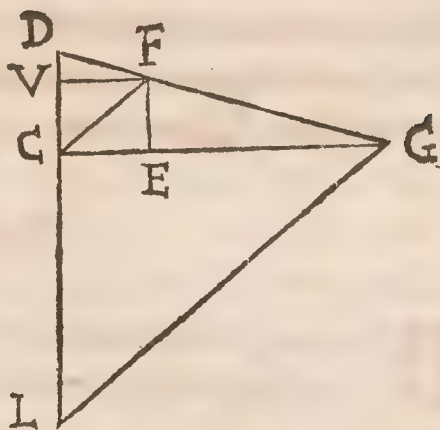


Lemma XXVII.

Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportionione Geometrica maioris inæqualitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam & inter aggregatum omnium.

Assumpta enim precedenti constructione, ducatur fu æquidistans

distans ipsi gc: & erit du prima differentia. Sed du ad primam magnitudinem dce est ut fd ad dg, hoc est ut dc ad dl aggregatum omnium. Quod erat demonstrandum &c.



4. Sexti.

SCHOLIUM.

Hoc esse uerum etiam in numeris, & cuiuscunq. generis magnitudinibus non dubitabimus affirmare. Afferremus etiam uniuersaliorem demonstrationem, praecipuè cum admodum breuis sit. Huius ueritatis conclusio cum à nobis obiter celeberrimo Caualerio collata fuisset, ipse etià idem Theorema sequenti demonstratione, quæ à nobis iam in prima inuentione adhibita fuerat, confirmauit.

Premittitur hoc. Quòd si fuerint quocunq. magnitudines siue finitæ numero, siue infinitæ, quarum antecedens semper sequente maior sit, erit prima omnium magnitudo equalis omnibus differentijs simul cum ipsa minima magnitudine sumptis.

Notum est hoc apud Geometras, demonstraturq. ut à nobis factum est in lemmate 15. Vbi ostendimus parallelogrammum ac equale esse omnibus differentis inter sequentia parallelogramma, & minimo parallelogrammo oc.

Supponantur iam infinitae numero magnitudines in continua proportionem Geometrica maioris inaequalitatis; manifestum est quòd minima omnium magnitudo uel non erit, uel punctum erit. Ergo in hoc casu erit prima magnitudo aequalis omnibus tantum differentijs.

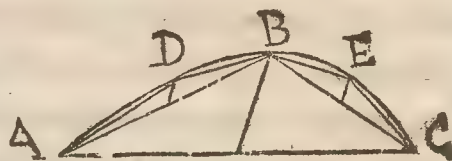
Cum autem ponantur magnitudines in continua proportionem Geometrica, erunt etiam differentiae in eadem ratione proportionales; & ideo (facta conuersione) erit ut prima differentia ad primam magnitudinem, ita secunda differentia ad secundam magnitudinem, & sic semper. Propterea ut una ad unam, ita collectim erunt omnes ad omnes. Nempe ut prima differentia ad pri-

primam magnitudinem, ita erunt omnes simul differentia (hoc est ipsa prima magnitudo) ad omnes magnitudines simul. Constat ergo primam magnitudinem mediam proportionalem esse inter primam differentiam, & aggregatum omnium,

Propositio XV.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Est parabola ABC in qua inscriptum sit triangulum ABC . Dico parabolam trianguli ABC esse sesquitertiam.



Inscribantur enim etiam in re-

liquis portionibus ADB, BEC , duo triangula ADB, BEC .

Lem. 7. Eritq; triangulum ABC quadruplum duorum simul triangulorum ADB, BEC . Concipiantur etiam in reliquis quatuor portiunculis AD, DB, BE, EC inscripta quatuor triangu-

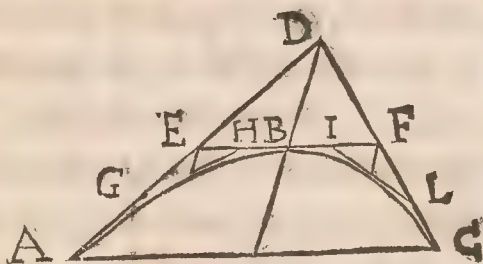
Lem. 7. la; eruntq; duo simul triangula ADB, BEC quadrupla prædictorum simul quatuor subsequensium triangulorum; & hoc modo semper. Parabola igitur nihil aliud est quam aggregatum quoddam infinitarum numero magnitudinum in proportionem quadrupla, quarum prima est triangulum ABC , secunda verò constat ex duobus triangulis ADB, BEC . Propterea prima magnitudo ABC media proportionalis erit inter primam differentiam, & aggregatum omnium, nempe parabolam.

Ponatur itaq; triangulum ABC esse vt 4. & ideo duo simul triangula ADB, BEC erunt vt vnum: eritq; prima differentia (nimirum inter 4. & vnum) vt 3. Ergo aggregatum omnium infinitarum magnitudinum, nempe ipsa parabola, erit (per lemma 27.) ad primam magnitudinem, hoc est ad inscriptum triangulum ABC , vt prima ipsa magnitudo ad primam differentiam; videlicet vt 4. ad 3. nempe sesquitertia. Quod erat propositum demonstrare &c.

Aliter.

Aliter.

Est parabola abc . cuius diame-
ter db , tangentes ad basim ad , cd ,
per verticem verò ef . Inscribantur
autem in reliquis trilineis abe , bcd
 f , duo triangula geh , ifl , (ut im-
peratum fuit pro constructione lem-
matum Tertij, & Quarti.) Item in



reliquis quatuor trilineis mixtis, qua-
tuor triangula concipiantur; & hoc modo semper. Eritq; uni-
uersum trilineum $abcd$ nihil aliud quàm aggregatum quoddam
in finitarum multitudine magnitudinum in proportionem quadru- Coroi. 1.
pla, quarum prima est triangulum edf , secunda verò constat ex Lem. 3.
duobus triangulis geh , ifl ; tertia verò ex quatuor sequenti-
bus &c. Propterea aggregatum omnium, nempe trilineum mix-
tum $abcd$, ad primam magnitudinem, nempe ad triangulum
 edf , erit ut ipsa prima magnitudo ad primam differentiam, vi- Lem. 27.
delicet ut 4. ad 3.

Cum itaque trilineum $abcd$ ad triangulum edf , sit ut 4.
ad tria, erit idem trilineum ad triangulum adc ut 4. ad 12. &
ideo parabola ad triangulum adc erit ut 8. ad 12. & ad inscrip-
tum sibi triangulum ut 8. ad 6. Nempe sesquitercia. Quod erat
demonstrandum &c.

Lemma XXVIII.

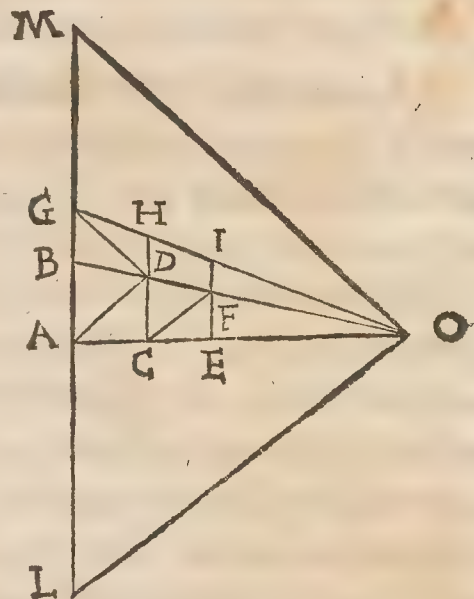
Si fuerint infinitæ numero rectæ linæ AB , CD , EF . &c.
in continua proportionem Geometrica maioris inæqualitatis: al-
tera autem ponatur progressio BG , DH , FI &c. ita ut sit quem-
admodum AB prima ad BG primam, ita CD secunda ad DH
secundam: & ita tertia EF ad tertiam FI & sic semper. Di-
co uniuersum aggregatum progressionis AB , CD , EF , &c. ad
aggregatum progressionis BG , DH , FI , esse ut AB ad BG .

Intel-

70 De Dimensione Parabolæ

*Intelligentur omnes termini duarum progressionum esse in flexilinis &c. iunctisq; ad, gd, ducatur ol parallela ipsi ad, & om parallela ipsi dg, Eritq; bl aqua-
 iuxta Lem. 25. lis omnib. infinitis terminis ab, Lem. 26. cd, ef. &c. ipsa vero om aqua-
 Lem. 26. lis omnibus infinitis terminis relique progressionis bg, dh, fi.*

Iam: ut lb ad ba, ita est o a. sexti. b ad bd, hoc est mb ad bg: Permutando igitur, Aggregatum lb, ad aggregatum bm, est ut ab ad bg; nempe ut una magnitudo ad unam. Quod erat &c.



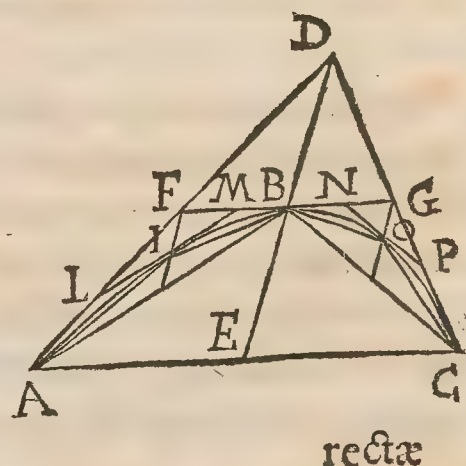
Hoc Theorema poterat supponi tamquam demonstratum in Propositione 12. libri V. Euclidis: unum enim atq; idem est cum Theoremate dictæ Propositionis: Verum, quoniam ferè omnes opinantur Euclidem ibi supponere multitudinem magnitudinum finitam, voluimus auxilio flexilineorum uti,

Propositio XVI.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Sit parabola ABC, cuius diameter DE, tangentes ad basim AD, CD: per verticem vero FBG. triangulum inscriptum ABC. Dico parabolam trianguli ABC. esse sesquitertiam.

ob parabola. Cum enim ipsa EB æqualis sit ipsi BD, recta verò AC dupla



Problema Primum.

71

rectæ FG ; erit inscriptum triangulum ABC duplum trianguli FDG sub tangentibus compræhensi. Et hoc semper verum est etiam circa reliquas portiones parabolicas AIB , BOC ; (est enim AIB parabola, cuius tangentes ad basim sunt AF , BF , ideoq; triangulum inscriptum AIB duplum erit trianguli tangentium LFM . Idemq; verum etiam est ex alterâ parte: Ergo duo simul triangula AIB , BOC , dupla sunt duorû simul LFM , NGP .) ergò cum sint duæ progressionēs vtrâq; in proportione continuata magnitudinum infinitarum multitudine, (altera nempe intrâ parabolam, cuius primus terminus est triangulum ABC , secundus verò, duo triangula simul AIB , BOC &c. altera verò progressio extrâ parabolam, cuius nempe primus terminus est triangulum FDG ; secundus autem duo simul triangula LFM , NGP . &c.) suntq; singuli termini progressionis, quæ intrâ parabolam est, dupli singulorum terminorum progressionis, quæ extrâ est: Erit ergo aggregatum vniuersum primæ progressionis duplum totius aggregati secundæ progressionis; Nempe ipsa parabola dupla erit trilinei mixti $ABCD$. Componendo igitur, & per conuersionem rationis, erit triangulum ADC ipsius parabolæ sesquialterum, nempe vt 6. ad 4. ideoq; parabola ad triangulum ABC erit vt 4. ad 3. videlicet sesquitertia. Quod erat ostendendum &c.

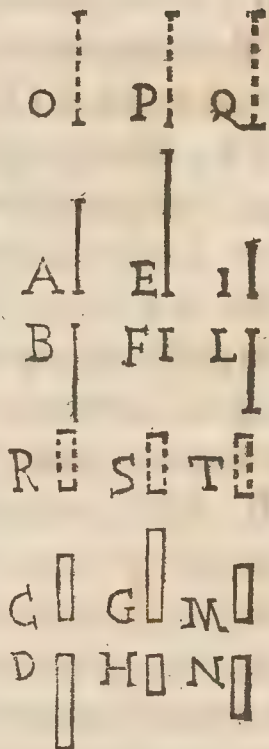
Lemma 28.

Parabolæ quadratura haberi potest sumptis alijs principijs, operamē indiuisibilibus. Supponimus quæ Archimedes demonstrauit in libro de lineis Spiralibus ad Propositiones 14. & 25. Premisso Lemmate huiusmodi.

Lemma XXIX.

Si fuerit vt prima magnitudo ad secundam, ita tertia ad quartam, & hoc quotiescunq; libuerit: fuerintq; omnes primæ, item & omnes tertiæ eodem ordine proportionales: Erunt omnes primæ simul ad omnes secundas, vt sunt omnes tertiæ simul ad omnes quartas.

Sit a prima ad b secundam, ut c tertia ad d quartâ; & e ad f, ut g ad h; & hoc quotiescunq; libuerit. Sintque omnes primæ a, e, i, &c. & omnes tertiæ c, g, m, &c. proportionales ex ordine; Nempe ut a ad e ita sit c ad g. Amplius: ut a ad i, ita sit c ad m &c. et sic semper. Dico omnes primas simul a, e, i, etc. ad omnes secundas simul b, f, l etc. esse ut sunt omnes tertia simul c, g, m, etc. ad omnes quartas simul d, h, n etc.



Accipiantur o, p, q; singulæ æquales primæ primarum, hoc est ipsi a; et sint totidem quot sunt omnes primæ a, e, i; etc. Item sumantur r, s, t; totidem quot sunt, omnes tertiæ; et sint singulæ r, s, t, æquales primæ tertiæ nempe ipsi c.

Iam ob æqualitatem erit ut o ad a, ita r ad c. Amplius: Cum p sit æquis ipsi a, et s ipsi c, erit (propter suppositionem) ut p ad e, ita s ad g. et hoc semper. sunt
 Lem. 18. que omnes o, p, q æquales, itemq; omnes r, s, t, æquales, ergo erunt omnes simul o, p, q, etc. ad omnes a, e, i, etc. ut omnes r, s, t, simul, ad omnes c, g, m. Denique conuertendo, omnes a, e, i, ad omnes o, p, q, erunt ut omnes c, g, m, ad omnes r, s, t. Quod memento.

Quoniam uerò ut o ad a, ita r ad c: et ut a ad b, ita c ad d: erit ex aquo o ad b, ut r ad d: Eadem penitus ratione concludemus ex aquo esse ut p ad f, ita s ad h: et sic de ceteris.
 Lem. 18. Erunt ergo omnes simul o, p, q, etc. ad omnes b, f, l, etc. ut sunt omnes simul r, s, t, etc. ad omnes d, h, n; etc. Quare ex æquo erunt omnes a, e, i, etc. ad omnes b, f, l, etc. ut omnes c, g, m, etc. ad omnes d, h, n, etc. Quod erat ostendendum

74 De Dimensione Parabolæ

25. de li-
neis spi-
ralibus.

tas simul, hoc est ad reliquum ipsius circuli, dempto helici spatio $CAGC$. Circulus autem CLH , dicti spatij, dempto helici spatio, sesquialter est; Ergò etiam triangulum ACE sesquialterum erit trilinei mixti $ABCE$: Et per conuersionem rationis, triangulum ACE , triplum erit parabolæ ABC . Reliquum quadraturæ absoluetur vt in 9. Propositione factum est.

Quod autem assumptum fuit, nunc ostendemus; scilicet quòd omnes primæ, omnesque tertiæ magnitudines sint proportionales eo modo, vt requiritur in lemmate precedenti.

Ducatur in premissa figura, qualibet mo , æquidistans ipsi fd ; & ponamus ipsam fd esse primam primarum, ipsam verò peripheriã dpg primam tertiæ. Erit ergò df ad om , vt da ad ao , siue vt peripheria dpg ad peripheriam cuius semidiameter est ao &c. Et sic semper. Quod oportebat &c.

Parabolam etiam quadrabimus intentata adhuc via; nimirum quesito eius centro grauitatis à priori ope indiuisibilium. Supponimus autem lemma, quod Archimedes ostendit in secundo Aequiponderantium. Hoc est parabolarum centra grauitatis, in eadem proportionem suas diametras secare.

Lemma XXX.

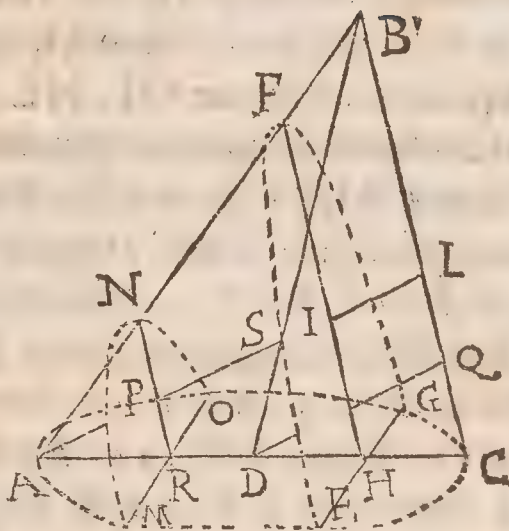
Centrum grauitatis parabolæ diametrum ita diuidit, vt pars ad verticem terminata, reliquæ sit sesquialtera.

Esto conus quilibet abc , cuius basis amc , axis bd , triangulum verò per axem sit abc ; & sectus sit conus plano efg , vt iubetur in XI. Propositione lib. primi Conicorum. Eritque sectio quæ vocatur parabola, illiusque diameter erit fh , Esto iam centrum grauitatis parabolæ efg , quoduis punctum, puta i . Ostendendum est rectam fi sesquialteram esse ipsius ih .

Agatur per punctum i recta ail ; seceturque conus alio plano mno , ipsi efg parall: eritq. sectio mno parabola, & eius centrum grauitatis erit p (est enim ob parallelas, vt fi ad ih ,

ita

ita n^o ad pr; sed iⁿponitur cē-
trum grauitatis parabolę efg;
ergo per Proposit. 7. lib. secundi
equiponderantium p^{er} centrum
grauitatis erit parabolę mno.)
Et sic semper, vbicunq. sit pla-
num mno. Omnium ergo sin-
gillatim parabolarum quę sunt
in cono abc, centra grauitatis
reperiuntur in recta al: Quare
etiam commune centrum graui-
tatis omnium earundem simul.



prędictarum parabolarum erit in recta al. Omnes autem para-
bolę, atq. ipse conus idem sunt; ergo centrum coni est in recta a
l; quod cum sit etiam in axe bd: erit centrum coni in communi
concurso l, id e^oq. bl erit ipsius ld tripla.

Ducatur ex centro basis recta dq, equidistans ipsi al; erunt
que equales cq, ql. Cum autem ob centrum coni ipsa bs tri-
pla sit ipsius ld, erit etiam bl tripla ipsius lq: & ideo bl ses-
quialtera ipsius lc: Quare etiam fi sesquialtera erit ipsius ih.
Quod erat propositum & c.

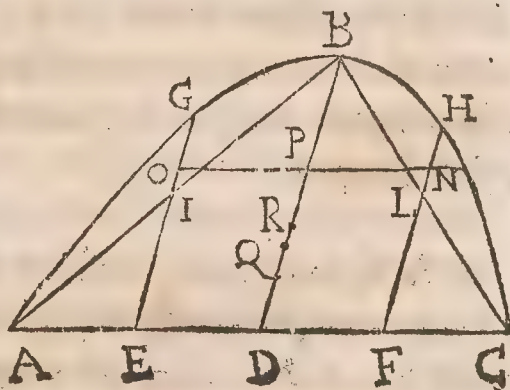
ob 2. sex.
ti.
2. sexti.

Propositio XVIII.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eā-
dem altitudinem habentis.

Est parabola ABC, cuius
diameter BD: inscriptum verò
triangulum ABC. Dico para-
bolam sesquitertiam esse triangu-
li ABC.

Secentur bifariam AD, DC
in punctis E, & F: ductęq. EG,
FH, diametro æquidistantes, ip-



se dic-

76 De Dimensione Parabolæ

læ diametri erunt portionū AGB , BHC . Sint centra grauitatis dictarum portionum O , & N ; eruntq; vtraq. GO , HN , sesquialtera reliquæ OI , NL . Iungatur ON , & in ipsa ON erit centrum commune grauitatis duarum portionum: sed est etiam in BD (nam in BD est tam centrum totius parabolæ, quàm etiam trianguli ABC) Quare punctum P . centrum erit portionum AGB , BHC . Ponatur BD partium 60 . eritque GE , (cum sit sub sesquitertia ipsius BD) partium 45 . ipsa IE 30 . & ipsa EO , hoc est DP . 36 . Sit Q . centrum grauitatis trianguli ABC . Eritq. DQ . 20 . Sit R centrum parabolæ, eritq. RD 24 . Erit ergo PR , 12 . & RQ , 4 . Sed vt PR ad RQ ita reciprochè triangulum ABC ad duas portiones AGB , BHC . Quare triangulum ABC ad duas portiones AGB , BHC erit vt 12 . ad 4 . nempe vt 3 . ad vnum; Componendò que, & per conuersionem rationis, erit parabola ABC ad inscriptum sibi triangulum vt 4 . ad 3 . Nempe sesquitertia. Quod erat propositum &c.

Nova adhuc ratione quadraturam parabola inuademus sumpto sequenti lemmate, quod quidem è Schola Caualeriana prodijsserelatum est. Inseruiebat enim mensuræ cuiusdam solidi ab ipsa parabola circa ordinatim applicatam reuoluta, geniti. Est autem lemma huiusmodi, Authore Io. Antonio Roccha præstanti Geometra.

Lemma XXXI.

Si figura plana super aliquà sui rectà lineà figuram ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figuræ, vt sunt solida rotunda ab ipsis segmentis, circa secantem lineam reuolutis, descripta.

Esto figura plana qualibet $acdbfe$, quam secet recta linea ab : & concipiatur figura librari super rectà ab . Dico momentum segmenti $acdb$, ad momentum segmenti $aefb$. esse vt solidum rotundum genitum ex reuolutione segmenti $acdb$ circa
axem

axem ab , ad solidum rotundum genitum ex conuersione reliqui segmenti circa eundem axem reuoluti.

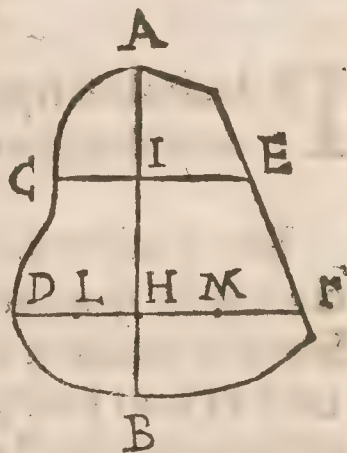
Sumptis enim duobus quibuscunq. punctis h , & i . in recta ab : ducantur per h & per i , rectae ce , df . perpendiculares ad ipsam ab : secanturq. bifariam segmenta dh , hf , in punctis l , & m .

Habebit ergo momentum rectae dh ad momentum rectae hf , rationem compositam ex ratione magnitudinum dh ad hf , & ex ratione distantiarum lh ad hm ; siue dh ad hf . Propterea momentum rectae dh ad momentum hf erit ut quadratum dh ad quadratum hf .

Eodem modo ostendetur momentum rectae ci , ad momentum rectae ie , esse ut quadratum ci ad quadratum ie , & sic semper.

Amplius momentum dh ad momentum ci , est (ob eandem rationem ut supra) ut quadratum dh ad quadratum ci : & hoc semper, Erunt ergo omnes primae simul magnitudines, nempe *Lim. 29.* omnia momenta figurae $acdb$, ad omnes secundas simul, nempe ad omnia momenta reliquae figurae $aefb$: ut sunt omnes tertie simul, nempe omnia quadrata figurae $acdb$, ad omnia quadrata reliquae figurae. Siue ut sunt omnes circuli figurae $acdb$ (nempe solia *km* rotundum ex ipsius conuersione circa axem ab descriptum) ad omnes circulos reliquae figurae $aefb$ (nempe ad solidum rotundum ex ipsius reuolutione circa eundem axem ab , genitum.) Quod erat ostendendum &c.

Hoc praemisso (quod quidem uti supra ediximus penitus ab alijs desumptum est, & hic insertum tamquam alienum, neque quod ego sciam adhuc vulgatum) parabolam quadrabimus, supposita demonstratione, qua multis modis probatur Cylindrum inscripti sibi conoidis parabolici esse duplum.

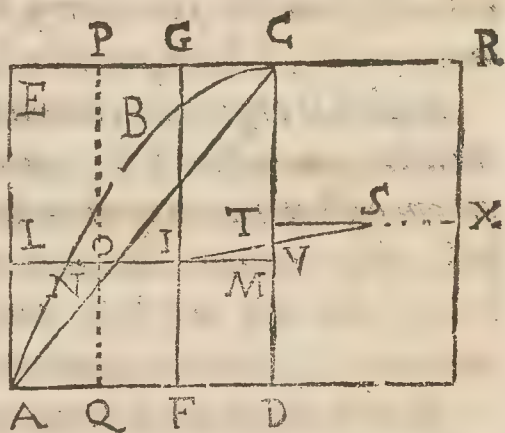


Propositio XIX.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Est semiparabola $ABCD$, circa quam sit rectangulum DE . Sumatur punctum F , ita ut AF ad FD sit ut 5. ad 3. ductaq. FG diametro æquidistans, erit in ipsa FG centrum gravitatis semiparabolæ. Est illud punctum quodlibet, puta I , & per I ducatur LI parallela ad AD , accipiatq. IN . æqualis ipsi IM .

Lem. II.



Intelligatur etiam producta PQ parallela diametro CD (vbi-
cunq. cadat) ita ut parallelogrammum rectangulum DP , æqua-
le sit ipsi semiparabolæ. Tum concipiatur applicatum ad rectā
 CD , rectangulum DR , ita ut æquiponderet semiparabolæ fa-
cta libratione super recta CD . Sitq. centrum dicti rectangu-
li punctum S ; & ducta TSX parallela ipsi AD iungatur recta
 IS .

Iam; manifestum est ex Lemmate præmissis quod cylindrus
factus à rectangulo DR circa axem DC reuoluto, æqualis
erit conoidali parabolico factus à conuersione semiparabolæ A
 CD , circa eundem axem CD reuolutę; cum æqualia suppo-
nantur figurarum planarum momenta. Erit ergo cylindrus à re-
ctangulo DR factus, subduplus cylindri à rectangulo DE fa-
cti, & ideo quadratum TX subduplum erit quadrati ML (cy-
lindri enim æquealti sunt inter se ut basium quadrata) quod me-
mento.

A. sexti.

Verum MN ad TX , est ut IM ad TS (sunt enim subdu-
plæ earumdem) siue ut IV ad VS ; nempe (quia æquiponde-
rant figuræ planæ super linea CD , siue ex puncto V) ut rectan-
gulum

Problema Primum.

81

gulum DR ad semiparabolam reciprochè, siue ad rectangulum DP . ipsi semiparabolæ æquale: siue vt eorum bases TX ad MO . Ergo TX media proportionalis est inter MN , MO : Quare rectangulum NMO , cum æquale sit quadrato TX , subduplum erit quadrati LM .

Ratio verò quadrati LM , ad rectangulum NMO , componitur ex ratione LM ad MN (quæ sesquitertia est per constructionem; sumpsimus enim punctum F ; ita vt AF ad FD , esset vt 5. ad 3.) & ex ratione LM ad MO ; quæ quidem ignota erat, sed necessariò sesquialtera nunc apparet. Ratio enim dupla componitur ex sesquitertia, & sesquialtera, vt ipsis etiam Cantoribus vulgatum est; vt videre est in his tribus numeris 4. 3. 2.

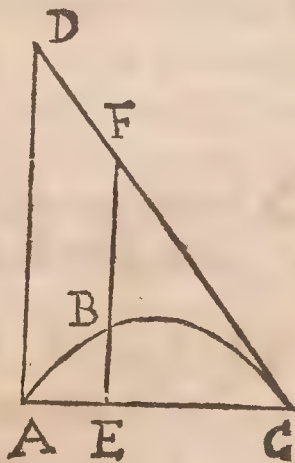
Rectangulum ergo DE ad ipsum DP , siue ad semiparabolam, sesquialterum erit; & ipsa semiparabola ad triangulum ACD . sesquitertia erit. Quod erat ostendendum &c.

Lemma XXXII.

Sit parabola ABC , cuius basis AC , tangens CD ; diametro æquidistans sit AD . Sumpto quolibet puncto E . ducatur EF diametro æquidistans. Dico esse vt FE ad EB , ita CA ad AE .

Est enim DA ad FB longitudine, vt DC ad CF potentià, siue vt DA ad FE potentià i Sunt ergo in continuà ratione DA , FE , FB . Quod memento.

Iam vt AC ad CE ita est AD ad EF , siue EF ad FB ; & per conuersionem rationis, vt CA ad AE , ita est FE ad EB . Quod erat ostendend. &c.



ob para-
bolam.

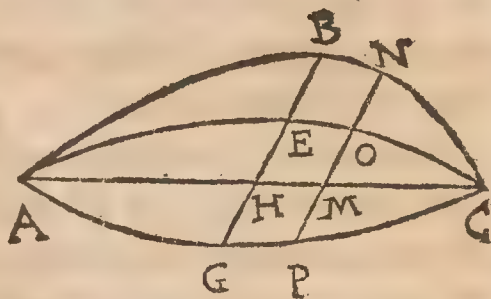
Lemma XXXIII.

Quælibet parabola æqualis est duabus parabolis simul sumptis, quæ quidem equalem ipsi basim habeant, diametrum vero sub-

82 De Dimensione Parabolæ

rò subduplam, & æqualiter inclinatam.

Est parabola abc , cuius diameter bh ; sintq. duæ aliæ parabola aec . agc . in eadem basi. Diametri vero he , hg , utraq. subdupla sit diametri hb : sed æqualiter ad basim inclinata, Dico parabolam abc æqualem esse figura $aecg$.

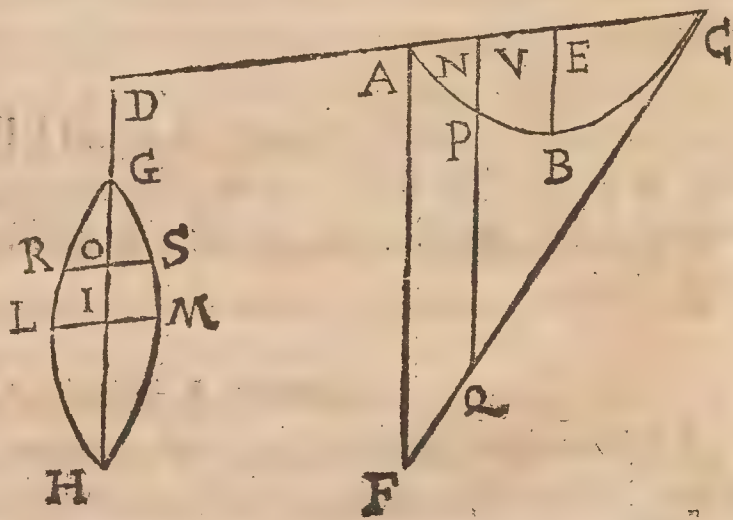


Sumatur enim quodlibet punctum in basi ac ; & sit m ; ductaq. pmn aquidistante ad diametrum bh . Erit bh ad nm , ut rectangulum ahc , ad rectangulum amc ; siue ut recta he ad mo . Et permutando ut bh ad he , ita erit nm ad mo . Quare nm dupla erit ipsius mo . Eodem penitus modo ostendetur nm dupla etiam ipsius mp , Ergò tota nm æqualis est ipsi op . Et hoc semper. Propterea omnes simul lineæ figura abc , (nempe ipsa parabola abc) æquales erunt omnibus simul lineis figura $aecg$, (nempe duabus parabolis aec , agc .) Quod erat &c.

Propositio XX.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eādem altitudinem habentis.

Est parabola ABC , cuius diameter BE concipiatur ad horizontem perpendicularis, & ipsa parabola inuersa statuatur. Producat CA in D , ita ut æquales sint CA , AD ; & sit DC lib-



Problema Primum.

83

bra, cuius fulcrum est A. Ducatur CF tangens parabolam; & AF diametro EB æquidistans. Ponatur etiam GH æqualis ipsi AC, & diuisa bifariam GH in I, sit vtraq. IL, IM, sub dupla rectæ EB. & æqualitèr ad basim inclinata vt est ipsa EB ad AC. Fiantq; duæ parabolæ GLH, GMH, quæ (per lemma præced.) simul æquales erunt parabolæ ABC; Et suspendatur figura GLHM ex puncto D.

Accipiātur iam puncta O, & N æqualiter distantia à punctis I, & E respectiuè. Ductisq. NQ æquidistantèr ad EB, & ROS ad LM; Erit vt in præcedenti lemmate NP æqualis ipsi RS.

Iam QN ad RS est (ob æqualitatem) vt QN ad NP, siue vt DA ad AN reciprocè. Aequiponderant ergo rectæ QN, & RS, & sic semper. Ergo omnes simul lineæ trianguli AFC (nempe ipsum triangulum) æquiponderant omnibus simul lineis figuræ GLHM, (nempe ipsi figuræ GLHM.)

Accipiatur AV tertià pars totius AC. Manifestum est, quod si ex V demittatur recta æquidistans ipsi AF. in ipsa erit centrum grauitatis trianguli AFC; eritq. ipsa ad horizontem perpendicularis. Propterea erit triangulum AFC appensum centralitèr ex puncto V. Eritq. triangulum AFC ad spatium GLHM. reciprocè vt DA ad AV, nempe triplum.

Cum autem spatium GLHM æquale sit parabolæ ABC; erit triangulum AFC triplum etiam parabolæ ABC.

Reliquum quadraturæ absolvitur vt in Propositione IX. Factum est, Quod &c.

Propositio XXI.

Parabola sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

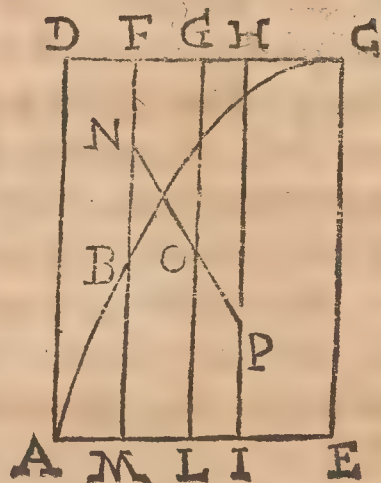
Est semiparabola ABC, cuius diameter CE, ordinata AE, tangens verò CD, & compleatur parallelogrammum AECD. Manifestum est quod omnes lineæ trilinei mixti D

L 2 ABC,

84 De Dimensione Parabolæ

ABC , quæ quidem diametro parallelæ sint, inter se sunt in eadem ratione in qua sunt omnes circuli coni alicuius, qui axem habeat DC , & verticem C .

LEM. 22. Ergo centrum grauitatis omnium linearum trilinei $DABC$, erit in illa, quæ diuidit libram DC ; quemadmodum diuidit eandem centrum grauitatis coni; nempe vt pars ad C terminata, reliquæ sit tripla. Fiat ergo CF tripla ipsius FD . & ducta FM parallela ad CE , erit centrum grauitatis trilinei $DABC$ in recta FM . vbicunq. sit.



Item, omnes lineæ, quæ in semiparabola $ABCE$ ducuntur ad diametrum parallelæ, inter se sunt in eadem ratione, in qua sunt omnes circuli alicuius hemisphærij, cuius axis sit AE , vertex verò A . Ergo centrum grauitatis omnium linearum ad libram AE appensarum, siue ipsius semiparabolæ, erit in illa, quæ libram AE sic diuidit vt diuidit eandem centrum grauitatis hemisphærij; Nempe vt pars ad A terminata, sit ad reliquam vt 5. ad 3. Fiat ergo AI ad IE vt 5. ad 3.; & ducta IH parallela ad CE , erit centrum semiparabolæ in recta IH , vbicunque sit. Ducatur tandem GL , quæ bifariam secet latera AE , DC . & in GL erit centrum grauitatis parallelogrammi DE . quod sit O . Ponatur centrum grauitatis semiparabolæ esse punctum quoduis P . ductaq. PO , producat in N ; & erit N . centrū grauitatis trilinei $DABC$. Iam, semiparabola ad trilineum est vt NO ad OP , siue vt ML ad LI ; nempe vt 2. ad vnum; (qualium enim partium tota AE est 8, talium AM est 2, ML est 2, LI est vna, & reliqua IE 3. per constructionem) Ergo semiparabola ad parallelogrammum erit vt 2. ad 3, siue vt 4. ad 6; & semiparabola ad triangulum inscriptum vt 4. ad 3. Nempe sesquitertia. Quod &c.

FINIS.

APPEN-

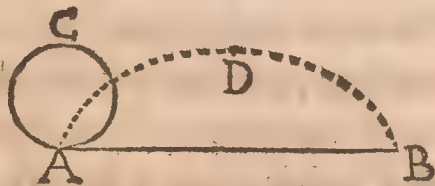
APPENDIX⁸⁵

De Dimensione Cycloidis.



IBET hic appendicis loco addere solutionem problematis non iniucundi, & si materiā, propositionemque spectes, primo intuitu difficilimi. Torsit hoc, fefellitq. pluribus ab hinc annis Mathematicos nostri seculi primarios; frustra enim tentata demonstratio euasit ab illorum manibus ob fallaciam experientie. Appensis namque ad libram manufactam spatijs figurarum materialibus, nescio quo fato, ea proportio quæ verè tripla est, semper minor quā tripla apparuit. Vnde factum est, quòd potius ob suspicionem incommensurabilitatis (ut ego credo) quàm ob desperationem demonstrationis, instituta contemplatio ab illis dimissa sit.

Suppositum est huiusmodi. Concipiatur super manente aliqua recta linea ab. circulus ac, contingens rectam ab. in puncto a.



Noteturq. punctum a, tamquā fixum in peripheria circuli ac. Tum intelligatur super manente recta ab. conuerti circulum ac, motu circulari simul & progressiuo versus partes b: ita ut subinde aliquo sui puncto recta linea ab semper contingat, quousq. fixum punctum iterum ad contactum reuertatur, puta in b. Certum est, quòd punctum a fixum in peripheria circuli rotantis ac, aliquam lineam describet, surgentem primò à subiecta linea ab, deinde culminantem versus d; postremo pronam, descendentemque versus punctum b.

Vocata est à predecessoribus nostris. Præcipue à Galileo iam supra 45. annum, huiusmodi linea ad b. Cyclois, recta verò ab. basis cycloidis; At circulus ac, genitor cycloidis.

Proprietas, & natura cycloidis ea est, ut basis ipsius ab. equalis

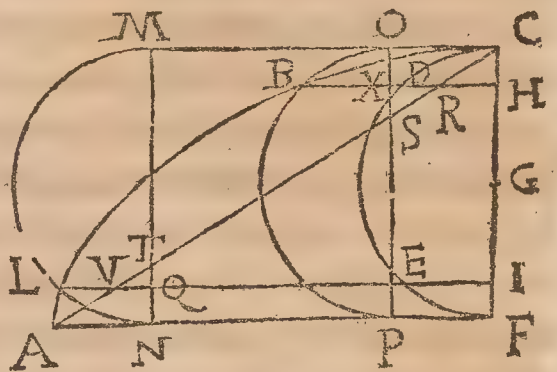
qualis sit peripharia circuli genitoris ac. Quod quidem non adeò obscurum est: Nam tota peripharia ac se ipsam in conuersione commensurauit super manente recta ab.

Queritur nunc quam proportionem habeat spatium cycloida-
le adb ad circulum suum genitorem ac? Ostendemusque, Deo
dante, triplum esse. Demonstrationes tres erunt, inter se peni-
tus diuersae. Prima, & tertia per nouam Indiuisibilem Geome-
triam nobis amicissimam procedent: secunda verò per duplicem
positionem, more veterum recepto; ut utrisque fautoribus satis-
fiat. Ceterum, hoc moneo; principia ferè omnia, quibus aliquid
per Indiuisibilem Geometriam demonstratur, ad solitam anti-
quorum demonstrationem indirectam reduci posse: quod à nobis
factum est, ut in multis alijs, ita etiam in primo, & tertio sequen-
tium Theorematum; sed ne lectoris patientia nimium adhuc abu-
teremur plura omittenda censuimus, tresq; tantum demonstra-
tiones exhibemus

THEOREMA I.

Omne spatium quod sub linea Cycloide, & recta eius basi
continetur, triplum est circuli sui genitoris; siue sesquialterum
trianguli eandem basim, & eandem altitudinem habentis.

Est Cyclois linea abc de-
scripta à puncto c circuli cd
ef dum ipse circumuertitur
super manente basi af. (con-
sideramus autem semicycloi-
dem, & semicirculum tantum
ad euitandam figura confu-
sionem.) Dico spatium abc
f triplum esse semicirculi cd
ef; sine sesquialterum trianguli acf,



Accipiantur duo puncta h, & i in diametro cf. aequè remo-
ta à centro g. Ductisq. hb, il cm aequidistanter ipsi fa, tran-
seant per puncta b, & l semicirculi obp, mln, æquales ipsi c
df, & contingentes basim in punctis pn.

Nanise.

Manifestum est rectas hd , ie , xb , ql aequales esse, per 14 Tertię, aequalesq. erunt arcus ob , ln . Item cum aequales sint ch if , aequales erunt cr , ua ob parallelas.

Tota peripheria mln , ob cycloidem, aequalis est rectę af . itęque arcus ln rectę an ob eandem causam, cum arcus ln seipsum super rectę an commensurauerit; ergo reliquus arcus lm , reliqua rectę nf aequalis erit. Eadem ratione arcus bp . rectę ap , & arcus bo rectę pf , aequalis erit,

Iam rectę an aequalis est arcui ln , siue arcui bo , siue rectę pf . Ergo ob parallelas, aequales erunt at , fc . Verum quia aequales erant etiam cr , au . reliquę ut, fr aequales erunt. Propterea in triangulis aequiangulis utq, rsx , aequalia erunt latera homologa uq , xr . Patet itaque quod duę rectę lu , br simul sumptę aequales erunt duabus rectis lq , bx , nempe ipsis ei , dh , & hoc semper verum erit ubicunq. sumantur duo puncta h , & i , dumodo aequaliter a centro sint remota. Ergo omnes lineę figurę $albca$ aequales sunt omnibus lineis semicirculi $cdef$; & ideo figurę bilinearis $albca$ aequalis erit semicirculo $cdef$.

Sed triangulum acf duplum est semicirculi $cdef$. (nam triangulum acf reciprocum est triangulo Propos. pr. Arch. de dimens. circ. cum latus af semiperipherię, latus verò fc diametro sit aequale, unde sequitur triangulum acf aequale esse integro circulo cuius diameter sit cf .) Ergo componendo, totum cycloidale spatium sesquialterum erit trianguli inscripti acb ; Triplum verò semicirculi $cdef$. Quod erat.

Lemma I.

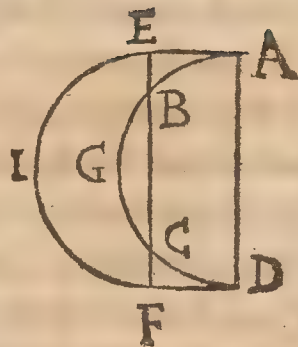
Si super lateribus oppositis alicuius rectanguli AF , duo semicirculi descripti sint, EIF , AGD erit figura sub periphærijs, & sub reliquis lateribus comprehensa aequalis prædicto rectangulo.

Vocetur autem talis figura Arcuatum; tam si fuerit integra, quàm etiam ipsius partes, quando secta fuerit à lineâ ipsi fd parallela.

Demon-

Demonstratur; quoniam cum sint aequales semicirc. dempto communi segmento b g c, additisque communibus trilineis e b a, c f d. clarum erit propositum.

Quando verò detur casus quod segmentum nullum sit, tunc breuior, faciliorq. demonstratio erit. Facile etiam per eandem prostapheresim ostenditur arcuatum sectum à linea ipsi f d parallela equale esse rectangulo aequali, & super eadem basi constituto.



Lemma II.

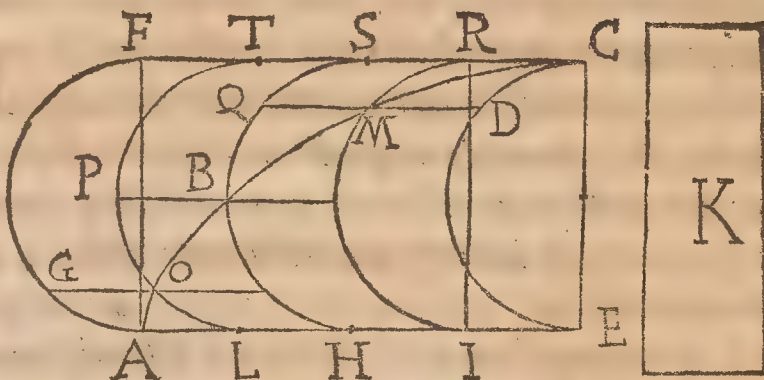
Est lineacycloidalis abc descripta à puncto c semicirculi cde dum conuertitur supermanente ac.

Compleatur rectangulū afce,

fiatq. circa diametrum af semicirculus agf. Dico cycloidem abc secare bifariam arcuatum agfcde.

Si enim ita non est, erit utiq. alterum ex duobus trilineis fga bc, abcde, magis quam dimidium eiusdem arcuati. Esto & ponatur alterum ex ipsis (quodcumq. sit) puta abcde maius quàm dimidium arcuati. Sitq. excessus, quo trilineum superat semissem arcuati, aequalis spatio cuidam K.

Secetur bifariam ae in h; & iterum he in i: & sic fiat semper donec rectangulum aliquod iec minus reperiatur spatio K. Tunc diuidatur integra ae in particulas aequales ipsi ie, & per puncta diuisionum l, h, i, transeant semicirculi aequales ipsi cde semicirculo, tangentes basim in punctis l, h, i. secantesq. cycloidem in o, b, m, per quae puncta agantur recta go, pb, qmd aequidistantes basi ae.



Erit itaque arcuatum oh æquale ipsi gl : arcuatum verò bi æquale arcuato ph : & arcuatum me æquale arcuato qi . Propterea uniuersa figura inscripta in trilineo $abcde$ constans ex arcuatis, æqualis erit figura eidem trilineo circumscriptæ, excepto tamen arcuato $imrcde$. Quod si figura circumscripta addas suum arcuatum $imrcde$, superabit circumscripta figura ipsam inscriptam excessu prædicti arcuati, siue rectangulo re , nempe minori excessu quam sit spatium K . Propterea inscripta in trilineo figura adhuc erit plusquam dimidium arcuati $agfcde$. & ideo maior quam trilineum $fgabc$. Sed eadem æqualis est alteri figure ex arcuatis compositæ & in trilineo $fgabc$ descriptæ: ostendi-
tur infra ergo hæc inscripta figura maior esset suo trilineo $fgabc$. pars suo toto. quod esse non potest.

Quod inscripta figure sint æquales patet. Nam arcus ol æqualis est rectæ la , hoc est rectæ ie , hæc est arcui rm (ob cycloidem.) Ergo arcuatum oh æquale erit arcuato ml . & sic de singulis.

Si uerò supponeremus trilineum $fgabc$ maius quam dimidium arcuati $agfcde$, constructio figure, & demonstratio penitus eadem erit. Ergo concludemus cycloidem lineam abc bifariam secare arcuatum $agfcde$. Quod erat propositum.

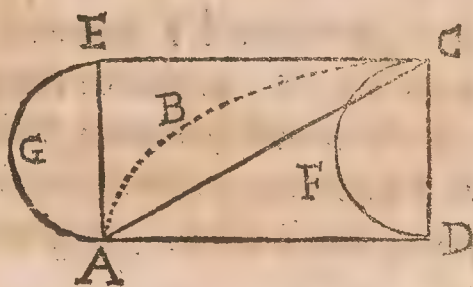
THEOREMA II.

Spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.

Est cyclois abc descripta à pñcto c circuli cf . dico spatium $abcd$ triplū esse semicirculi cf .

Compleatur rectangulum $adce$; factoque super ae semicirculo age , ducatur ac .

Triangulum adc duplum est semicirculi cf (nam basis ad æqualis est periphæriæ cf ob cycloidem, altitudo verò dc æqualis diametro) ideo rectangulum ed quadruplum erit eius-



M

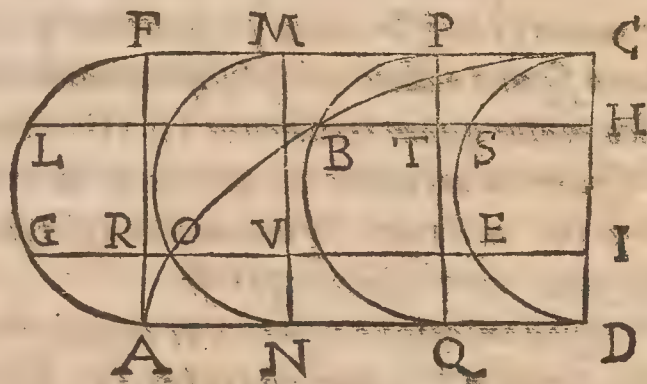
dem

dem semicirculi ced . Ergo arcuatum $agecfd$ quadruplum erit eiusdem semicirculi: propterea trilineum $ab cfd$ (per lemma praecedens) duplum erit semicirculi, & componendo spatium $abcd$ triplum erit eiusdem semicirculi ced .

THEOREMA III.

Omne spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.

Est cycloidalis linea abc descripta à puncto c semicirculi ced . Di-
co spatium $abcd$ triplum esse semicirc. ced .



Compleatur rectangulum $afcd$; factoq. semicirculo agf , accipiatur duo puncta h , & i in diametro cd eque remota à centro, & ducantur hl , ig aquidistantes ad ad . quae cycloidem secant in quibusvis punctis b , & o . Agantur denique per b , & o duo semicirculi pbq , mon , ut in praecedentibus factum est.

Iam recta go , equalis est rectae ru (cum aequales sint gr , ou , & communis ro) siue equalis est rectae an , nempe arcui on (ob cycloidem) vel arcui pb , siue rectae pc , vel th , vel bf .

Eodem prorsus modo, quo demonstrauimus rectam go aequalem esse rectae bf , demonstrantur omnes & singulae lineae trilinei $fgabc$ aequales omnibus lineis trilinei $abcd$. Propterea dicta trilinea inter se aequalia erunt. Ergo ut in praecedenti Theoremate demonstrabitur cycloidale spatium triplum esse semicirculi ced . Quod erat &c.

F I N I S.

SCHO.

SCHOLIUM⁹¹

De Cycloidibus aliarum specierum.

HActenus de Cycloide dictum sit: ulterius enim contemplationem hanc demonstrando protrahere odiosum esset, & ex appendice liber fieret. Proponi tamen poterant adhuc non pauca circa hanc figuram planam, quam Cycloidem Primariam appellare non esset inconueniens; quandoquidem infinitae aliae species huiusmodi figurarum ab ipsa iam considerata primaria Cycloide oriuntur. Concipiamus enim (in figura paginae 85.) non solum periphaeriam circuli ac aequabili conuersione rotari, sed etiam uniuersum planum tam internum, quam externum ipsius circuli ac in infinitum extensi. Manifestum est quod circuli centrum rectam lineam describet ipsi ab aequidistantem. Puncta uero, quae intra periphaeriam ac sunt constituta, Cycloides describent humiliores quam ipsa primaria adb . quasdam etiam (quod incredibile quasi uidetur) flexuosas, & non ad easdem partes concuum habentes: tales autem fient à punctis prope centrum circuli rotantis ac existentibus. Puncta uero, quae extra periphaeriam ac erunt, Cycloides describent, ipsa primaria altiores, & usque in infinitum crescentes.

Circulum cuiuscunq. cycloidis proprium genitorem dicere possumus eum, cuius periphaeria concentrica sit periphaeriae ac , transeatq. per punctum cycloidem ipsam describens.

In hoc conueniunt omnes, quod aequalibus basibus insistant; humiliores tamen cycloides basim habent genitrici periphaeria maiorem: altiores uero minorem genitrici periphaeria basim habent.

Ratio, quam unaquaeq. cycloidalis figura habet ad suum triangulum, vel ad circulum suum proprium genitorem, semper est maioris inequalitatis, & variatur in infinitum. Si tamen utrum

que simul consideres & triangulum, & circulum, equalitatis ratio erit.

Omne spatium sub qualibet cycloide linea, & recta eius basi contentum, ad triangulum super eadem basi, & sub eadem altitudine constitutum, est ut periphæria circuli proprii genitoris vna cum duplo basis cycloidis, ad duplum basis cycloidis. Ad circulum verò proprium genitorem vnumquodque cycloidale spatium est ut duplum basis cycloidis vna cum periphæria genitoris circuli ad eiusdem circuli periphæriam.

Hinc problemati locus pararetur, data quacunq; ratione maioris inequalitatis, cycloidale spatium inuenire, quod ad triangulum, siue circulum suum sit in data ratione, & in data basi.

Cuiuscunq; cycloidalis spatij ad quodlibet spatium cycloidale (etiam si non ab eadem primaria cycloide ortum ducant) ratio componitur ex ratione altitudinis ad altitud., & ex ratione dupli basis cum periphæria genitrice, ad duplum basis cum periphæria genitrice.

Tangentem ad quodlibet imperatum punctum dari posse certum est; peculiari primum ratione pro Cycloide primaria; deinde universali etiam pro omnibus alijs. Tangens ad datum quodlibet punctum primariæ cycloidis ducitur ex puncto sublimiori genitoris circuli per ipsum datum punctum transeuntis.

Tangens ad datum punctum cuiuscunque cycloidis ducitur hoc modo. Transeat per datum punctum cycloidis circulus ipsius genitor, quem in dato eodem puncto contingat recta conueniens vel cum basi cycloidis, vel cum alia ipsi æquidistante. Fiatq; ut radius circuli proprii ad radium circuli primarij, ita tangens prædicta inter datum punctum, & basim, vel æquidistantem intercepta, ad aliam quandam lineam aptè sumendam à termino tangentis in ipsa vel basi, vel æquidistante. Tum ab extremitate huius assumptæ tangens ad imperatum punctum cycloidis emittatur.

Nonnulla etiam Theoremata pro Mechanicis contemplatoribus ex hac figura derivari possent, nisi consulendum iam tandem esset ne simul cum molestia tedium fiat,

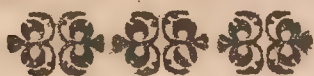
F I N I S.

D E

SOLIDO ACVTO

HYPERBOLICO

Problema alterum.



Proemium ad Lectorem.

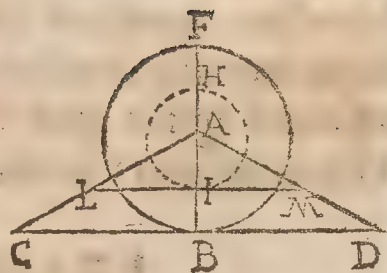


GGREDIOR iam opus quod ipsis Geometriae candidatis non solum difficile videatur verum etiam impossibile. Haecenus enim in Mathematicis Scholis repertae sunt dimensiones figurarum ab omni parte finem habentium: quandoquidem inter omnia solida, quae ab antiquis, & modernis Auctoribus multiplici conatu ad mensuram redacta sunt, nullum adhuc, quod ego sciam, ullam dimensionem habuit extensione infinitam. Imò statim atque proponatur siue solidum aliquod, siue figura plana, cuius aliqua extensio in infinitam distantiam procedat, unusquisque cogitabit huiusmodi figuram infinite magnitudinis esse debere: Attamen solidum habet Geometria, longitudine quidem infinitum, sed tanta praeditum subtilitate, ut licet in infinitum producat, exigui tamen cylindri molem non excedat. Tale erit solidum illud ab hyperbola genitum, quod huius libelli contemplatione prosequemur; intactum hucusque ab alijs, & multiplici, curiosaque Theorematum varietate fecundissimum; eò usque, nisi me fallat

lat affectus, vniuersa Geometria inter hæcenus consideratas figuras nullam habeat curiositatis abundantiorē.

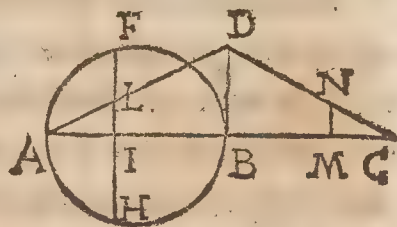
Quo ad methodum demonstrandi, vnicum quidem, & præcipuum Theorema duplici conatu ostendemus, & per indiuisibilia, & more Veterum. Quamquam (vt vera fateamur) primò inuentum sit per Indiuisibilium Geometriam; qui sanè verus est demonstrandi modus scientificus, semper directus, & ipsi naturæ germanus. Miseret me veteris Geometriæ, quæ cū Indiuisibilium doctrinam, siue non nouerit, siue non admiserit, circa dimensionem solidorum adeò paucas veritates inuenit, vt ipsa penuriâ infelix ad ætatem nostram peruenerit. Antiquorum enim Theoremata circa doctrinam solidorum, quota pars sunt contemplationum, quas mirabilis nostro æuo Caualerius (omssis alijs) instituit, circa tot classes solidorum, specie differentium, multitudine abundantium? Methodus nostra, quam vsurpaturi sumus in præfato Theoremate, procedet per Indiuisibilia curua, sine aliorum exemplo, non tamen sine præmissa Geometriæ approbatione, Considerabimus enim omnes cylindricas superficies circa communem axem in nostro solido descriptibiles. Cuius rei cum nullum Caualerius ipse tradiderit in sua Geometria elementum, existimauimus nostram arguendi rationem exemplis aliquot esse corroborandam. Quamquam hoc apud me superfluum sit; cum iam totum huius libelli progressum ratum habeam, eò quòd ipsum admiserit, probaueritque doctissimus, & eruditissimus vir *Raphael Magiottus*; cui, vt in plurimis alijs scientijs, artibusq; ita & in Mathematicis disciplinis neminem quis iure anteposuerit. Præmittemus itaque ante ipsum opus, sub Exemplorum nomine, quasdam Geometriæ propositiones iam pridem notas, sed à nobis per Indiuisibilia curua demonstratas: Sic enim magis manifestum fiet hunc modum demonstrandi non esse negligendum, præsertim cum in rebus difficillimis maximum ipsius momentum reperia-
tur. Indiuisibilia verò curua quæ ad huiusmodi demonstrationes idonea sunt, in planis quidem figuris solæ circulorum periphæriæ se se offerunt; in solidis autem, superficies sphaericæ, cy-
lin-

circulusq; lim in cono cad. Iam: superficies spherica bf equalis erit circulo cd. spherica verò bf, ad sphericam ih, est ut quadratum ba, ad quadratū ai; sine ut quadratum bc ad quad. il; nempe ut circulus cd, ad circulum lm. Sed antecedentes equales sunt; ergò etiā consequentes: nempe spherica superficies ih, equalis erit circulo lm. Et hoc semper, ubicumque sit punctum i. Propterea omnes sphaericae superficies simul (sine ipsa sphaera bf) aequales erunt omnibus circulis simul sumptis. sine cono cad. Quod erat &c.



Aliter

Esto sphaera, cuius diameter ab, tangensq. bd sit aequalis semidiametro sphaerae: Et coniuncta ad, conuertatur triangul. adb circa axem bd. ita ut fiat conus rectus adc.



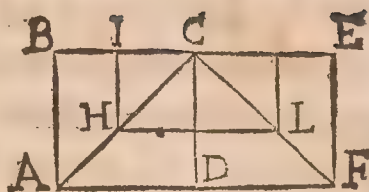
*Dico sphaeram ab aequalem esse co-
no adc. Sumatur enim in diametro ab quodvis punctum i,
per quod transeat circulus fh, ad axem erectus in sphaera; & su-
perficie cylindrica limn, circa axem db in cono.*

A. sexti. Iam: cum ab dupla sit ipsius bd, erit ai dupla il, ergo quadratum fi, quod aequale est rectangulo aib, duplum erit rectanguli lib, & aequale rectangulo lim. Propterea erit circulus fh aequalis superficiei cylindricae limn. Et hoc semper, ubicunque sit punctum i. Ergo omnes circuli simul, siue ipsa sphaera, & aequales erunt omnibus superficiibus cylindricis simul sumptis, nempe ipsi cono adc, Quod concordat cum 32. lib. 1. De Sphaera & Cyliandro Archimedis.

Exemplum III.

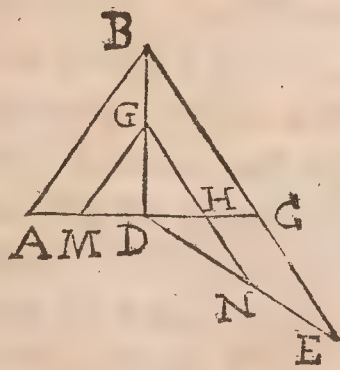
E Sto quadratum $abcd$ (nisi enim quadratum supponatur, ratiocinatio falsa euaderet, ob inaequalem superficialium spissitudinem; siue ob diuersitatem transitus) cuius quadrati esto diameter ac ; & conuertatur figura circa axem cd , ita ut fiat cylindrus $b.f$, & conus acf . Sumatur deinde in recta ac , quoduis punctum h ; per quod intelligatur actus circulus hl , intra conum comprehensus; & insuper superficies cylindrica, cuius sectio sit hi , axis verò cd . Erit ergò superficies cylindrica hi ad circulum hl suam basim, ut recta hi , ad quartam partem diametri hl . Et hoc verum erit semper, ubicunq; sit punctum h . Ergò omnes simul superficies cylindricæ (nempe solidum, quod ex cylindro relinquitur, dempto cono acf) ad omnes simul circulos (hoc est, ad conum acf) erunt, ut sunt omnes simul rectæ trianguli abc , ad quartam partem omnium rectarum trianguli acf ; nempe in ratione dupla. Quod concordat cum Theoremate X. lib. XII. Euclidis.

4. primi
de Solid.
Sphar.



Exemplum IV.

E Sto conus rectus abc , cuius axis bd ; & producta bc in e , ita ut circulus, cuius diameter ce , sit equalis curvæ superficiei conici abc , concipiatur circa diametrum ce circulus erectus ad planum abc ; & super circulo ce , intelligatur alter conus cde , habens verticem in d . Dico conum abc , cono cde , esse equalem.



Sumatur in recta dc quoduis punctum h , per quod ducta gh parallela ad be , intelligatur per hg superficies conica mgh ; cir-

gh; circūq; ipsam hn circulus parallelus circulo ce. Iam: conica superficies abc, ad circulum sua basis ac, est ut recta bc ad cd, siue ut gh ad hd; nempe, ut conica superficies mgh, ad circulum hm. Circulus autem ac, ad circulum ce, est ut quadruplum quadrati dc, ad quadr. ce; siue ut quadruplum quadrati dh, ad quadrat hn; hoc est ut circulus mh, ad circulum hn. Ergo ex aequo, erit conica superficies abc, ad circulum ce, ut conica mgh, ad circulum hn. Et hoc semper verum erit, ubicunq; fuerit punctum h. Ergo omnes simul conice superficies (nempe conus abc) æquales erunt omnibus simul circulis, nempe cono cde. Quod erat &c.

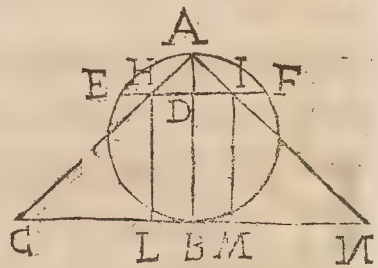
Concordat cum hoc Theoremate Propos. xvij lib. primi De Sphæra, & cylindro Archim.

Exemplum V.

Esto circulus, cuius diameter ab, ponaturque tangens bc diamet. equalis, & iuncta ac, conuertatur figura circū axē ab, ita ut fiat sphaera aebf, & conus rectus can.

Dico conum can, ipsius sphaera duplum esse.

Accipiat in diametro ab quodlibet punctum d, per quod agatur planum ef ad axem ab erectum; quod quidem planum duos circulos efficiet, alterum ef in sphæra, alterum verò hi in cono; Conci-



piatur super basi hi cylindrus rectus hlmi. Iam: superficies solis: sph: cylindri hlmi, ad circulum ef, est ut rectangulum li, ad quadratum ed; nempe dupla. Et hoc semper; ubicunq. sit punctum d: propterea, ut una ad unā, ita omnes ad omnes. Erunt ergo omnes superficies cylindricæ, nempe conus can, ad omnes circulos, nempe ad sphaeram aebf, in ratione dupla. Quod &c.

Concordat cum hoc Theoremate Proposit. xxxij. De Sphæra, & cylindro.

Exem-

Exemplum VI.

Esto circulus, cuius diameter ab , tangensq; ac ponatur diametro aequalis coniunctaq; ec , conuertatur figura circa axem ef aequidistantem tangenti ac , ita ut à circulo describatur sphaera, à triangulo vero ace solidum quoddam cylindricum excanatum dempto cono ced . Dico sphaeram praedicti solidi excanati esse aequalem.

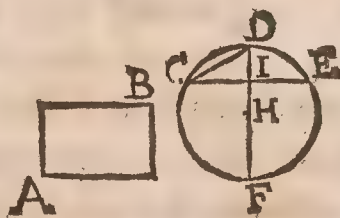
Sumatur in diametro ab quoduis punctum h , per quod intelligatur superficies spherica hi , priori superficiei sphaericae concentrica; & insuper superficies cylindrica, quae describitur à recta hl tangenti ac parallela, circa axem ef reuoluta. Iam: ca ad ae est ut lh ad he , & sumptis consequentium duplis, ca ad ab , est ut lh ad hi . Propterea, lh ad hi aequalis erit; & ideò superficies curuae cylindri $lhio$ aequalis erit superficiei sphaericae hi . Et hoc semper, ubi unq; fuerit punctum h . Propterea omnes omnibus, nempe omnes superficies sphaericae simul, siue sphaera ab , aequales erunt omnibus superficiibus cylindricis simul, hoc est solidi excanati $cab d$. dempto cono ced . Quod &c.



Concordat cum hoc Theor. Propositio 32. de Sphaera & cylindro.

Lemma.

Superficies cuiuscunque cylindri recti ab (intelligo semper sine basis) ad superficiem curuam cuiuscunque segmenti sphaerici cde , est ut rectangulum per axem cylindri, ad rectangulum $f di$, sub cateto segmenti, & diametro sphaerae.



Nam, superficies cylindrica ab , ad circumferentiam cuius semidiameter sit linea ex polo d c , est ut rectangulum ab , ad quadratum

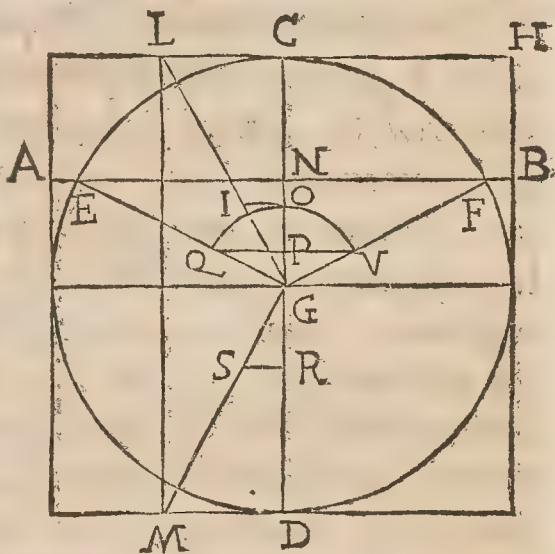
s. p. de
s. li. sphae

tum dc : Ergò, sumptis consequentium equalibus, erit cylindrica superficies, ad curuam spherici segmenti cde superficiem, ut rectangulum ab ad rectangulum fdi . Quod erat &c.

Exemplum VII.

Est sphaera, una cum cylindro sibi circumscripto, quorum axis sit recta cd . Secenturq; plano ab ad axem erecto. Dico cylindrum ah , sesquialterum esse solidi sectoris spherici $ecfg$.

Accipiat cl equalis ipsi cn . & intelligatur cylindrus $lcdm$, cuius altitudo lc . eritque equalis cylindro ah . Conciapiatur etiam demptus conus lgm ; & sumpto in axe c g quouis puncto o fiant aequales go , gr , & transeat per ipsum punctum o spherica superficies quous in sectore; & cylindrica $iorf$, in solido cylindrico $lcdm$ excavato ablatione conii lgm ; sitque tam sphericae superficiei quam cylindricae transeuntis per o , diameter ipsa or .



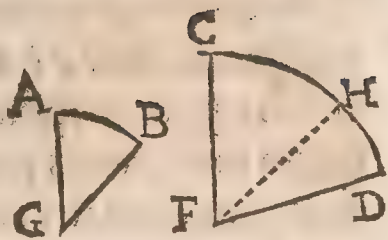
Iam: tota cg , ad totam rectam go , est ut eg ad gq , nempe, ut ablata ng , ad gp ; ideò reliqua cn , ad op , erit ut tota cg , ad go ; siue ut cl , ad oi . Sed antecedentes sunt aequales, ergò rectae op , oi aequales erunt. Propterea rectangula rop , roi aequalia erunt; & superficies spherica quous aequalis erit superficiei cylindricae $iorf$. Et hoc semper, ubicunque sit punctum o . Ergò omnes superficies omnium segmentorum sphericorum (nempe solidus sector $ecfg$) aequales erunt omnibus superficiibus cylindricis simul sumptis, hoc est solido excavato $lcdm$. Cui si addatur conus iam ablati lgm , patebit propositum: nempe cylindrum $lcdm$, siue ah , sesquialterum esse sectoris spherici $ecfg$. Quod &c.

Lem. prop.
sed:

Lem-

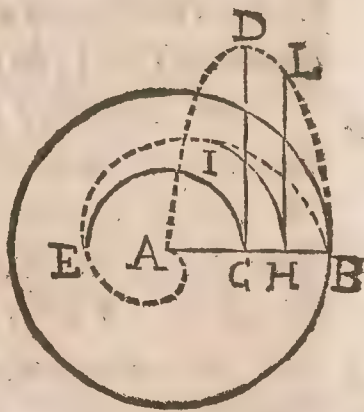
Lemma.

Arcus circulorum ab , cd . inter se rationem habent compositam ex ratione semidiametrorum ag ad cf , & ex ratione angulorum agb ad cfh . Nam, fiat angulus cfh æqualis angulo agb . Erit igitur arcus ab ad ch , ut semidiameter ag ad cf ; sed arcus ch ad cd . est ut angulus cfh , vel agb , ad angulum cfh . Ergo patet arcum ab , ad cd , rationem habere compositam ex rationibus semidiametrorum ag ad cf , & angulorum agb ad cfh .



Exemplum VIII.

Esto circulus, cuius semidiameter ab sit initium lineæ spiralis $aeib$. Secetur bifariam ab in c ; & erecta perpendiculari cd , quantacunque, fiat per puncta a & b parabola, cuius diameter cd . & centro a , intervallo ac fiat arcus ce . Dico spatium sub ipsa spirali, & recta ab comprehensum, ad factam parabolam adb , esse ut arcus ce , ad rectam cd .



Sumatur in ab quodvis punctum aliud à puncto c , puta h ; & per h fiat arcus hi in spatio spiralis, & recta hl in parabola, ipsius diametro equidistans.

Iam : arcus ce ad hi rationem habet compositam ex rationem semidiametrorum ca ad ah ; & ex ratione angulorum, siue (quod idem est ob lineam spiralem) ex ratione temporum, nempe rectæ cb ad bh . Ergo arcus ce , ad hi , est ut rectangulum acb , ad rectangulum ahb , siue ut recta cd , ad hl , ob parabolam. Permutando igitur, arcus ce , ad rectam cd , est ut arcus hi ad rectam hl ; & hoc modo semper; ubicun-

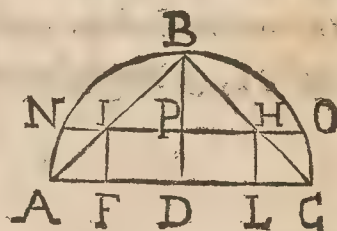
ubicunque sit punctum h . Ergò omnes simul arcus, siue spatium spiralis, ad omnes simul rectas, nempe ad parabolam, erunt ut unus arcus ce , ad unam rectam cd . Quod erat &c.

Si quis ergò ponat rectam cd equalem arcui semicirculi ce , erit parabola adb æqualis spatio spirali. Quinque adhuc alijs modis spatium spiralis lineæ, in parabolam transformatur, quàm non omnes per curua Indiuisibilia procedant. Et Theorema concordat cum 25. de lineis spiralibus Archimedis.

Exemplum IX.

Esto hemisphærium abc , cuius axis bd . conus uero inscriptus abc . Dico, hemisphærium ipsius coni esse duplum.

Sumatur in recta ab punctum quoduis i ; per quod trāseat circulus no in hemisphærio erectus ad axem; & superficies cylindrica $fihl$, in cono circa axem pd .



2. duode-
cimi:

16 Sex-
ti.

5. l. f. de
soli: spb.

Iam: circulus no , ad ih , est ut quadratum np ad pi : & diuidendo, armilla circularis, cuius latitudo ni , ad circulum ih , erit ut rectangulum nio , ad quadratum ip : sed rectangulum nio siue aib , æquale est rectangulo fh (nam, per 4. sexti, ai ad if , est ut hi ad ib .) Ergò, armilla ni , ad circulum ih , erit, ut rectangulum fh , ad quadratum ip ; siue ut cylindrica superficies $fihl$, ad eundem circulum ih . Aequales ergò sunt armilla circularis, cuius latitudo ni , & superficies cylindrica $fihl$: & hoc semper, ubicunq. sit punctum i . Ergò omnes simul armillæ, nempe solidum hemisphæricum excavatum dempto cono abc , æquales erunt omnibus simul superficiebus cylindricis, nempe ipsi cono abc . Propterea coniungendo, patet hemisphærium inscripti coni duplum esse. Quod &c.

Exemplum X,

Quodlibet minus segmentum sphaericum abc , æquale est conoidi cuidam hyperbolico edf : eandem altitudinē bd ha-

lum rectanguli cde , & iuncta ef convertatur triang. edf (saltem imaginatione, nam figura non est perfecta) ita ut oriatur conus, cuius basis semidiameter sit df , axis verò ed . Dico talem conum aequalem esse predicto cylindro excavato. Sumatur enim in axe ed , quodvis punctum i , & per ipsum transeat superficies cylindrica $ilmn$, circa axem ep in solido excavato cylindrico; & circulus cuius radius io in eo cono, qui axem habet ed .

Iam circulus ex radio df , ad circulum ex radio io est ut quadratum df ad io , siue ut quadratum de ad ei , siue ut rectangulum cde ad rectang. lie ; Sed quadratum df ponitur duplum rectanguli cde ; ergò quadratum io duplum erit rectanguli lie ; & ideo aequale rectangulo $linm$. Propterea circulus ex radio io aequalis erit superficiei cylindricæ $linm$; & hoc semper ubicunq; sit punctum i . Ergo omnes circuli simul, siue conus cuius axis est ed , æquales erunt omnibus superficiibus cylindricis simul, siue soli do cylindrico excavato $abecd$. Quod erat &c.

2. Duo-
decimi.5. p. de
soli: sph.

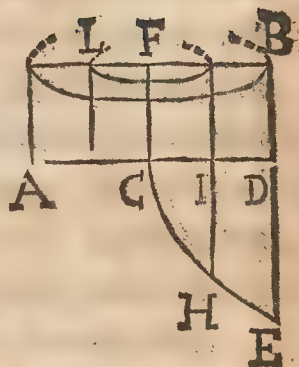
Quod autem concordet cum Euclide l. 12. ostenditur. Nam conus bec , ad conum eum qui habet axem ed , rationem habet compositam ex ratione altitudinum, nempe rectæ pe ad ed , siue rectanguli ped , ad quadratum ed , & ex ratione basium, nempe quadrati ed , ad quadratum df . Ergo conus bec , ad conum cuius axis est ed , est ut rectangulum ped , ad quadratum df , nempe subduplus, ob constructionem; sed idem conus bec subduplus est solidi excavati $abecd$, ergo etiam ex doctrina Euclidis patet solidum cylindricum excavatum $abecd$, æquale esse cono, cuius axis est ed , radius verò basis df . &c.

Exemplum XII.

Quilibet cylindrus rectus ab , cuius axis sit cf , æqualis est conoidi parabolico, cuius altitudo sit cd ; semidiameter verò basis sit de , quæ quidem potentia sit æqualis rectangulo ab ; & erit circulus ex radio de æqualis superficiei cylindricæ ab .

5. p. de so-
lid sph.

Intelligatur conuerti semiparabola $cc d$ circa axem cd , ita ut prædictum conoides oriatur. sumpto deinde in axe cd , quolibet puncto i , per ipsum transeat in cylindro superficies cylindrica il , circa axem cf ; at in conoide, circulus, cuius semidiameter sit ih , basi parallelus.



Iam: superficies cylindrica ab: ad cylin-
dricam il, est ut rectangulum ab, ad re-

6. p de so
lid sph
ob para
bolam.

Et angulum il , siue ut eorundem semibases, de ad ci , siue ut quadratum de ad ih ; nempe ut circulus, ex radio de ad circulum ex radio ih . Sed antecedentes ponuntur aequales, ergo etiam consequentes; nempe superficies cylindrica il , aequalis erit circulo ex radio ih : & hoc semper, ubicunque sit punctum i . Propterea omnes cylindricae simul superficies omnibus circulis aequales erunt. Videlicet cylindrus conoidi. Quod &c.

Demonstratur concordare cum Archimede hoc modo. cylindrus ab ad conum in conoide inscriptum, rationem habet compositam ex ratione altitudinum, nempe ex ratione fc ad tertiam partem cd , (pro cono inscripto, accipio cylindrum in eadem quidem basi, sed cum altitudine subtripla) & ex ratione basium, nempe quadrati cd ad de , siue quadrati cd ad rectangulum ab , siue rectæ cd ad duplam cf , siue in subtriplis ut tertia pars cd , ad duas tertias ipsius cf . Propterea cylindrus ab , ad conum in conoide inscriptum, erit ut fc , ad duas tertias ipsius fc , nempe sesquialter. Concordat itaq; cum 23. de Conoid. & sphaeroid.

Exemplum XIII.

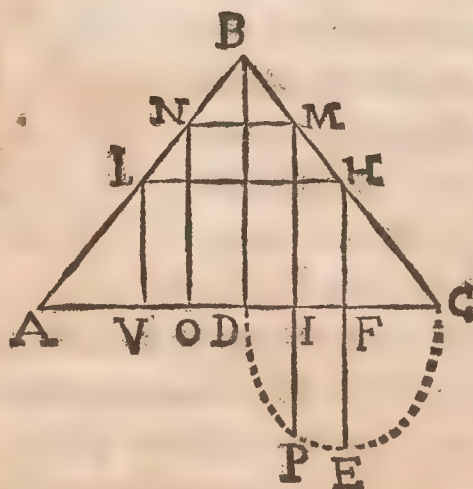
Quilibet conus rectus abc , cuius axis sit bd , equalis est
sphaeroidi, quæ axem habeat dc , nempe semidiametrum
basis coni; & secta dc bifariam in f , semidiameter
sphaeroidis fe potentia sit subdupla trianguli abc .

Compleatur rectangulum fhlu: erit q., ob suppositionem, re-
cta fe

cia fe equalis potentià rectangulo fl : ideoq. circulus, cuius radius fe , equalis erit superficiei cylindrica, quæ transit per fh circà axem bd .

5 p. de se
lid: sdb:

Sumatur iam qdodlibet punctũ i in axe dc . & per i transeat superficies cylindrica $imno$: & circulus in sphæroide, cuius radius sit ip . Superficies itaque cylindrica fl , ad cylindricam in , est vt rectangulum fl ad in . Nempe, rationem habet cõpositam ex ratione fh ad im , siue fc ad ci ; & ex ratione fu ad io , vel fd ad di .



6 p. de se
lid: sdb:

erit itaq. cylindrica fl , ad cylindricam in , vt rectang. dfc ad rectang. dic ; siue vt quadratum fe ad ip , nempe vt circulus ex radio fe , ad circulum ex radio ip . Sed antecedentes æquales sunt, ergo etiam consequentes: nimirum, superficies cylindrica $imno$, equalis erit circulo ex radio ip . & hoc semper, ubi cunq. punctum i . Ergò omnes omnibus: hoc est conus abc , equalis erit sphæroidi prædictæ. Quod erat &c.

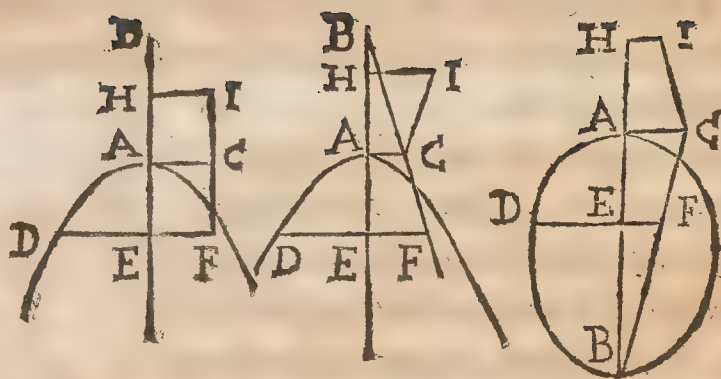
ob ellip-
sim.

Concordare cum Archimede ostendemus. Nàm; conus abc , ad conum in hemisphæroide inscriptum, rationem habet compositam ex ratione basium, nempe quadrati dc , ad quadratum fe ; vel quadrati dc ad rectangulum fl ; siue (cum rectangula habeant æqualem basim) rectæ dc , ad fh ; siue ac ad db . Et ex ratione altitudinum, nempe bd ad df . Erit ergò conus abc , ad conum in hemisphæroide inscriptum, vt recta ac ad rectam df , nempe quadruplus. Concordat ergò cum Prop. 29 de Conoid. & sphæroid.

Exemplum XIV.

Esto parabola, vel hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cuius axis ab ; semilatus rectum ac sit ad angulos

gulos rectos cum
axe ab : & con-
iuncta bc ab
extremitate a-
xis procedat. Su-
matur iam qua-
libet ordinatum
applicata de ,
producta in f ;



& conuertatur ipsa sectio conica circa axem ae ; sed quadrila-
terum $aefc$ conuertatur circa ac . Dico solidum factum à
conuersione trilinei dae , equale esse solido $efcih$, facto à
conuersione quadrilateri $aefc$, circa axem ac reuoluti.

Nam; cum ac sit semilatus rectum, erit quadratum appli-
catae de , duplum rectanguli aef , & ideo equale rectangu-
lo hef . Propterea, circulus, cuius radius sit de , equalis erit
Id: spb: f: p: de f: superficiei cylindricæ, quæ describitur à rectâ ef , circa axem
 ac conuersâ. Et hoc semper, ubicunq; sit punctum e . Ergo
omnes omnibus. Nempe omnes circuli simul, siue solidum conoi-
dale, equale erit omnibus superficiibus cylindricis simul sum-
ptis, nempe solido descripto à quadrilatero $aefc$, circa axem
 ac conuerso. Quod &c.

Scholium.

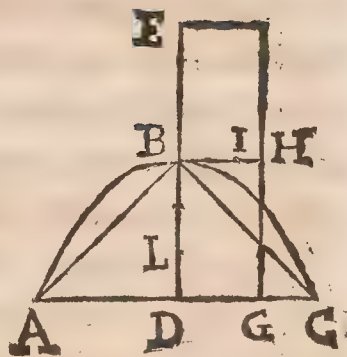
SI quis verò dubitet, an præcedens Theorema concordet
cum Propositionibus Archimedis, omnem dubitandi oc-
casionem delebunt tres sequentes demonstrationes.

Concordantia pro Conoide parabolico.

Esto conoides parabolicum abc . Ostendit Archim. Prop
23. de Conoid. & Sphæroid. Conoides abc , esse sesquial-
terum coni abc .

Esto

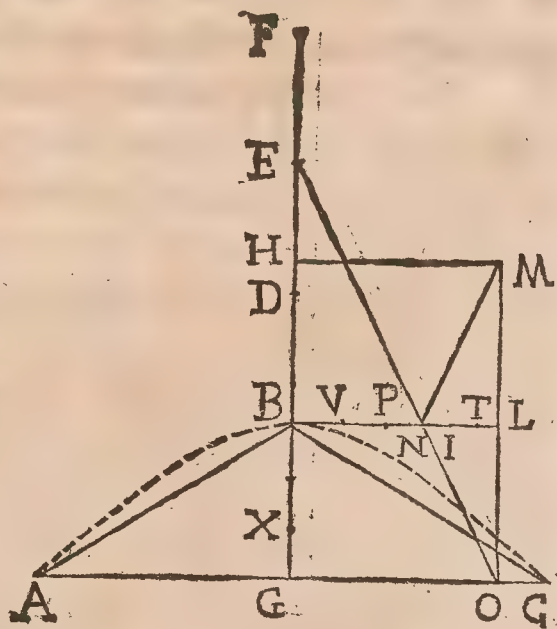
Est solidum, quale descriptum est à quadrilatero $dbhg$, in præcedenti constructione; quod quidem solidum in parabola, erit cylindrus. Secetur in tres partes æquales tam bh , quàm etiam bd . Eritq; conus abc æqualis cylindro super eadem basi ac constituto, sub altitudine verò dl ; considerabimusq; cylindrum hunc, pro dicto cono abc .



Iam: cylindrus ge , ad conum abc , siue ad cylindrum eius vicarium, rationem habet compositam, ex ratione altitudinum hb ad ld . & ex ratione basium, nempe circuli ed , ad circum ac , siue quadrati bd , ad da ; siue rectę bd , ad duplam bh . cum enim bh sit semilatus rectum, erit quadratum ad æquale rectangulo sub bd , & dupla bh siue in subtriplicis, rectę ld ad bi duas tert. ipsius bh . Est ergò cylindrus ge , ad conum abc , ut hb ad bi ; nempe sesquialter. Quod concludit etiam Archimedes de Conoide parabolico.

Pro Conoide Hyperbolico.

Est deinde conoides hyperbolicum abc , cuius latus versum be ; sitq; fb sesquialtera ipsius be . Ostendit Archimedes Prop: 27. de Conoid. & spheroid. quòd conoides abc , ad conum abc , est ut fg ad ge . Dico etiam solidum $hmnog$ genitum in Exemplo 14. ad conum abc esse, ut fg , ad ge .



Secentur in tres partes æquales rectę bg , bn , nl , eritq; conus abc æqualis cylindro cuidam, cuius basis sit eadem ac , altitudo verò subtriplica, nempe gx . At solidum $hmnog$

basis eadem sit cum cono, nempe ac ; altitudo autem subtripla, nempe gx . Solidum verò $hmnog$, quia componitur ex cylindro $hmog$, & ex cono mno , æquale erit cylindro super eadem basi hg constituto, cum altitudine bi . Considerabimus igitur tam solidum $hmnog$, quàm etiam conum abc , tanquàm si essent cylindri iam dicti eorundem solidorum vicarij.

Iam: solidum $hmnog$, ad conum abc , rationem habet compositam ex ratione altitudinum bi ad gx ; & ex ratione basium, nempe circuli hg ad ac , siue quadrati bg ad quadratum ga , siue rectæ bg ad duplam ipsius go . (cum enim bn , sit semilatus rectum, erit quadratum ag æquale rectangulo sub bg , & dupla go) siue sumptis subtriplis, vt gx ad duas tertias ipsius go , vel ad duas tertias bl . Ergo solidum $hmnog$ ad conum abc , erit vt ib ad bp . quod memento.

Recta bg ad ge , est vt no ad oe , siue vt nl ad lb , siue (in subsesquialteris) vt tl ad lu ; Componendo autem be ad eg , erit vt tu ad ul ; sumptisq; antecedentium dimidijs, erit fe ad eg , vt ip ad ul , siue ad pb : Et componendo, fg ad ge , erit vt ib ad bp . Propterea, solidum $hmnog$, ad conum abc (quod iam ostendimus esse: vt ib ad bp) erit etiam vt fg ad ge . Quod prorsus de portione sphæroidis concludit etiam Archimedes Prop. 31 & 33. de Conoid. & sphæroidibus.

Plura adhuc exhibere poteram demonstrationum per Indiuisibilia curua procedentium, nisi superflua, immò etià & molesta existimassem. Hoc vnum admoneo lectorem, in magna parte præcedentium Theorematum me facilitatis gratia fecisse casum Propositionis particularem, cum tamen facere potuisssem vniuersalissimum. Exempli causa. Poteram (in figura primi exempli) supponere tangentem bc cuiuscunq; longitudinis, & deinde ostendere ita esse circulum ad triangulum, vt periphæria ad tangentem: sed faciliorem conclusionem iudicaui æqualitatem inferre, quàm proportionalitatem; præsertim cum in solido Hyperbolico de æqualitate tantum ratio habeatur. Si itaq; Corollaria limitata plerumq; demonstraui, vice Theorematum vniuersalium, scias datà operà factum esse.

Definitio.

Si hyperbola circa asymptoton, tamquam circa axem, conuertatur, solidum fiet (si secundum axem consideretur) longitudine infinitum, quod quidem Acutum solidum hyperbolicum nominabimus.

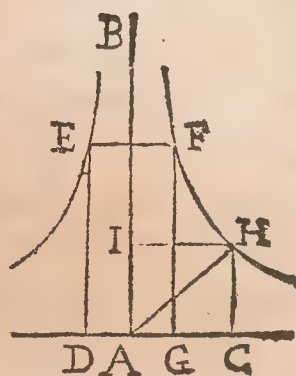
DE SOLIDO

Hiperbolico Acuto.

Lemma Primum.



*ESTO hyperbola, cuius asym-
ptoti sint ab , ac , angu-
lum rectum continentes;
& reuoluta figura circa
axem ab , factum suppo-
natur solidum acutum hy-
perbolicum infinite longum versus b ; quem-
admodum definitum est. Intelligatur iam
intra ipsum acutum solidum, rectangulum
aliquod per axem ab ductum, puta $defg$. Dico hoc rectan-
gulum equale esse quadrato semiaxis ipsius hyperbolæ.*

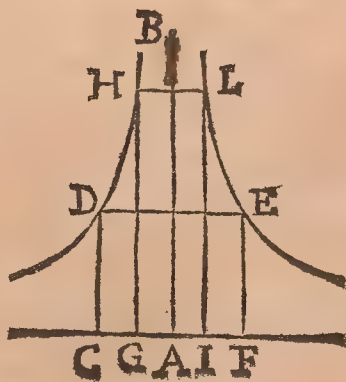


*Ducatur ex a centro hyperbolæ, semiaxis ah , qui angulum
 bac bifariam secabit; fiatq; rectang. $aihc$; quod omnino qua-
dratum erit (nam cum rectangula figura sit, angulus a bifa-
riam ab axe ah diuiditur). Ergo quadratum recte ah du-
plum erit quadrati $aihc$, siue duplum rectanguli af . & ideo
equale rectangulo $defg$, Quod erat propositum &c.*

*ob 12. se-
cundi Co-
mic.*

Lemma II.

*OMNES cylindri, circa communem a-
xem intra solidum acutum hyper-
bolicum descripti, isoperimetri sunt.
intellige semper sine basibus. ESTO acu-
tum solidum, cuius axis ab , & intra
ipsum intelligantur descripti circa cō-
munem axem ab quotlibet cylindri
 $cdef$, $ghli$. Eruntq; equalia rectā-*



P

gula

12. *secundum* gula per axem ce , gl . ergo *aequales* erunt etiam *curvae* cylindrorum superficies. Quod erat.

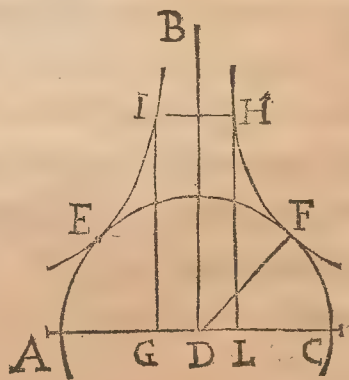
6 p. de solid. sph.

Lemma III.

OMnes isoperimetri cylindri (cuiusmodi sunt illi, qui in acuto solido hyperbolico describuntur) inter se sunt ut diametri suarum basium. Quoniam enim, in precedenti figura, aequalia sunt rectangula ae , al ; erit ut fe ad il , ita ia ad af . Iam cylindrus ce ad cylindrum gl , rationem habet compositam ex ratione quadrati fa ad quadratum ai ; & ex ratione recte fe ad il ; siue ex ratione recte ia ad af , vel quadrati ia ad rectangulum iaf . Propterea cylindrus ce ad cylindrum gl , erit ut quadratum fa ad rectangulum iaf ; nempe ut recta fa ad ai . Quod &c.

Lemma IV.

Esto solidum Acutum abc , cuius axis db , & centrum hyperbolae sit punctum d . in quo scilicet asymptoti conveniunt. axis autem hyperbolae sit df . Intelligatur ex centro d , ad intervallum df descripta sphaera $aefc$, quae maxima erit omnium intra acutum solidum descriptibilium ex centro d . Sumptoq; cylindro quocunque intra acutum solidum descripto, puta $gihl$. Dico cylindri gh superficiem subquadruplam esse superficiei sphaerae $aefc$.



4: de sol. sphar. Cum enim rectangulum gh per axem cylindri, equale sit quadrato df , erit cylindrica superficies equalis circulo qui fit ex radio df nempe circulo $aefc$: Propterea eadem superficies cylindrica $gihl$ subquadrupla erit superficiei sphaerae $aefc$, cuius etiam circulus $aefc$ subquadruplus est. Quod &c.

Lem-

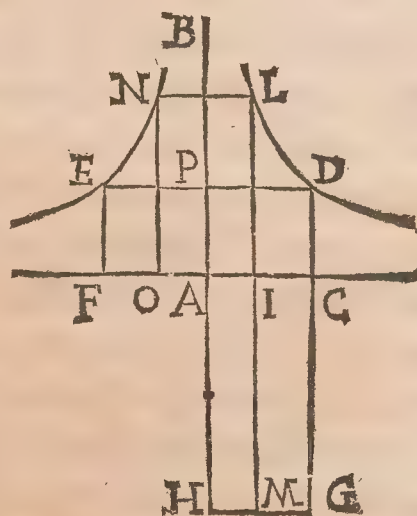
Lemma V.

Cuiuscunque cylindri ghil intra solidum acutum descripti (ut in præcedenti figura) superficies sine basibus æqualis est circulo cuius semidiameter sit linea dt . nempe semiaxis, siue semilatus versum ipsius hyperbolæ. Hoc enim in ipso progressu præcedentis lemmatis demonstratum est.

Theorema.

Solidum acutum hyperbolicum infinitè longum, sectum plano ad axem erecto, vnà cum cylindro suæ basis, æquale est cylindro cuidam recto, cuius basis diameter sit latus versum, siue axis hyperbolæ, altitudo verò sit æqualis semidiametro basis ipsius acuti solidi.

Est hyperbola cuius asymptoti ab , ac angulum rectum contineant; sumptoq; in hyperbola quolibet puncto d , ducatur dc æquidistans ipsi ab , & dp æquidistans ac . Tū conuertatur vniuersa figura circa axē ab . ità vt fiat solidum acutum hyperbolicum ebd , vna cum cylindro suæ basis $fedc$. Poducatur ba in h . ita vt ah æqualis sit integro axi, siue lateri verso hyperbolæ. Et circa diametrum



ah intelligatur circulus erectus ad asymptoton ac : & super basi ah concipiatur cylindrus rectus $acgh$, cuius altitudo sit ac , nempe semidiameter basis acuti solidi. Dico solidum vniuersum $febdc$, quanquam sine fine longum, æquale tamen esse cylindro $acgh$.

Accipiat in recta ac quodlibet punctum i , & per i intelligatur ducta superficies cylindrica $onli$ in solido acuto

compræhensa circa axem ab : item circulus im in cylindro $acgh$ æquidistans basi ab .

Erit ergo prædicta superficies cylindrica $onli$ ad circulum im , vt rectangulum per axem ol , ad quadratum radij circuli im ; nempe vt rectangulum ol , ad quadratum semiaxis hyperbolæ; & ideo æqualis ex lemmate. Et hoc semper verum erit, vbicunq; sumatur punctum i . Propterea omnes simul superficies cylindricæ, hoc est ipsum solidum acutum ebd , vna cum cylindro basis $fedc$, æquale erit omnibus circularis simul, hoc est cylindro $acgh$. Quod erat &c.

Scholium.

Incredibile videri potest, cum solidum hoc infinitam longitudinem habeat, nullam tamen ex illis superficiebus cylindricis quas nos consideramus, infinitam longitudinem habere; sed vnâquamq; esse terminatam; vt vnicuiq; patebit, cui vel modicè familiaris sit doctrina Conicorum.

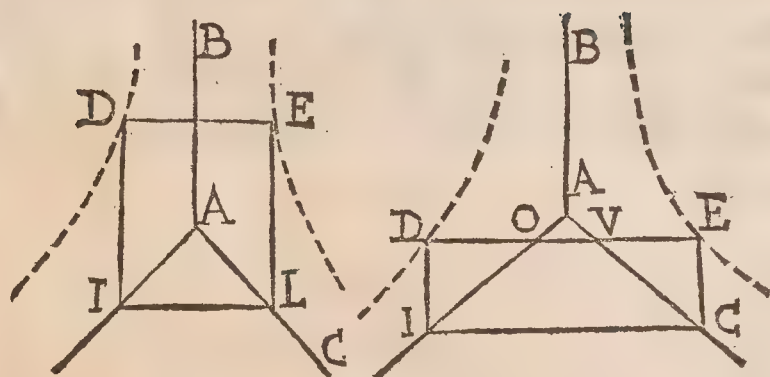
Veritatem præcedentis Theorematis satis per se claram, & per exempla ad initium libelli proposita confirmatam satis superq; puto. Tamen vt in hac parte satisfaciam lectori etiam Indiuisibilem parùm amico, iterabo hanc ipsam demonstrationem in calce operis, per solitam veterum Geometrarum viam demonstrandi, longiorem quidem, sed non ideo mihi certiorē.

Interim, quia demonstrationes exhibebimus de illo tantum acuto solido, cuius hyperbolæ genitricis asymptoti angulum rectum contineant, dicamus hic obiter, omisâ demonstratione, quibus figuris æqualia sint acuta solida; quando asymptoton angulus obtusus fuerit, vel acutus.

Demonstrationes, quas ad euitandam molem præterimus, sibi lector industrius facili negotio comparabit.

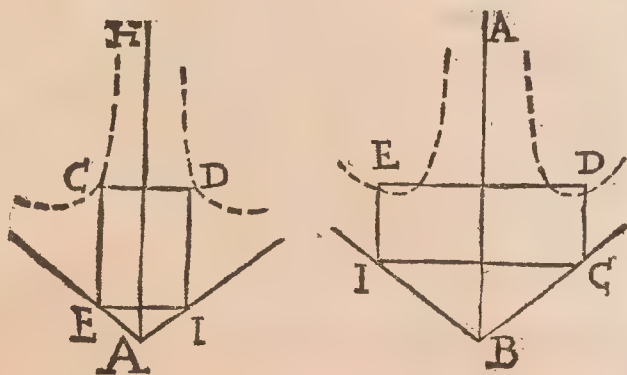
Esto hyperbola cuius asymptoti ab , ac angulum obtusum contineant; & reuoluta figura circa axem ab fiat solidum acutum.

tū infinitè longum versus *b*. seceturq; (vt in prima fig.) plano *de* ad axē erecto. Erit solidum acutum *dbe* æquale cylindro *dile*,



& cono *ial*. In secunda verò figura sit planum secans *de*. erit solidum acutum vniuersum quod imponitur super circulo *de* sumpto etiam cono *oau*, æquale cylindro *ie*, & cono *iac* simul sumptis.

Quando verò angulus asymptoton acutus ponatur, & sit planum secans *cd* in prima figura. Erit solidum acutum *chd* vna cum cono *eai* æquale cylindro *ceid*. At in secunda figura erit vniuersum solidum acutum factum ex conuersione quadrilinei mixti *ab c d a* sine fine longi, duplum cylindri *iedc*.



Sequuntur iam sub nomine Corollariorum Propositiones quædam ex præcedenti Theoremate promanâtes; quæ quidem aliquot prærogatiuas huius acuti solidi hyperbolici fortasse nō contemnendas demonstrabunt.

Corollarium Primum.

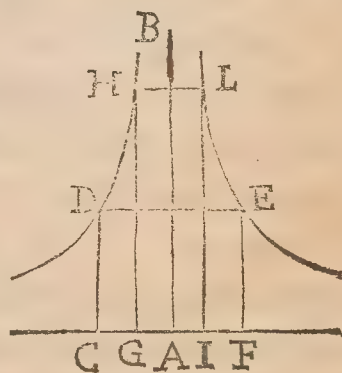
Acuta solida hyperbolica e b d, n b l, quæ in figura pag. 115 ex sectionib. e d, n l ad axē erectis fiunt, vna cum cylindris suarum basium, inter se sunt vt diametri earundem basium, nempe vt recta e d ad n l.

Nam resumpta præcedentis Theorematis figura, & constructione

itione, erit solidum $febdc$, æquale cylindro $acgh$. & solidum $onbli$ æquale cylindro $aimh$, Ergo solidum ad solidum erit ut cylindrus ad cylindrum, nempe ut ca ad ai , siue sumptis duplis ut recta fc ad oi ; siue ut ed ad nl . Quod erat &c.

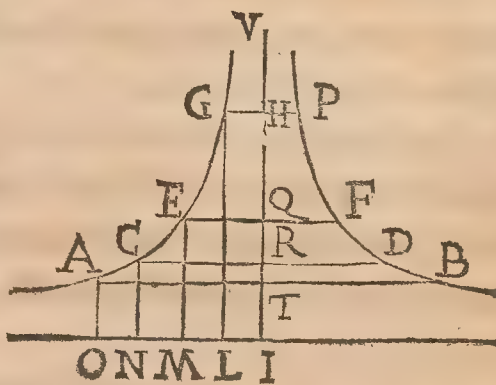
Corollarium II.

Acuta solida hyperbolica dbe, hbl , etiam sine cylindris suarum basium sumpta, inter se sunt ut diametri earundem basium, nempe ut de ad hl . Descriptis enim basium cylindris $cdef, ghli$, erit totum solidum $cd bef$, ad totum solidum $ghbli$ ut cf ad gi . Sed ablati cylindrus ce ad ablatum cylindrum $glest$ ut cf ad gi . Ergo reliquum etiam solidum dbe , ad reliquum hbl erit ut totum ad totum; nempe ut cf ad gi . Hoc est ut de ad hl . Quod &c.



Corollarium III.

Esto solidum acutum sectum planis ab, cd, ef, gp ita ut sectionum semidiametri sint ut numeri naturaliter ab unitate progredientes (quod facile fiet, si accepta ad libitum il , æquales ipsi il secantur lm, mn , no &c. ductisque lg, me, nc &c. ad axem parallelis, per puncta g, e, c &c. agantur secantia plana.) Dico omnia frustra intercepta aqualia esse tum inter se, tum etiam acuto solido gup .



Patet hoc. Nam cum acuta solida sint ut diametri basium; & in hoc casu diametri basium ponantur ut numeri naturaliter ab

119

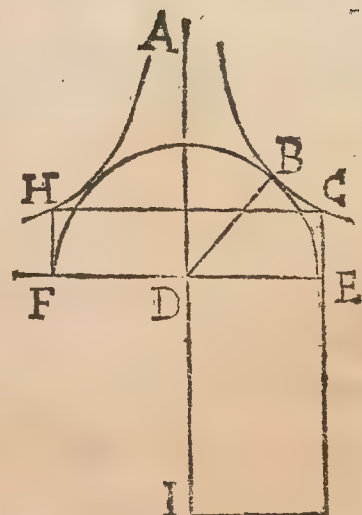
Scholium.

Corollarium IV.

Corol.

Corollarium V.

Maximum hemisphaerium $f b e$, intra solidum acutum inscriptibile ex d centro hyperbolæ, subsesquialterum est uniuersi solidi $f h a c e$ ipsum hemisphaerium ambientis. Solidum autem $f h a c e$ constat ex acuto solido infinitè longo $h a c$, & ex cylindro basis hemisphaerium tangente $f h c e$.



Facto enim cylindro $i e$ ut in Theoremate pag. 115. erit hemisphaerium $f b e$ subsesquialterum cylindri $i e$; Cum eandem altitudinem habeat, & basim eandem, nempe circulum cuius radius est semiaxis $d b$. Subsесquialterum ergo erit ipsum hemisphaerium etiam solidi $f h a c e$, quod æquale demonstratum est cylindro $i e$. &c.

Corollarium VI.

Est solidum acutum cuius axis $a b$, (in figura pag. 118.) sectum ubicunq; plano $d e$. Secetur verò & altero plano $h l$, quod capiat portionem axis duplam. Dico frustum solidum $d h l e$, à secantibus planis interceptum æquale esse solido acuto $h b l$ sibi superimposito.

Cum enim rectangula $c e$, $g l$ sint æqualia, & latera eorum reciproca, erit recta $d e$ dupla ipsius $h l$, & ideo solidum acutum $d b e$ duplum erit acuti solidi $h b l$, & diuidendo, frustum $d h l e$ æquale erit acuto solido $h b l$. Quod &c.

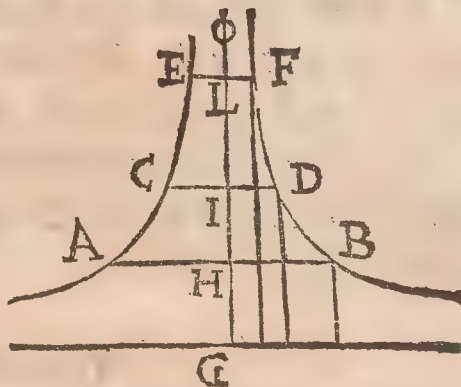
Scholium.

Hinc manifestum est, quòd si acutum solidum secetur uti dictum est, frustum interceptum $d h l e$ (quod duas bases habebit) æquale semper erit cylindro minoris basis $g h l i$. Subduplum uerò erit cylindri maioris basis $c d e f$.

Corol-

Corollarium VII.

Esto solidum acutum sectum à tribus planis ab , cd , ef , secantibus axem solidi proportionaliter; hoc est, sit ut gh ad gi , ita gi ad gl . Dico frustum $acdb$ ad frustum $cefd$ esse ut li ad ih . nempe in reciproca ratione altitudinum.

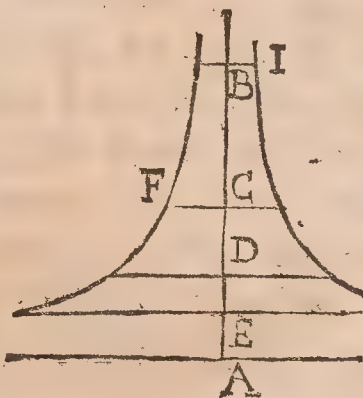


Cum enim rectangula gf , gd , gb . sint equalia, & latera eorum reciproca, erunt tres rectæ hb , id , lf , in eadem continua proportionem in qua sunt gl , gi , gh . Sed solida acuta aob , cod , eof sunt ut basium semidiametri hb , id , lf , siue ut gl , gi , gh , ergo excessus solidorum inter se erunt ut excessus linearum. Nempe frustum solidum $acdb$, ad frustum $cefd$ erit ut li ad ih . Quod &c.

Scholium.

Ex demonstratis patet primò, quomodo datum frustum aef in fig præ b secari possit plano cd , ita ut factæ portiones inter se sint ut altitudines, reciprocè tamen sumptæ. Quod quidem fit sumendo gi mediam proportionalem inter gl , gb .

Manifestum etiam est, quòd si sumatur quodlibet segmētum axis, puta ab . & secetur bifariam in c . deinde ac secetur bifariam in d ; reliquum autem ad bisecetur in e ; & sic semper. Erunt frustra solida intercepta à planis per b , c , d , e , ductis, in continua proportionem in qua axes, siue axium differentie.



Eritq; primum, & subtilissimū frustum fi æquale acuto solido sibi superimposito. At secundum frustum duplum erit primi; tertium quadruplum primi, 4. verò octuplum, quintum

Q

tum

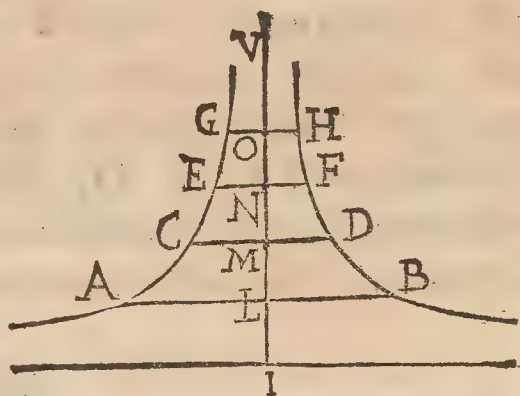
tum fedecuplum: & sic semper; quò magis ad centrum *a* accedemus, maiora præcedentibus erunt frustra, & multiplicia secundum numeros in proportionem dupla progredientes ab unitate.

Si verò sumatur quodlibet segmentum axis *ae*, cuius duplum ponatur *ad*; & ipsius *ad* duplum secetur *ac*, & sic deinceps; eadem evenient, ut supra dictum est.

Quæcunq; autem diximus exemplo allato de ratione dupla, verum etiam est de tripla, quadrupla; sesquialtera, & de quacunq; alia ratione.

Corollarium VIII.

*Si solidum acutum sectum fuerit planis *ab*; *cd*, *ef*, *gh*, &c. ita ut axis portiones à cetro incipientes, nempe *il*, *lm*, *mn*, *no* &c. æquales sint; erit primum frustum *ad*, ad secundum *cf* ut 3. ad unum; secundum verò frustum ad tertium erit ut 4. ad 2; Tertium ad quartum erit ut 5. ad*



3. quartum ad quintum ut 6. ad 4.; Et sic semper ut numeri binario differentes; addita scilicet semper unitate utrique terminorum rationis.

*Nam solidum acutum *aub* ad solidum acutum *cud*, est ut *al* ad *cm*, nempe ut *mi*, ad *il*, hoc est duplum. Et diuidendo, erit frustum *ad* æquale solido acuto *cud*. siue ut 3. ad 3. Solidum vero *cud* ad solidum *euf* est ut *cm* ad *en*, siue ut *ni* ad *im*, nempe ut 3. ad 2. Et per conversionem rationis erit solidum *cud* ad frustum *cf* ut 3. ad unum. Ergo ex æquo erit frustum *ad* ad frustum *cf* ut 3. ad unum. Quod &c.*

Eodem modo penitus ratio reliquorum frustorum consequentium ostenditur esse talis qualis proposita est.

Scholium.

Patet in progressu demonstrationis primum frustum *ad* æquale

Problema Secundum.

123

quale esse solido acuto sibi imposito cud . At secundum fructū cf duplum est solidi euf sibi impositi; Tertium verò triplum; quartum quadruplum. & sic in infinitum.

Corollarium IX.

Si solidum acutum à cylindricis superficiebus diuisum fuerit, erunt solida annularia inter cylindricas superficies intercepta, inter se, ut sunt portiones asymptoti ab ipsis cylindricis superficiebus abscisse.

Sit hyperbola abc , & linea quotcunq; ad , be , cf . parallela asymptoto hi ; & conuertatur figura circa asymptotō hi . Dico solidum descriptum à quadrilineo $ebcf$, ad solidum descriptum à quadrilineo $dabe$, esse ut recta fe ad ed .

Fiat enim cylindrus lf , ut in Theoremate pag. 115. eritq; solidum $nmicf$ æquale cylindro lf . Et solidum $poibe$, æquale cylindro le . ablatis ergo equalibus, remanebit cylindrus lf equalis solido sibi respondentifac̃to à quadrilineo $ebcf$. Pariratione cylindrus te equalis ostendetur solido sibi respondentifac̃to à quadrilineo $dabe$; crit igitur ob æqualitatem, solidum quadrilinei $ebcf$ ad solidum quadrilinei $dabe$ ut cylindrus lf ad cylindrum te , nempe ut recta fe ad ed . Quod &c.



Corollarium X.

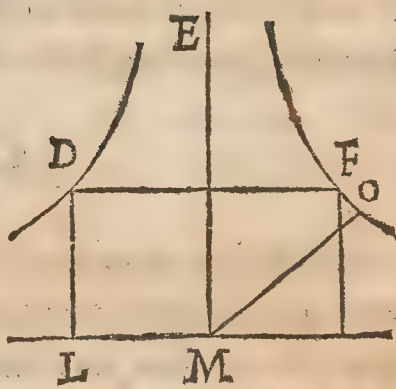
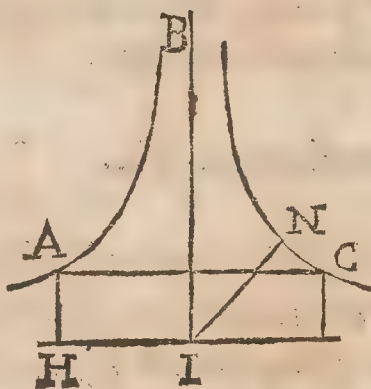
Acuta solida abc , def . super basibus æqualibus ac , df constituta, & à conuersione in æqualium hyperbolarum descripta, sunt inter se in duplicata ratione axium suarum hyperbolarum.

Intelligentur enim sub basibus solidorum cylindri hc , lf

2 2

erit

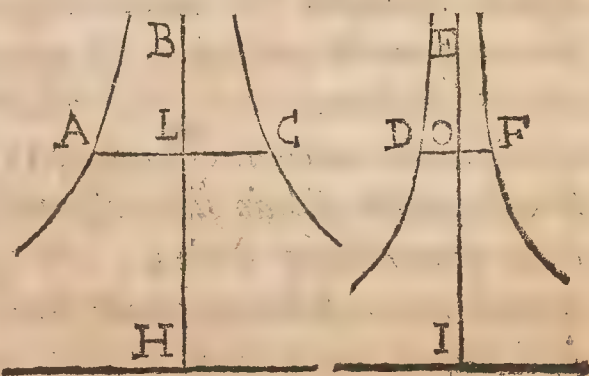
eritq. solidum
abc aequale cy-
lindro hc; &
solidum def.
aequale cylind.
lf. Propterea
solidū abc ad
solidum def,
erit vt cylind.
hc ad cylind.



lf. siue (cum aequales bases habeant) vt altitudo ha ad altitu-
dinem ld. siue vt rectangulum hc ad rectangulum lf. hoc
est, sumptis aequalibus, vt quadratum axis in ad quadratum
axis mo. Quod &c.

Corollarium XI.

Acuta solida abc, def
facta ab inequalibus hyper-
bolis, & secta planis ac, df
ita vt portiones axis lh, oi
equales sint; erunt inter se
vt bases, nempe vt circulus
ac ad circulum df.



Hoc autem patet. Nam
solidum abc aequale est cy-
lindro cuius basis sit ac altitudo vero lh. & solidum def a-
equale est cylindro cuius basis sit df altitudo vero oi. Ergo so-
lidum abc ad solidum def erit vt predictus cylindrus ad di-
ctum cylindrum, nempe (cum aequales altitudines habeant) vt
basis ac ad basim df. Quod erat &c.

Corollarium XII.

Acuta solida quaecunq; sint abc, def; in p. fig. huius pag. in-
ter se sunt vt solida rectang. basi quadrato axium hyperbolarum;
alti-

Problema Secundum.

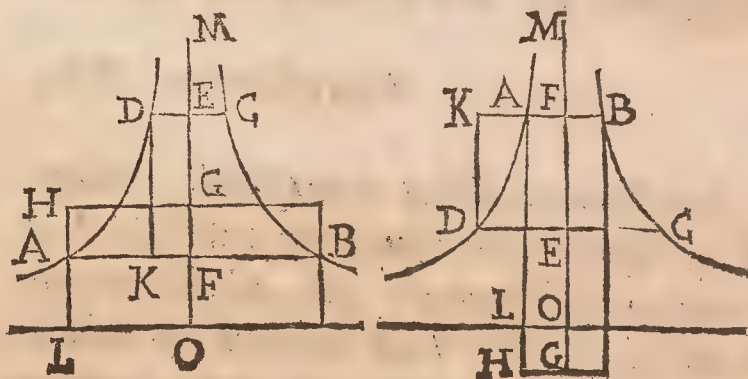
125

altitudine verò diametro basium eorundem solidorum. Hoc est, solidum abc ad solidum def erit ut solidum parallelepipedum basi quadrato axis in , altitudine ac . ad parallelepipedum basi quadrato axis mo , altitudine df .

Factis enim de more cylindris hc , lf ; ratio cylindri hc ad cylindrum lf componetur ex his tribus rationibus. nempe ex ratione altitudinis ha ad ld . & ex ratione basium, siue ex ratione recte ac ad df , iterumq; ex ratione recte ac ad df . Ergo ratio cylindri hc ad lf , componitur ex ratione recti anguli hac ad rectangulum ldf , siue quadrati in . ad quadratum mo , & ex ratione recte ac ad rectam df . Propterea etiam ratio solidi acuti abc ad solidum acutum def composita erit ex ratione quadrati in ad mo , & ex ratione recte ac ad rectam df . Ergo patet propositum.

Corollarium XIII.

Dato acuti solidi frusto quocunque; $adcb$, aequalem ipsi cylindrum exhibere super altera sui base quacunque sit. puta ab .



Fiat ut recta ab ad dc ita ef ad fg . Dico cylindrum hb cuius altitudo sit fg , basis verò ab aequalem esse frusto ac .

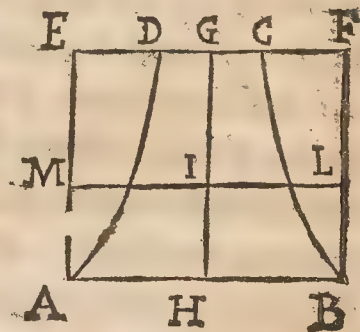
Ducatur dk parallela ad ef . Eritq; fo ad oe , ut de , siue Kf ad fa . Propterea of ad fe erit ut fk ad ka . Sed ef ad fg est ut af ad fK , ergo per perturbatam erit of ad fg ut fa ad aK . Quod memento.

Iam acutum solidum amb ad acutum solidum dmc est ut ab recta ad dc , uel ut af ad de , hoc est ut af ad fk , Ergo erit solidum acutum amb , siue cylindrus lb ipsi equalis, ad frustum $adcb$ ut fa ad aK , hoc est of ad fg , hoc est ut cylindrus

lindrus lb ad cylindrum bh. *Constat igitur cylindrum lb eadē habere rationem & ad frustum a dcb, & ad cylindrum bh. Quare cylindrus bh aequalis erit dato frusto acuti solidi, & super altera eiusdem basi. Quod &c.*

Corollarium XIV,

Circumscriptus cylindrus aefb ad frustum acuti solidi adcb. est ut diameter ab maioris basis ad diametrum dc minoris basis. Fiat enim ut ab ad dc ita gh ad hi, & erit cylindrus amlb equalis frusto solido. per Cor. præcedens. Cylindrus autem afad cylindrum al est ut gh ad hi; hoc est ut ab ad dc. Quare cylindrus circumscriptus aefb etiam ad frustum ac erit ut recta ab ad dc. Quod &c.



Corollarium XV.

Frustum quodlibet acuti solidi adcb ad inscriptum sibi cylindrum edcf, est ut diameter basis maioris ab, ad diametrum minoris basis dc. Fiat enim ut ab ad dc.

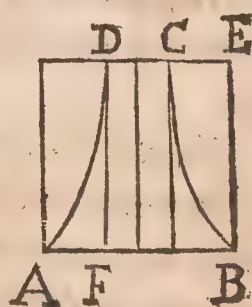
Corol. 23 ita gh ad hi, eritq; cylindrus al equalis frusto ac. Erit insuper cylindrus al isoperimeter cylindro ec, quandoquidem latera eorum facta sunt reciproca, & ideo rectangula per axem equalia. Erit ergo (per lemma 3. huius) cylindrus al siue frustum adcb, ad cylindrum inscriptum ec ut diametri basium, siue ut recta ab ad ef, hoc est ut ab ad dc. Quod &c.



Corollarium XVI.

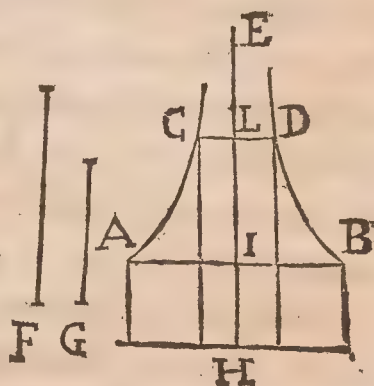
*Frustum quodlibet acuti solidi ad c b . me-
dium proportionale est inter inscriptum, & cir-
cumscriptum sibi cylindrum.*

*Demonstratum enim est in duobus preceden-
tibus Coroll. quòd circumscriptus cylindrus a
e ad frustum ad c b est ut recta a b ad d c.
Frustum verò ad c b ad inscriptum cylindrũ
est ut a b ad d c. Ergo constat quòd frustum
est mediũ proportionale inter duos cylindros.
Quod erat &c.*



Corollarium XVII.

*Datum acutum solidum a e b in da-
ta ratione secare ut f ad g. Fiat ut
g ad f ita data h i ad i l. & per l aga-
tur planum c d. Eritq; conuertendo, &
cõponendo f & g, simul ad g ut l h ad
h i, siue ut a b ad c d, vel ut solidum
a e b ad solidum c e d; & diuidendo
patet propositum.*



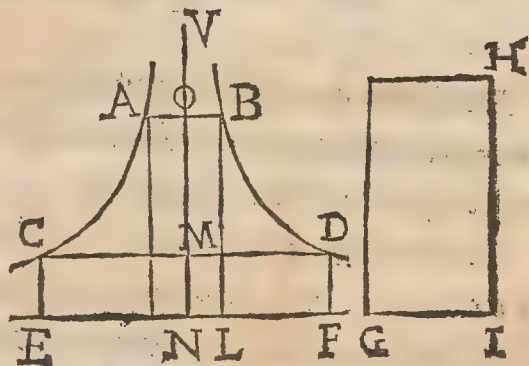
*Si verò basis acuti solidi sit c d, & oporteat illud secare ite-
rum inferius versus hyperbolę centrum plano a b, ita ut frustũ
a c d b ad reliquum solidum c e d quamlibet datam rationem
habeat ut f ad g. Ita imperata exequemur. Fiat ut f & g si-
mul ad g, ita data l h ad h i; & per i ducatur planum a b. erit
que ut f, & g simul ad g, ita a b ad c d; siue solidum a e b ad
c e d; & diuidendo patet propositum. Quod erat &c.*

Corollarium XVIII.

*Dato solido acuto secto plano a b. frustum accipere c a b d
uersus n centrum hyperbolę, quod sit æquale cuicumq; dato cy-
lindro g h molis etiam immensa.*

Fiat

Fiat ut cylindrus al ad cylindrum gh ita recta nl data ad rectam lf. & erecta fd ductoq; plano dc. Dico frustum cb aequale esse cylindro gh.



Nam cylindrus al ad gh, est ut recta nl ad lf, & conuertendo, componendo, iterumque conuertendo, erit cylindrus al ad cylindros al, gh, ut ln ad nf, siue ut ob ad md; siue ut solidum acutum aub ad solidum acutum cud; siue ut cylindrus al ad solidum acutum cud. Aequales ergo sunt duo simul cylindri al & gh, acuto solido cud. Demptisq; aequalibus, nempe cylindro al & solido acuto aub, remanet cylindrus gh aequalis frusto cabd. Quod &c.

Versus uerticem uero limitatione opus est. Esto Datum solidum acutum sectum plano cd, debeatq; sumi frustum cabd uersus uerticem, aequale cylindro dato gh (dummodo cylindrus gh minor sit cylindro ecdf.)

Fiat, ut cylindrus ed ad gh, ita recta nf data, ad fl, & erecta lb, dico frustum cabd aequale esse cylindro dato gh.

Nam recta fn ad nl, est ut dm ad bo, siue ut acutum solidum cud ad acutum aub; & per conuersionem rationis nf ad fl, erit ut acutum solidum cud, siue ut cylindrus ed ad frustum cabd. Sed ut nf ad fl, ita est etiam cylindrus idem ed ad gh, aquantur ergo frustum cabd, et cylindrus gh. Quod &c.

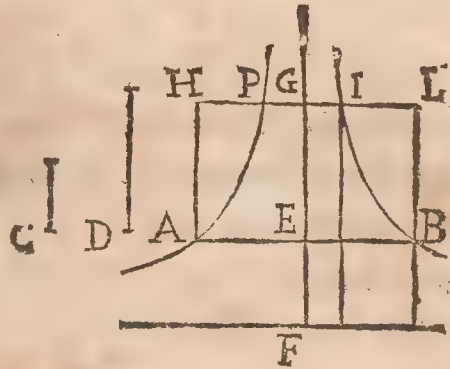
Scholium.

Ex priori parte huius demonstrationis patet solidum hyperbolicum uersus infinitam planitiem ef magnitudine infinitum esse. potest enim ex ipso sumi pars ipsius quæ aequalis sit cuiusque magnitudini datæ:

Corol

Corollarium XIX.

Est solidum acutum sectum plano ab. Oportet illud secare iterum aliopiano pi, ita ut frustum api b ad cylindrum sibi circumscriptum, sit ut c ad d; dummodo ratio c ad d, sit minoris inequalitatis.

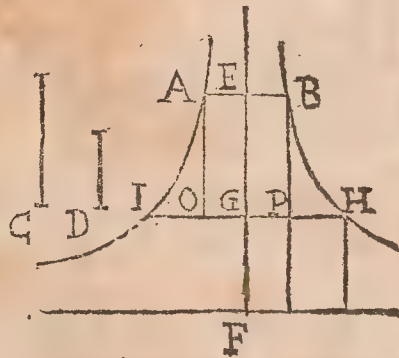


Fiat, ut c ad d, ita data ef ad fg; & per g ducatur planum hl. Eritq; c ad d, ut ef ad fg, nempe (ob equalia rectangula) ut ig ad be, hoc est ut frustum ai ad cylindrum al. Quod &c.

Si vero datum planum secans sit pi, & solidum secandum sit inferius versus f iterum eadem lege, ita procedemus. Fiat ut c ad d, ita ef ad datam fg. & per e ducatur planum ab. Eritq; frustum ai ad cylindrum al, ut gi ad eb, siue ut ef ad fg, hoc est ut c ad d. Quod erat &c.

Corollarium XX.

Est solidum acutum sectum plano ab. oportet illud iterum secare versus f. ita ut frustum intersectiones comprehensum, ad inscriptum sibi cylindrum quamlibet datam rationem maioris inequalitatis habeat, ut c ad d.



Fiat, ut c ad d, ita data ef ad fg; ductoq; per g plano ih. Erit frustum ib ad cylindrum inscriptum ob, ut gh ad eb, siue ut ef ad fg, siue ut c ad d. Quod &c.

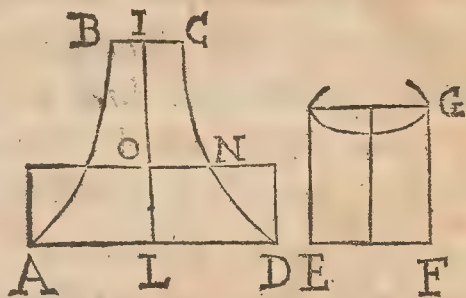
Si vero planum secans datum sit ih, & secandum sit solidum iterum eadem lege versus infinitam longitudinem. fiat ut c ad

R d ita

d ita ef ad datam fg. Eritq; frustum ib ad cylindrum o b ut ef ad fg, nempe ut c ad d. Quod &c.

Corollarium XXI.

Est frustum acuti solidi abcd ponaturq; circulus ef medius proportionalis intrr bases ad, bc, & erigatur cylindrus eg cuiuscunq; altitudinis. Dico frustum ac ad cylindrum eg esse ut recta il ad gf.



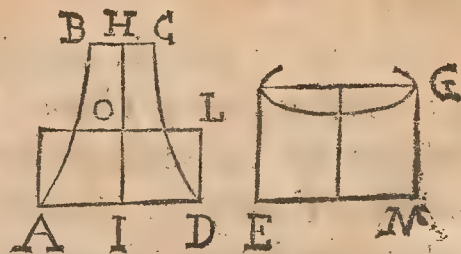
Fiat enim ut recta ad ad bc ita il ad lo, & ad altitudinē lo erigatur cylindrus an, qui equalis erit frusto ac (per coroll. 13.) Iam cylindrus an ad cylindrum eg, rationem habet compositam ex ratione basium, nempe quadrati ad ad ef; hoc est ex ratione recte ad ad bc; siue potius recte il ad lo & ex ratione altitudinum, nempe lo ad fg. Ergo cylindrus an ad eg, erit ut recta il ad fg; Propterea etiam frustum ac ad cylindrum eg erit ut il ad fg. Quod &c.

Scholium.

Ergo si altitudo fg fiat æqualis ipsi il erit cylindrus eg æqualis frusto ac.

Corollarium XXII.

Est frustum acuti solidi abc d, quod habeat alteram ex suis basibus (quæcunq; illa sit) puta ad, æqualem basi em cylindri eg. Dico frustum ac ad cylindrum eg esse ut rectagulum sub diametro in g



qualis

Problema Secundum. 131

qualis basis, & sub altitudine frusti, ad rectangulum per axem cylindri. Nempe ut rectangulum bc, hi ad rectangulum eg.

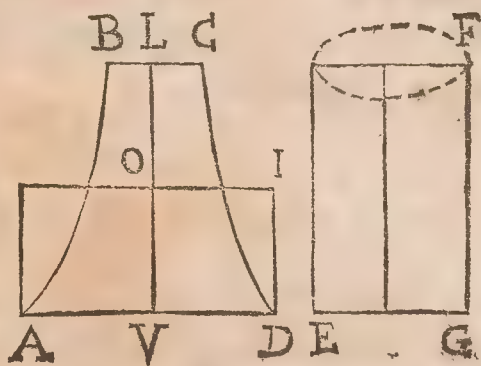
Fiat ut ad ad bc ita hi ad io; erectoq; cylindro al cum altitudine io, erit frustum ac æquale cylindro al. Iam cylindrus al ad eg, ob æquales bases, est ut oi ad gm, Sed ratio rectæ oi ad gm, componitur ex ratione rectæ oi ad ih, siue bc ad ad, hoc est bc ad em; & ex ratione h i ad gm. Ergo ratio oi ad gm erit eadem quæ est rectang. bc, hi ad rectangulum sub em, mg. Propterea etiam cylindrus al, siue frustum ac ad cylindrum eg erit ut rectangulum bc, hi, ad rectangulum emg. Quod &c.

Corollarium XXIII,

Si frustum acuti solidi abcd & cylindrus ef æquales altitudines habuerint. Erit frustum ac ad cylindrum ef ut rectangulum sub bc, ad, ad quadratum eg.

Fiat ut ad ad bc, ita lu ad uo. eritq; frustum ac æquale cylindro ai cuius altitudo sit uo.

Iam cylindrus ai ad cylindrum ef, rationem habet compositam ex ratione altitudinum uo ad gf; siue uo ad ul siue bc ad ad; nempe ex ratione rectang. bc, ad, ad quadratum ad. Et ex ratione basium; nempe quadrati ad ad eg. Ergo cylindrus ai, siue frustum ac, ad cylindrum ef, erit ut rectang. sub bc, ad, ad quadratum eg. Quod &c.



Corollarium XXIV.

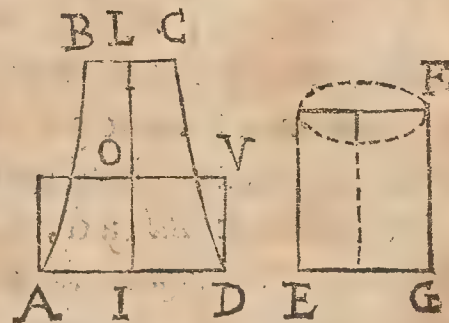
Frustum acuti solidi abcd, ad cylindrum quemlibet ef, rationem habet compositam ex ratione rectanguli bc, li ad rectangulum ad, gf; & ex ratione quadr. ad ad quadratū eg.

R 2

Fiat

Fiat ut ad ad bc, ita li ad io; eritque cylindrus au aqualis frusto ac. Iam recta io ad rectam gf, est ut rectangulum sub bc, li ad rectangulum sub ad, gf. (nam ratio recte io ad gf, componitur ex ratione io ad il, siue bc ad ad; & ex ratione il ad gf. Ergo recta io ad gf, est ut rectangulum bc, il ad re-

ctangulum ad, gf.) Sed cylindrus au ad cylindrum ef rationem habet compositam ex ratione io ad gf, nempe ex ratione rectanguli bc, li, ad rectangulum ad, gf; & ex ratione quadrati ad ad eg. Propterea etiam frustum ac ad cylindrum ef rationem habebit compositam ex ratione rectanguli bc, li, ad rectangulum ad, gf; & ex ratione quadrati ad ad eg. Quod &c.

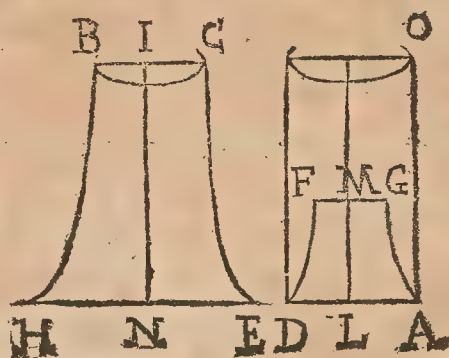


Scholium.

Poterat etiam proponi sic. Frustum *ac* ad cylindrum *ef*, rationem habet compositam ex ratione rectanguli *ad, il*, ad rectangulum *bc, fg*; & ex ratione quadrati *bc, ad eg*.

Corollarium XXV.

Sint duo frusta acutorum solidorum qualiacunque. Dico frustum hbce ad frustum dfga, habere rationem compositam ex ratione rectangulorum basium, & ex ratione altitudinum; nempe ex ratione rectanguli bc, he ad rectangulum fg, da; & ex ratione recte in ad ml.



Fiat

Problema Secundum.

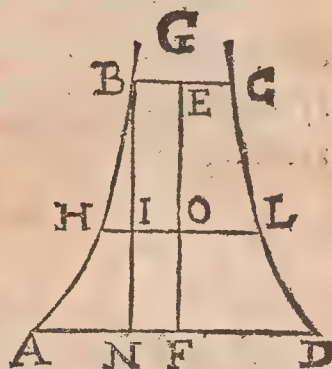
133

Fiat enim super basi da cylindrus do cum altitudine ao, quæ sit æqualis ipsi ni. Eritq; (per Coroll. 23.) frustum hc ad cylindrum do, ut rectangulum bc, he ad quadratum da. Cylindrus autem do ad frustum dg est (per Coroll. 22.) ut rectangulum da o ad rectangulum fg, ml. Nempe ad illud, rationem habet compositam ex ratione rectæ da ad fg, siue ex ratione quadrati da ad rectangulum da, fg. Et ex ratione rectæ oa ad ml, siue in ad ml. Ratio itaq; frusti he ad frustum dg componitur ex rationibus, rectanguli bc, he, ad quadratum da; & ex ratione quadrati da ad rectangulum da, fg; & ex ratione rectæ in ad ml. Demptoq. medio illo termino superfluo nempe quadrato da. Erit ratio frusti hc ad frustum dg composita ex ratione rectanguli bc, he, ad rectangulum da, fg; & ex ratione rectæ in ad ml. Quod erat &c.

Corollarium XXVI.

Est frustum solidi acuti abcd sectū plano hl; ducaturq; bn parallela ad axē. Dico, totum frustum abcd ad partem hbcl, esse ut an ad hi.

Nam solidum acutum agd, ad solidū bgc, est ut af ad be, siue ut af ad fn; & diuidendo frustum abcd ad solidum acutum bgc erit ut an ad nf, siue ut an ad io. Solidum verò bgc ad frustum hc (simili argumento) est ut oi ad ih. Ergo ex æquo. frustum ac, ad hc erit ut an ad hi. Quod &c.



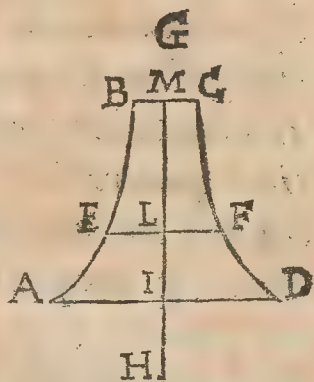
Scholium.

Hinc patet quomodo datum frustum acuti solidi in data ratione secari possit, quod tamen ad finem Corollariorum elegantiori problemate exequemur.

Est

Corollarium XXVII,

*E*sto frustum solidi acuti *abcd*. cuius axis *mi*. sitq; centrum hyperbolæ punctū *h*. Secetur deinde frustum *ac* plano quocunq; *ef* ad axem erecto. Dico frustum *af*, ad frustum *ec*. esse ut rectangulum sub *il*, *hm*, ad rectangulum sub *hi*, *lm*.



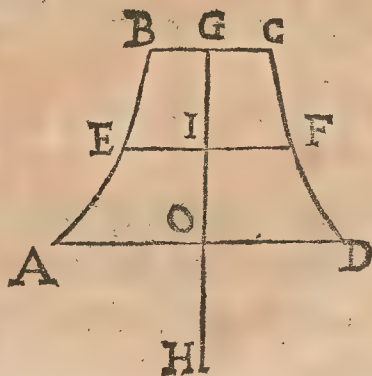
Nam frustum *af* ad frustum *ec*, rationem habet compositam ex ratione frusti *af* ad acutum solidum *egf*; & ex ratione solidi longi *egf*, ad frustum *ec*. Sed quia solidum acutum *agd* ad acutum solidum *egf* est ut recta *ai* ad *el*; siue ut recta *lh* ad *hi*, erit diuidendo frustum *af* ad solidum *egf* ut *li* ad *ih*. Amplius: Solidum *egf* ad solidum *bgc* est ut *el* ad *bm*, siue ut *mh* ad *hl*; & per conuersionem rationis, erit solidum *egf* ad frustum *ec*, ut *hm* ad *ml*. Patet ergo quod ratio frusti *af* ad frustum *ec*, componitur ex ratione *li* ad *ih*, & ex ratione *hm* ad *ml*. Propterea frustum *af* ad *ec*, erit ut rectangulum sub *li*, *hm*, ad rectangulum sub *ih*, *lm*. Quod &c.

Scholium.

Ideò si fiat, ut *mb* ad *hi*, ita *ml*, ad *li*. Bifariam secabitur frustum *ac* à plano per punctum *l* ducto. Aequalia enim erunt ipsa rectangula.

Corollarium XXVIII.

*S*i axis frusti *abcd* bifariam secetur à plano *ef*. Erunt portiones inter se, nempe *af*. ad *ec* ut recta *ad* ad *bc*. scilicet ut diametri basium remotarum.



Fru-

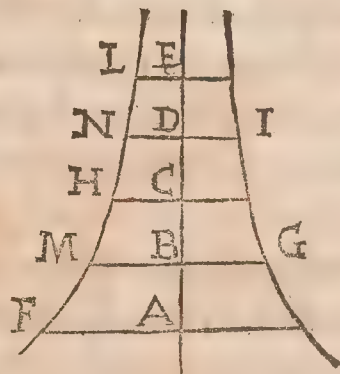
Problema Secundum

135

Frustrum enim af ad ec, est vt rectangulum sub hg, oi ad rectangulum sub ho, ig per preced: Sed oi, & ig, altitudines rectangulorum sunt æquales, Ergò frustrum af ad ec, erit vt gh ad ho, siue vt ad ad bc. Quod &c.

Scholium.

Hinc patet; quòd si in solido longo hyperbolico quotcunq; sumantur axis portiones deinceps æquales *a, b, c, d, e.* vbi cunq; fiat initium. Erit frustrum *fg* ad *g* *b* vt recta *fa* ad *bc*. Frustrum verò *gh* ad *hi* erit ut *mb* ad *nd*. & frustrum *hi* ad *il* ut *hc*, ad *le*. & sic in infinitum.

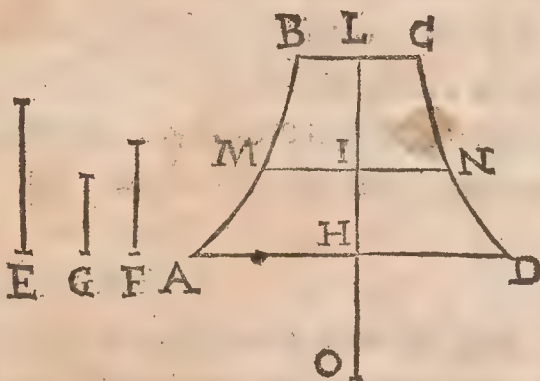


Corollarium XXIX.

Datum acuti solidi frustrum abcd in data ratione secare; puta vt e ad f.

Fiat, vt recta ad ad bc, ita e ad aliam que sit g. Deinde fiat, vt g ad f, ita hi ad il, & per i ducatur planũ mn.

Iam frustrum an ad mc est vt rectangulum lo, ih, ad rectangulum li, oh. Ergò ratio frustri an ad mc componitur ex ratione laterum lo ad oh, siue ad ad bc, siue e ad g. Et ex ratione laterum hi ad il, siue g ad f. Ergò ratio frustri an ad mc. componitur ex ratione e ad g, & g ad f. Propterea erit an frustrum ad mc vt e ad f. Quod &c.



Iam ista sufficiat demonstrauiſſe, ex plurimis Theorematis, quæ ex facundissimo hoc solido deriuari poterant. Interim ad promissam demonstrationem accedamus, quam tamen præterire poterit quicunq; iam allatà contentus fuerit.

DE

*De Dimensione Acuti solidi Hyperbolici
iuxta methodum Antiquorum.*

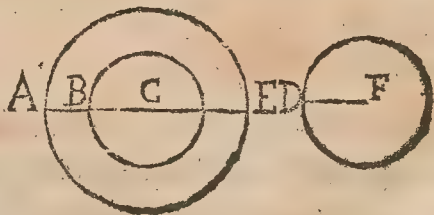
S Vpereft nunc vt Theorema illud, quod poft lemma Quintum oftendimus per methodum, & doctrinam Indiuifibilium, demonftremus iterum more Antiquorum, & præcipue Archimedis. Impossibile enim quodammodo videtur, infinitam longitudine figuram sub folita figurarum infcriptione, & circumfcriptione poffe compræhendi. Tamen id non folum à nobis factum eft, verum etiam à Clariffimo viro, & Geometra præftantiffimo Roberuallio, qui noftrum folidum hyperbolicum inuētis arduis, fublimibus, acutiffimis, & vt breuiter dicam fuis, menfurauit, eiusq; fruftum in data ratione difsecuit. Abftineo ab illius demõstrationis editione inuitus. comparuit enim eius epiftola eo prorfus tempore, quo iam hæc prælis fubijcerentur, neque de voluntate Authoris fatis conftabat, neque iam per tempus licebat expectare, donec illius beneplacitum ex Gallia Parisijq; significaretur. Veniamus itaq; ad lemmata opportuna, quorum primum fit.

Lemma Primum.

Differentia, quæ eft inter duos circulos, ad circulum quemlibet tertium; eft vt rectangulum compræhensum sub differentia, & aggregato femidiametrorum eorundem circulorum, ad quadratum femidiametri tertij illius circuli.

Vocetur autem talis differentia duorum circulorum, quando concentrici fuerint, Armilla.

Efto Armilla, siue differentia duorum circulorum concentricorum, illa cuius latitudo ab, centrum verò c. Dico Armillam ab, ad circulum quemlibet df; effe vt rectangulum



abc,

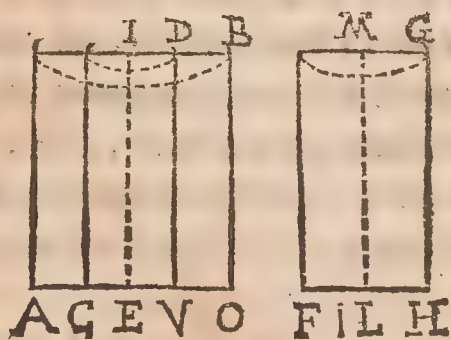
abe, ad quadratum semidiametri df.

Nam circulus ex radio ac, ad circulum ex radio cb, est ut quadratum ac, ad quadratum cb; & diuidendo Armilla ab, ad circulum ex radio cb; erit ut rectangulum abe, ad quadratum cb. Circulus verò ex radio cb, ad circulum ex radio df, est ut quadratum cb, ad quadratum df. Ergo ex æquò, erit Armilla ab, ad circulum df, ut rectangulum abe, ad quadratum df. Quod erat &c.

per 2.
duodeci-
mi.
ex 5. se-
cundi.

Lemma II.

Si ex cylindro recto ab, ablatus fuerit cylindrus cd, circa communem axem ie constitutus; reliquum solidum excava- tum quod remanet, æquale erit cy- lindro cuidam recto fg, cuius quidem basis fh æqualis sit Ar- milla, quæ circa centrum e lati- tudinem habet ac; altitudo verò lm æqualis sit altitudini ei.



Vocetur autem tale solidum excava- tum, tubus cylindricus.

Quoniam tres cylindri ab, cd, fg, æque alti sunt; Erit cylindrus ab ad cd, ut circulus ao ad circulum cu. & diuidendo erit tubus cylindricus ad cylindrum cd, ut armilla ac ad circulum cu; sed cylindrus cd ad cylindrum fg, est ut circulus cu ad circulum fh. Ergo ex æquo erit tubus cy- lindricus ab, ad cylindrum fg, ut armilla ac ad circu- lum fh. Sed armilla ac circulo fh supponitur æqualis; er- gò & tubus cylindricus ab, æqualis erit cylindro fg. Quod erat &c.

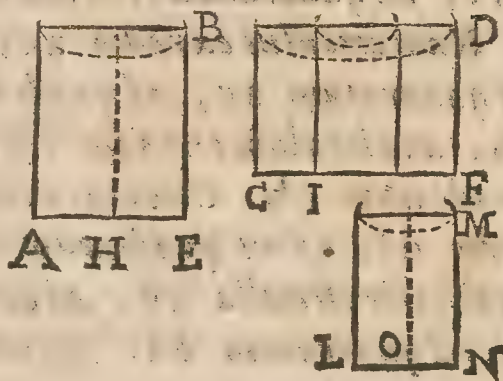
Lemma III.

Quilibet cylindrus rectus ab, ad quemlibet tubum cylin- dricum rectum cd, rationem habet compositam ex ratione al- titudi-

titudinum, nempe eb ad fd ,

& ex ratione basium, nempe
ex ratione quadrati ah ad re-

Lemma I. ctangulum cif . (demonstra-
tum enim est ita esse circulum
 ae ad armillam ci , ut qua-
dratum ah ad rectangulum
 cif .)

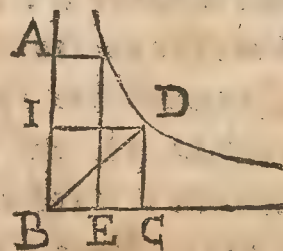


Ponatur cylindrus lm , cuius altitudo nm sit aequalis altitudini fd ; basis verò ln , aequalis sit armillæ ci ; Et erit, per præcedens lemma, tubus cylindricus cd aequalis cylindro lm .

Iam cylindrus ab , ad tubum cd eandem habebit rationem quam habet ad cylindrum lm ; nempe compositam ex ratione altitudinis eb ad nm , siue ad fd ; & ex ratione basium, hoc est circuli ae ad circulum ln ; siue quadrati ah ad quadratum lo , vel quadrati ah , ad rectangulum cif . Quod erat &c.

Lemma IV.

Est hyperbola cuius asymptoti sint ab , bc , angulum rectum comprehedentes; sitque hyperbola semiaxis bd . (semiaxem appello, quia b punctum in quo asymptoti concurrunt, centrum hyperbolæ est.) Dico quadratum rectæ bd , duplum esse cuiuscunque rectanguli ae , inter asymptotos, & hyperbolam ipsam comprehensi.

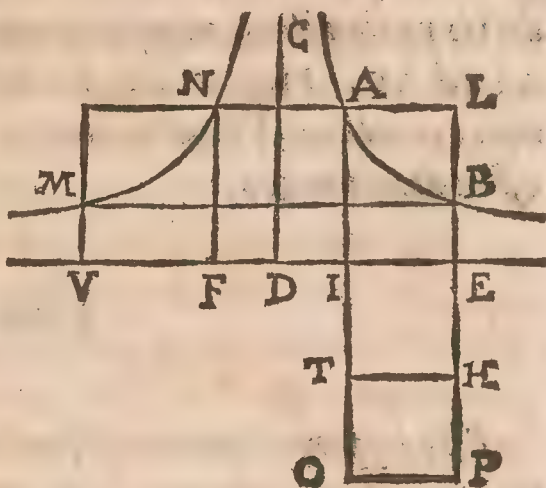


Ducantur dc , di asymptoti aequidistantes; eritque figura bi dc , quadratum: cum anguli ad b semirecti sint; sed ad c , & ad i recti. Ideo quadratum lineæ bd , duplum erit quadrati $bidc$; siue rectanguli ae , inter asymptotos, & hyperbolam ipsam comprehensi. Quod erat &c.

Lemma V.

Est hyperbola ab , cuius asymptoti angulum rectum continen-

nentes sint cd, de ; Sumptisq;
duobus punctis a, b , utcumq;
in hyperbola, ducantur due re-
ctæ be, ai , asymptoto cd . æ-
quidistantes, & an, bm alte-
ri asymptoto de parallelæ, quæ
concurrant in l . Tum conuer-
tatur uniuersa figura circa axē
 cd .



Dico cylindrum quemdam i
epo (cuius quidem basis io
habeat semidiametrum it aqua
lem semiaxi hyperbolæ; altitudo verò sit intercepta ie.) maio-
rem esse tubo illo cylindrico, qui fit ex conuersione rectanguli i
b circa axem cd ; Minorem verò tubo illo qui fit ex conuersione
rectanguli il , circa eundem axem reuoluti.

In primis; quia it est æqualis semiaxi hyperbolæ, erit qua- Lem. præcedens.
dratum it duplum rectanguli db , siue æquale rectangulo ub .
Iam: cylindrus oe , ad tubum qui fit ex rectangulo ib (intel-
lige semper circa axem cd) rationem habet compositam ex ra- Lem. 3.
tione basium; nempe ex ratione quadrati it, siue rectanguli ub ,
ad rectangulum uie . Hoc est (abiectis rectangulis) ex ratio-
ne lateris ue ad ei ; & ex ratione lateris eb ad iu . Et insu-
per ex ratione altitudinum; nempe rectæ ei ad eb . Ergo ratio
cylindri oe ad tubum ib , componitur ex prædictis tribus ra-
tionibus; scilicet. ex ratione rectæ ue ad ei ; & ex ratione ei
ad eb ; & ex ratione eb ad iu . propterea cylindrus oe , ad
tubum ib , erit ut primus terminus ad ultimum; nempe ut re-
cta ue ad iu ; hoc est minor. Quod erat ostendendum primò.

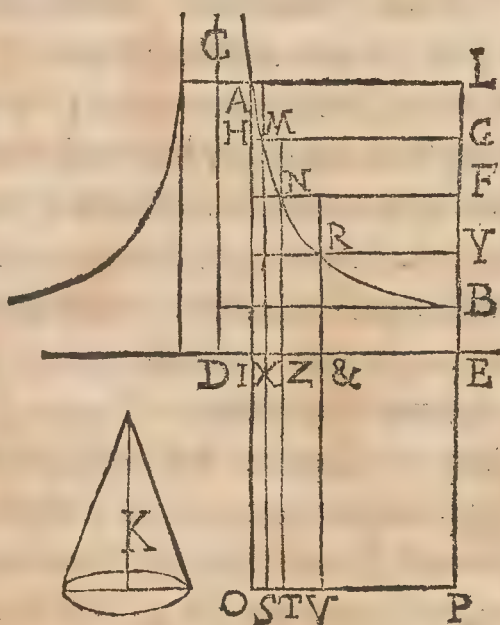
Ratio verò cylindri oe , ad tubum, qui fit ex rectangulo il ,
componitur ex ratione basium, scilicet ex ratione quadrati it, vel
rectanguli in , ad rectangulum uie ; hoc est (abiectis rectangu-
lis) ex ratione lateris fi , ad ie ; & ex ratione reliqui lateris ai ,
ad iu . Et insuper ex ratione altitudinum, nempe ie ad ai . Er-

gòratio cylindri o e, ad tubum il, componitur ex his tribus prædictis rationibus; nempe ex ratione fi ad ie; & ie ad ai; & ai ad iu. Propterea cylindrus o e, ad tubum il, erit ut primus terminus fi ad ultimum iu. & ideo minor. Quod erat ostendendum &c.

Lemma VI.

Est hyperbola cuius asymptoti cd, de angulum rectum comprehendant, sumptisq. in hyperbola utcumque duobus punctis a & b; ducantur ai, be asymptoto cd parallela.

Dico solidum illud annulare quod describitur ex conuersione quadrilinei mixti iabe, circa axem cd reuoluti, æquale esse cui dam cylindro recto i e po. Debet autem huius cylindri altitudo esse ie; diameter verò basis io, debet esse æqualis integro axi ipsius hyperbole.



Sit enim (si possibile est) solidum illud annulare factum ex quadrilineo iabe, circa axem cd reuoluto, minus cylindro o e: & ponatur defectus æqualis cuidam solido K.

Secetur bl bifariam in f. deinde reliqua fl secetur bifariam in g; Et hoc fiat semper donec tubus aliquis cylindricus, qui describitur ex reuolutione rectanguli alg, minor sit solido K. Tunc enim secta tota bl, in partes æquales ultime gl, ducantur à singulis punctis diuisionum, recta gh, fn, yr, æquidistantes ipsi de. Ex punctis verò m, n r. in quibus prædictæ parallele hyperbolam secant, demittantur recta, siue potius plana mf, nt, ru. ad asymptoton de crecta. Denique ex conuerso.

uersione singulorum rectangulorum equalium, quorum unum est ag , totidem tubi cylindrici describantur circa axem cd .

Iam: tubus qui fit à rectangulo rb (intellige semper circa axem cd) ob equalem altitudinem, eandemque basim, equalis erit tubo rf . additoq; communi tubo rn . erunt duo tubi br, rn simul sumpti aequales tubo ny , siue tubo ng . Additoq; communi nm . erunt tres tubi $brnm$, aequales tubo mf , siue ml ; & addito communi ultimo ma , erunt omnes tubi simul $brnma$, aequales tubo ag , nempe minores solido K . ob constructionem. Propterea uniuersa figura solida constans ex tubis er , & n, zm xa , circumscripta solido annulari factò à quadrilineo $iabe$, minus addit supra ipsum solidum annulare, quàm sit solidum K . Ergo ipsa figura circumscripta adhuc minor erit cylindro oe . Quod est absurdum. Nam tubus ax . superat cylindrum xo ; Tubus item mz superat cylindrum zf . & sic de reliquis per lemma 5.

Lem. 5.

Ponatur deinde (si possibile est) solidum annulare genitum ex quadrilineo $iabe$, maius esse cylindro oe . ponaturq. excessus equalis solido quidam K .

Peragatur similis constructio, ut supra; ita ut omnes tubi cylindrici $brnma$, minores iterum ostendantur solido k . Tunc enim figura inscripta in solido annulari predictò, constans ex tubis & b, zr, xn, im , minus deficiet ab ipso solido annulari, quàm sit solidum k . Propterea eadem inscripta figura adhuc maior erit cylind. oe . Quod est absurdum. Nam tubus xh minor est cylindro xo ; & tubus xn minor est cylindro xt . Et sic de reliquis.

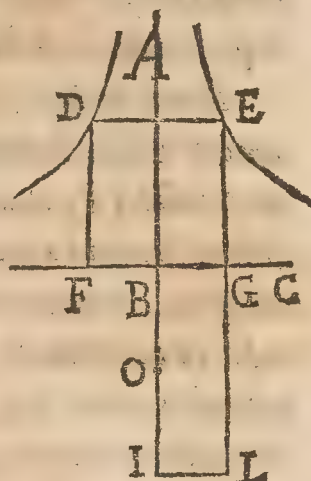
Lem. 5.

Patet ergo, quòd solidum annulare genitum ex conuersione quadrilinei $iabe$, circa axem cd , equalis est cylindro oe . Si quidem ostensum est, neq; minus, neq. maius esse posse.

Lemma VII.

Est hyperbola, cuius asymptoti angulum rectum continentes sint ab, bc ; & conuertatur figura circa axem ab , ita ut fiat solidum hyperbolicum, cuius infinita sit longitudo uersus partes a . Secto deinde huiusmodi solido, plano de ad axem erecto,

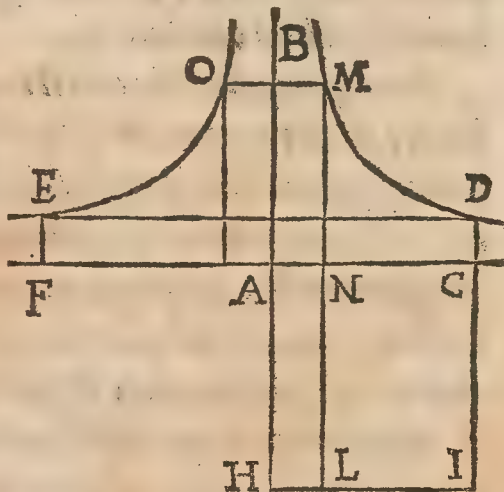
Eto, super basi de concipiatur cylindrus df
 ge, habens altitudinem df. Intelligatur
 que alius cylindrus bgli, cuius altitudo sit
 bg, basis verò semidiameter bo ponatur æ-
 qualis semiæxi hyperbolæ. Dico cylindrum
 bl duplum esse cylindri fe.



Nam cylindrus bl ad cylindrum fe, rationem habet compositam ex ratione basium, nempe ex ratione quadrati ob ad bg; & ex ratione altitudinum, nempe ex ratione rectę bg ad ge, siue quadrati bg ad rectangulum bge. Ergò cylindrus bl, ad cylindrum fe, est ut quadratum ob, ad rectangulum be. Nempe duplus. Quod erat &c.

Theorema.

Esto hyperbola, cuius asymptoti angulum rectū continentes sint ab, ac . Et sumpto in hyperbola quolibet puncto d . ducatur d c parallela ad ba . Tum cōvertatur figura circa axem ab ; ita ut fiat solidum acutum hyperbolicum infinitæ longitudinis versus partes b , (intellige semper punctum b in infinitam distantiam esse remotum.) Constabitq. præ-



dictum solidum hyperbolicum ex duobus solidis, nempe ex cylindro recto *fedc*, & ex solido acuto *ebd*, cuius quidem basis erit circulus *ed*, altitudo verò sine fine.

Sic

Problema Secundum .

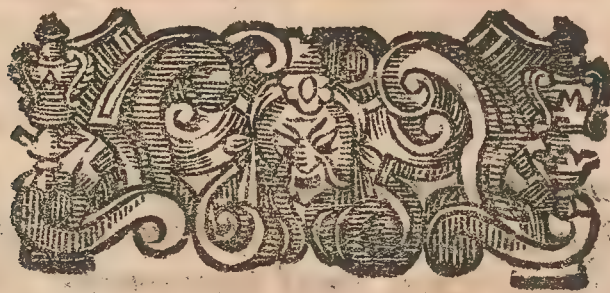
43
135

Sit enim (si possibile est) solidum hyperbolicum *febdc* minus cylindro *ai*. Ponaturq; ex cylindro *ai* cylindrus aliquis *ncil*, qui æqualis sit solido hyperbolicò : & producat *lnm* donec hyperbolæ occurrat in *m*. (occurret enim, cum asymptoto *ab* supponatur parallela.)

Iam cylindrus *ni*, æqualis erit solido annulari, quod describitur à reuolutione quadrilinei mixti *nmdc*; & propterea minus omninò erit solido integro hyperbolico *febdc*. Non ergo eidem est æqualis. Quod est contra suppositum. Lem. 6.

Ponatur deinde (si possibile est) solidum hyperbolicum *febdc* maius cylindro *ai*. Quoniam igitur solidum hyperbolicum *febdc*. (siue finitæ magnitudinis sit, siue infinite) maius supponitur quàm cylindrus *ai*. Erit aliquod ipsius segmentū, puta *feomdc*, æquale cylindro *ai*. Quod est absurdum. Nā solidum annulare factum à reuolutione quadrilinei *nmdc*, Lem. 6. quale est cylindro *ni*; Cylindrus autem *on* subduplus est cylindri *nb*. Ergò tota portio solidi hyperbolici *feomdc*, Lem. 7. minor erit cylindro *ai*.

Patet ergo, quòd vniuersum solidum acutum hyperbolicum *febdc*, quamquam infinite longitudinis sit, æquale tamen est prædicto cylindro *ai*. Quandoquidem neque minus, neq; maius esse potest. Quod erat ostendendum &c.



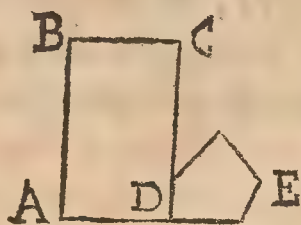
A P P E N D I X

De Dimensione Cochleæ.

CVM adhuc à nemine, quod ego sciam, Geometrica consideratione examinatum sit solidum vulgatum, & antiquissimum, meoq; iudicio aliqua animaduersione non indignū (Cochleam intelligo,) non abs re fore iudicaui illud breui cōtemplatione prosequi. Non enim aliena erit à præcedenti libello præfens speculatio, quæ per Indiuisibilia curua, superficiesq; cylindricas procedit. Neq; ingratum Geometris opus futurum existimo, si demonstrauiero cui figuræ notæ iam dimensionis, æquale sit solidum quiddam neque rectam, neque rotundum, sed spirali reuolutione contortum, quale nullum adhuc inter mensuratas figuras possidet Geometria. Premissa itaq; definitione veniamus ad lemmata, qua fieri poterit breuitate, expedienda.

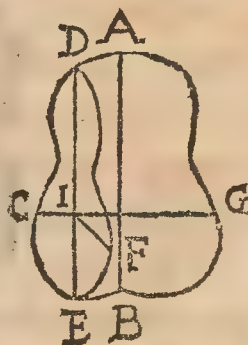
Definitio.

SI eodem tempore moueantur duæ planæ figuræ, quæ semper in eodē plano consistent, nempe rectāgulum $abcd$. circa axem ab motu circulari æquali, & figura quæcunq; de motu progressiuo super latere dc . Solidum quod à figura genitrice de describitur, Cochleam appello.



Lemma Primum.

Estō solidum quodlibet rotundum $acbg$; cuius axis sit ab , figura genitrix abc ; sectūq. sit plano dfe æquidistantèr axi, & ad figuram genitricem erecto, quod quidem faciat in superficie solidi rotundi semisectionem lineam dfe . Dico



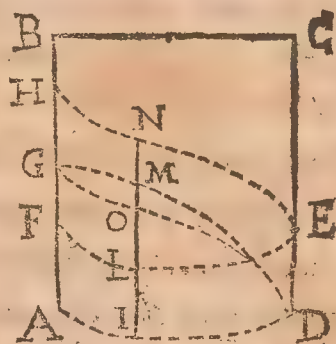
soli-

solidum illud rotundum quod oritur ex revolutione figure dfe, circa axem de, equari solido quod describitur à figura dce circa axem ab revoluta.

Intelligatur enim solidum rotundum fecari alio plano per c f g ducto, & ad axem ab erecto, eruntq; puncta cfg in semicirculi peripheria cuius diameter est cg; & ideò quadratum if æquale erit rectangulo cig, & propterea (per lemma primū præcedentis demonstrationis) circulus cuius radius if, æqualis armille quam recta ci describit circa axem ab. Et hoc semper verum erit ubicunq; sit planum secans cfg. Ergo omnes simul circuli, nempe solidum rotundum factum à revolutione figure dfe circa axem de, æquales erunt omnibus armillis simul sumptis, hoc est solido facto à figura dce, revoluta circa axem ab. Quod erat &c.

Lemma II.

Esto cylindrus rectus abcd, & ex recta e d tamquam termino duæ rectæ lineæ in superficie cylindrica æquales ipsi ed moveantur: quarum altera puro circulari motu Zonam efad describat, altera vero quocunque motu Zonam ehg od designans, moveatur donec amba ad unum, idemque latus cylindri, puta ab pervenerint, Dico huiusmodi zonas, siue zonarum portiones inter se esse æquales.



Concipiatur enim trigonus cylindricus superior hfe transferri, & supra inferiorem gad collocari, ita ut peripheria fe ipsi ad superponatur, qua necessario congruent, cum sint arcus æqualium circulorum & rectæ siue chordæ fe, ad (si ducantur) æquales sint per Propositionem 33. Primi elementorum Euclidis.

Ipsa etiam recta fh congruet cum recta sibi æquali ag, aliàs duæ rectæ se interfecarent in superficie cylindrica, quod esse non potest. Ipsa tandem curva hne, qualiscunq; sit, congruet cum

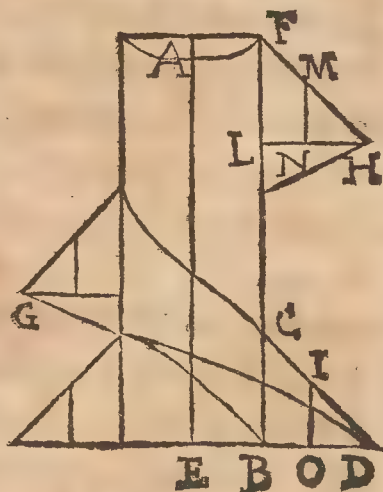
T

curva

curua god . Nisi enim congruat; esto: Et sit gmd translata curua hne , quæ non congruit cum god . ductaq. in in superficie cylindri, erit mi inæqualis ipsi io ; ergo etiam nl , cum æqualis sit mi , erit inæqualis ipsi io , quod esse non potest; Cum enim per suppositionem æquales sint il , on , additâq. sine ablatâ communi io , erit tota io , æqualis toti nl . Propterea totum triangulum cylindricum hfe æquale est triangulo cylindrico gad . & ideo, per prosthapheresim, Zona $efad$, zonæ $ehgd$ est æqualis. Quod &c.

Lemma III.

Si rectangulum ab , & figura quacunque genitrix bcd moueantur, ut in definitione positum est donec peracta integra reuolutione ad idem planum redeant unde ceperant moueri. Dico factam cochleam primæ reuolutionis dgh , æqualem esse annulo circulari, qui ab eadem figura genitrice describetur circa axem ae .



Concipiatur enim figura bcd describere primum cochleam primæ reuolutionis dgh , quæ initium habeat à figura bcd , & finem in figura lfh . Deinde intelligatur describere annulum circulare in se redeuntem, qui habeat initium, & finem in figura eadem bcd .

Accipiatur in figura bcd qualibet recta io parallela axi ae , quæ quidem recta io in reuolutione duas zonas cylindricas, & æquales (per lemma præcedens) describet, in una eademq. cylindrica superficie, alteram quidem in cochlea, alteram verò in annulo. Et æquales semper erunt, ubicunq. sumatur recta io . ergo omnes simul Zonæ cylindricæ quæ sunt in cochlea, æquales erunt omnibus simul Zonis cylindricis quæ sunt in annulo, propterea & ipsa cochlea æqualis erit ipsi annulo. Quod &c.

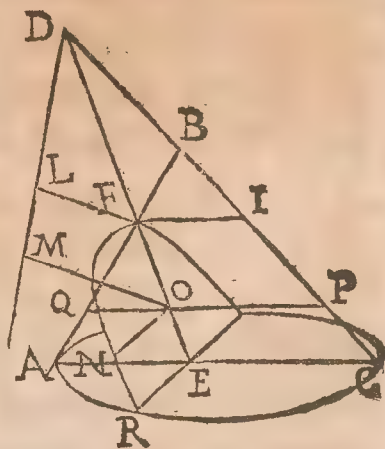
Corollarium.

Hinc manifestum est omnes cochleas primæ reuolutionis esse in-

se inter se æquales, quandoquidem singulę eidem annulo circulari æquales sunt.

Lemma IV.

Manentibus ijs qua Apollonius supponit in XI, XII, & XIII, primi Conicorum. Est conus abc, sectus plano non verticali per fnr, faciente in superficie conisectionem fnr, quaecunq; illa sit; cuius diameter esto fe. Ducaturq; fi æquidistans ipsi ac. Tum fiat, ut fe ad ea (partem basis trianguli per axē à vertice coni auersam) ita if ad fl. Dico fl esse latus rectum sectionis.

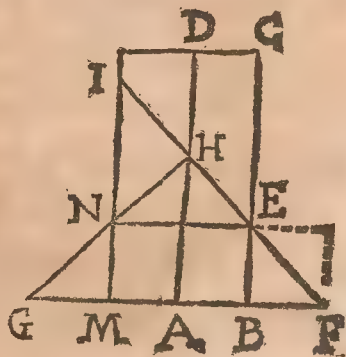


Ponatur fl ad punctum f utcumque, & ducatur dl ab extremitate axis: Accepto deinde quolibet puncto n in sectione, applicetur no, & per o agatur qp æquidistans ipsi ac; at om ducatur parallela ad fl. Erit iam fo ad oq, ut fe ad ea, siue ut if ad fl, nempe ut po ad om, ob parallelas; Ergo rectangula fom, poq sunt equalia; quamobrem rectangulum fom æquale erit quadrato on, & propterea fl rectum figurę latus. Quod &c.

Licet hoc verum sit in omni sectione coni, solam hyperbolam depiximus, quoniam sola hyperbola facit ad rem nostram.

Lemma V.

Si rectangulum ac, in eodem existens plano cum triangulo orthogonio ebf. conuertatur circa manens latus ad donec ad locum redeat unde capit moueri. Dico annulum circulare descriptum à triangulo ebf æqualem ef-



se conoidi cuidam hyperbolico, cuius altitudo sit be ; cuius latus rectum sit quarta proportionalium si fiat ut eb ad bf ita dupla ba ad aliam. Versum verò latus quarta sit proportionalium, si fiat ut fb ad be , ita dupla ba ad aliam,

Conuertatur figura ut dictum est, & rectangulum ac describat cylindrum cuius sectio per axem cm ; intelligaturque productam esse rectam fc , donec cum axe conueniat in h , & cum mi in i . Manifestum est triangulum haf describere conum ghf , cuius axis est ah . Concipiatur iam secari conum ghf æquidistantè axi plano per eb , siue per inducto, quod quidem planum erectum sit ad figuram genitricem coni, nempe ad planum ghf . Eritq. sectio in cono ghf hyperbolæ; Et propterea solidum quod describitur à triangulo mng , siue ebt , circa axem ad , æquale erit (per lemma primum) conoidi hyperbolico à prædicta hyperbolæ descripto. Huius autem conoidis, siue huius hyperbolæ latus rectum habetur (per lemma præced.) si fiat ut nm , ad mg , ita en , siue dupla ba ad aliã. Versum verò, quod est ni , habebitur, si fiat ut gm ad mn , ita en , siue dupla ba ad aliam quæ erit ni . Quod erat &c.

per 4. sex
ti.

Theorema.

Cochlea primæ reuolutionis, quæ describitur à triangulo ebf in præcedenti figura, æqualis est conoidi cuidam hyperbolico, cuius altitudo sit eb ; latus rectum sit quarta proportionalium, si fiat ut eb ad bf , ita dupla ba ad aliam. Versum verò latus sit quarta proportionalium, si fiat ut fb ad be , ita dupla ba ad aliam.

Hoc enim patet ex iam demonstratis. Prædicta enim cochlea æqualis est (per lem. primum) annullo factò à triangulo ebf . Sed annulus circularis trianguli ebf prædicto conoidi est æqualis (per lemma præcedens.) Ergo patet quod propositum erat.

Scholium.

Cochlea verò cuius figura genitrix parallelogrammum rectangulum sit, equalis est cylindro cuius altitudo sit eb , eadem cum altitudine figurae genitricis, semidiameter verò basis media proportionalis sit inter fb , & rectam compositam ex cx & fa , ab .

Si verò figura genitrix circulus fuerit, erit facta cochlea primae revolutionis ad sphaeram circuli genitoris, ut peripheria quae describitur à radio, qui sit aequalis utrique, nempe rectae ab in praecedenti figura, semidiametroq; circuli genitoris, ad duas tertias diametri eiusdem circuli genitoris.

Reliquum esset ut Mechanica etiam Theoremata horum solidorum exquereremur, praesertim quando Cochlea gignitur à triangulo: Centrum enim gravitatis in axe est, diuiditq; portiunculam quandam ipsius axis (equalem abscindendam lateri eb , & circa punctum medium ipsius axis collocandam) veluti conoidis cuiusdam hyperbolici centrum secat propriam diametrum; siue praedictae portiunculae semissem ita diuidit, uti eandem secaret centrum gravitatis cuiusdam segmenti sphaerici duplam habentis altitudinē, basinq; dato cuidam circulo equalem. Sed tanti non est singulas istas nugae longius protrahere, ut te beneuolum Lectorem ulterius adhuc torqueamus. Fortasse etiam fiet, nisi uniuersa haec, quae in istis libellis continentur, tibi displicuisse comperiam, ut ea quae hic desiderantur, & multò plura circa gravitatem, ipsiusq; centrum, peculiari libello Geometricè comprehendam. Interim scio me patrocinium debere longissima tot mensium desidia: cum iam supra annum, ex quo opuscula haec maximis Geometris promissa sunt, producaturlentiissima eorum impressio. quod quidem pluribus de causis factum est; neq; hoc tam negligentiae meae imputandum est, quàm fortuitis quibusdam casibus, insperatisque. Accidit enim intermedio hoc tempore, ut plurium mensium studio atq; labore inciderim in solutionem optici illius Problematism tam diu per-

qui-

quisiti, cuius videlicet figura esse debeant superficies vitrorum, quæ ad usum Telescopij elaborantur. Exitus demonstrationem confirmavit. quamquam enim neque optatam figuram (ut credibile est) perfectè haberent, neque undequaque absoluta, & perpolita à Tirone adhuc inexperto, & inexercitato viderentur, ope tamen, & vi figura illius ad quam proximè tantum accedebant, ad eum usq; perfectionis gradum peruenerunt, ut Telescopia optimi cuiusq; artificis, cuius ad hunc diem fama in hac Vrbe innotuerit, superauerint. Neque iudicium hoc perperam prolatum est; sed repetitis sapius, summaq; cum diligentia varijs experimentis, nocte, dieque, & adhibitis eruditissimis rebus, quorum iudicium nemo iure damnauerit. Certe, qualecunq; fuerit inuentum, nescio plusne gaudij, laudisq; mihi attulerit, an præmij: quandoquidem Serenissimi Magni Ducis effusa, & verè Regia liberalitas magno auri pondere donatum me non semel voluit. Mirum itaq; videri non debet quòd omisà per integrum semestre libellorum curà, totam operam nouo inuèto, mihiq; in primis exoptatissimo, ne dicam utilissimo, impenderim. Factum etiam est ut hac de causa libelli minus castigati euaserint; authore nimirum distracto, & ad alia, eaq; diuersissima, conuerso. Quapropter orandus etiam atq; etiam es beneuole lector, ut hac quali acunq; æqui, boniq; facias, & errata vel tolere, vel corrigas. præsertim cum tam manifesta plerunq. sint, ut neminem fugere valeant, sed vtrò se se ipsa offerant; ut videre est in prima statim epistola nuncupatoria, & subinde satis frequenter in ijs quæ sequuntur. Correctiones non addemus in fine operis, ut pleriq. solent: quia neque satis vacauit temporis ad mendosa omnia adnotanda, neq. voluimus mutilà breuiq. recensione aliquot erratorum, omnem deinde excusationi meæ locum eripere; dum tacita præmissio eorum, quæ censum effugissent, tamquam approbationis quoddam genus mihi potuisset imputari.

F I N I S.

II Re-

Il Reu, M. Carlo Mariotti veda se nella presente Opera si contenga cosa che repugni alla Pietà Cristiana, e buoni costumi, e riferisca. D. il dì 30. di Marzo 1644.

Vincenzo Rabatta Vic. Gen. di Fir.

Ego P. Carolus de Mariottis nullam in hoc opere contra pietatem ac bonos mores inueni labem, immo maximam in ipso mathematicæ studentibus, ac huiusmodi incumbentibus arti in legendo sum expertus vtilitatem: in quorum fidem scripsi

Idem Ego qui supra manu propria.

Attenta præfenti relatione imprimatur opus seruatis seruan.

D. die 9. Aprilis 1644.

Vincentius Rabatta Vic. Gen. Flor.

Si può stampare in Fiorenza li 13. Aprile 1644.

Fr. Iacomo da Castiglione Canc. del S. Off. de mand.

Alessandro Vettori Senatore Aud. di S. A. Sereniss.

