

SCIENCES et PHILOSOPHIE

LIVRES ANCIENS ET MODERNES

LIVRES NEUFS ÉTRANGERS

51 bis, rue St-Jacques, 75005 PARIS

1) 43 54 64 64

(angle rue Soufflot)

**DECISION TECHNOLOGY
TEAM LIBRARY**

1800 1800 1800 1800
1800 1800 1800 1800

IMPRESSION ANASTALTIQUE
CULTURE ET CIVILISATION
115, AVENUE GABRIEL LEBON
BRUXELLES
1967

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS.

PARIS

MAISON GOUSSIER, Libraire, 11 rue de la Harpe, 11
et 12 rue de la Harpe, 12

1852



Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Chancelier du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur;
Membre de l'Institut impérial et du Bureau des Longitudes de France;
des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des
Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, de Hollande,
d'Italie, etc.

PARIS,

M^{ME} V^E COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins, n° 57.

1812.

A

NAPOLÉON-LE-GRAND.

SIRE,

LA bienveillance avec laquelle VOTRE MAJESTÉ
a daigné accueillir l'hommage de mon Traité de
Mécanique Céleste, m'a inspiré le desir de Lui

dédier cet Ouvrage sur le Calcul des Probabilités. Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. Il doit, sous ce rapport, intéresser VOTRE MAJESTÉ dont le génie sait si bien apprécier et si dignement encourager tout ce qui peut contribuer au progrès des lumières, et de la prospérité publique. J'ose La supplier d'agréer ce nouvel hommage dicté par la plus vive reconnaissance, et par les sentimens profonds d'admiration et de respect, avec lesquels je suis,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ,

Le très-humble et très-obéissant
serviteur et fidèle sujet,

LAPLACE.

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS.

JE me propose d'exposer dans cet ouvrage , l'analyse et les principes nécessaires pour résoudre les problèmes concernant les probabilités. Cette analyse se compose de deux théories que j'ai données, il y a trente ans, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. L'une d'elles est *la Théorie des Fonctions génératrices* : l'autre est *la Théorie de l'approximation des Formules fonctions de très-grands nombres*. Elles sont l'objet du premier Livre , dans lequel je les présente d'une manière encore plus générale que dans les Mémoires cités. Leur rapprochement montre avec évidence , que la seconde n'est qu'une extension de la première , et qu'elles peuvent être considérées comme deux branches d'un même calcul , que je désigne par le nom de *Calcul des Fonctions génératrices*. Ce calcul est le fondement de ma *Théorie des Probabilités*, qui fait l'objet du second Livre. Les questions relatives aux évènements dus au hasard , se ramènent le plus souvent avec facilité , à des équations linéaires aux différences simples ou partielles : la première branche du calcul des fonctions génératrices donne la

méthode la plus générale pour intégrer ce genre d'équations. Mais quand les événemens que l'on considère, sont en grand nombre, les expressions auxquelles on est conduit, se composent d'une si grande multitude de termes et de facteurs, que leur calcul numérique devient impraticable; il est donc alors indispensable d'avoir une méthode qui les transforme en séries convergentes. C'est ce que la seconde branche du Calcul des Fonctions génératrices fait avec d'autant plus d'avantage, que la méthode devient plus nécessaire.

Mon objet étant de présenter ici les méthodes et les résultats généraux de la théorie des probabilités, je traite spécialement les questions les plus délicates, les plus difficiles, et en même tems les plus utiles de cette théorie. Je m'attache surtout, à déterminer la probabilité des causes et des résultats indiqués par les événemens considérés en grand nombre, et à chercher les lois suivant lesquelles cette probabilité approche de ses limites, à mesure que les événemens se multiplient. Cette recherche mérite l'attention des Géomètres, par l'analyse qu'elle exige : c'est là principalement que la théorie de l'approximation des formules fonctions de grands nombres, trouve ses applications les plus importantes. Cette recherche intéresse les observateurs, en leur indiquant les milieux qu'ils doivent choisir entre les résultats de leurs observations, et la probabilité des erreurs qu'ils ont encore à craindre. Enfin, elle mérite l'attention des philosophes, en faisant voir comment la régularité finit par s'établir dans les choses mêmes qui nous paraissent entièrement livrées au hasard, et en dévoilant les causes cachées, mais constantes, dont cette régularité dépend. C'est sur la régularité des résultats moyens des événemens considérés en grand nombre, que reposent divers établissemens, tels que les rentes viagères, les tontines, les assurances, etc. Les questions qui leur sont relatives, ainsi qu'à l'inoculation de la vaccine, et aux décisions des assemblées électorales, n'offrent aucune difficulté d'après ma théorie. Je me borne ici à résoudre les plus générales; mais l'importance de ces objets dans la vie civile, les considérations morales dont ils se compliquent, et les observations nombreuses qu'ils supposent, exigent un ouvrage à part.

Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles la théorie des probabilités a déjà donné naissance, et celles qu'elle peut faire naître encore ; la justesse des principes qui lui servent de base , la logique rigoureuse et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes ; les établissemens d'utilité publique qui s'appuient sur elle : si l'on observe ensuite que dans les choses même qui ne peuvent être soumises au calcul , cette théorie donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugemens, et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent ; on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, et dont les résultats soient plus utiles. Elle doit la naissance à deux Géomètres français du dix-septième siècle, si fécond en grands hommes et en grandes découvertes, et peut-être de tous les siècles celui qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Pascal et Fermat se proposèrent et résolurent quelques problèmes sur les probabilités. Huyghens réunit ces solutions, et les étendit dans un petit traité sur cette matière, qui ensuite a été considérée d'une manière plus générale par les Bernoulli, Montmort, Moivre, et par plusieurs Géomètres célèbres de ces derniers tems.

LIVRE PREMIER.

CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

Des Fonctions génératrices.

1. CONCEVONS une suite de termes disposés sur une ligne horizontale, et tels que chacun d'eux dérive des précédents, suivant une loi donnée : supposons cette loi exprimée par une équation entre plusieurs termes consécutifs, et leur indice, ou le nombre qui indique le rang qu'ils occupent dans la série : cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies à un seul indice variable*. L'ordre ou le degré de cette équation, est la différence du rang de ses deux termes extrêmes. On peut, à son moyen, déterminer successivement les termes de la série, et la continuer indéfiniment ; mais il faut pour cela, connaître un nombre de termes de la série, égal au degré de l'équation. Ces termes sont les constantes arbitraires de l'expression du terme général de la série, ou de l'intégrale de l'équation aux différences.

Concevons maintenant, au-dessus des termes de la série précédente, une seconde série de termes disposés horizontalement ; concevons encore, au-dessus des termes de la seconde série, une troisième série horizontale, et ainsi de suite à l'infini, et supposons les termes de toutes ces séries, liés par une équation générale entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens horizontal, que dans le sens vertical, et les nombres qui indiquent leur

rang dans les deux sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à deux indices variables*.

Concevons pareillement au-dessus du plan qui renferme les séries précédentes, un second plan renfermant des séries semblables, dont les termes soient placés respectivement au-dessus de ceux que contient le premier plan. Concevons ensuite au-dessus de ce second plan, un troisième plan renfermant des séries semblables, et ainsi à l'infini. Supposons tous les termes de ces séries, liés par une équation entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens de la longueur, que dans les sens de la largeur et de la profondeur, et les trois nombres qui indiquent leur rang dans ces trois sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à trois indices variables*.

Enfin, en considérant la chose d'une manière abstraite et indépendante des dimensions de l'espace, concevons généralement un système de grandeurs qui soient fonctions d'un nombre quelconque d'indices variables, et supposons entre ces grandeurs, leurs différences relatives à ces indices et les indices eux-mêmes, autant d'équations qu'il y a de ces grandeurs; ces équations seront aux différences finies partielles à un nombre quelconque d'indices variables.

On peut à leur moyen, déterminer successivement ces grandeurs. Mais de même que l'équation à un seul indice, exige que l'on connaisse un certain nombre de termes de la série; de même l'équation à deux indices exige que l'on connaisse une ou plusieurs lignes de séries, dont les termes généraux peuvent chacun être exprimés par une fonction arbitraire d'un des indices. Pareillement, l'équation à trois indices exige que l'on connaisse un ou plusieurs plans de séries, dont les termes généraux peuvent être exprimés chacun par une fonction arbitraire de deux indices, et ainsi de suite. Dans tous ces cas, on pourra, par des éliminations successives, déterminer un terme quelconque des séries. Mais toutes les équations entre lesquelles on élimine, étant comprises dans un même système d'équations générales; toutes les expressions des termes successifs que l'on obtient par ces éliminations, doivent être comprises dans une expression générale, fonction des indices qui déterminent le rang du terme. Cette expression est l'intégrale de

L'équation proposée aux différences, et sa recherche est l'objet du calcul intégral.

Si l'on conçoit les indices des séries que nous venons de considérer, comme infinis; et qu'en divisant chacun d'eux par un nombre infini, mais constant, on représente ces divers quotiens par autant de variables; si l'on regarde ensuite, comme différence infiniment petite d'une quelconque de ces variables, l'unité divisée par le nombre infini constant qui lui correspond; enfin, si l'on néglige les puissances supérieures de ces infiniment petits, relativement aux inférieures, et les infiniment petits eux-mêmes, eu égard aux quantités finies; les équations aux différences finies seront transformées dans des équations aux différences infiniment petites, dont les intégrales seront celles des équations aux différences finies, dans lesquelles on aura substitué, au lieu des indices, les variables correspondantes, en négligeant pareillement les infiniment petits, relativement aux quantités finies.

Les quantités qu'on néglige dans ce passage du fini à l'infiniment petit, semblent ôter au calcul infinitésimal, la rigueur des résultats géométriques; mais il suffit, pour la lui rendre, d'envisager les quantités que l'on conserve dans le développement des équations aux différences finies et de leurs intégrales, par rapport aux puissances des différences indéterminées, comme ayant toutes pour facteurs leurs plus petites puissances, dont on compare entre eux les coefficients. Cette comparaison étant rigoureuse, le calcul différentiel qui n'est évidemment que cette comparaison même, a toute la rigueur des autres opérations algébriques. Mais la considération des infiniment petits de différens ordres que l'on reconnaît souvent avec facilité par l'inspection seule des grandeurs, et l'omission des infiniment petits d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve, à mesure qu'ils se présentent, simplifient extrêmement les calculs, et sont l'un des principaux avantages de l'analyse infinitésimale, qui d'ailleurs, en réalisant les infiniment petits, donne par une première approximation, les différences et les sommes des quantités.

Le passage du fini à l'infiniment petit, a l'avantage d'éclairer plusieurs points de l'analyse infinitésimale, qui ont été l'objet de grandes contestations parmi les géomètres. C'est ainsi que j'ai fait voir dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, pour l'année 1779, et

que je démontrerai ci-après , la possibilité d'introduire des fonctions arbitraires discontinues dans les intégrales des équations aux différences partielles , pourvu que ces fonctions soient assujéties à des conditions déterminées. Les résultats transcendants de l'analyse sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux, dont on ne peut connaître la véritable étendue, qu'en remontant par l'analyse mathématique, aux idées élémentaires qui y ont conduit, ce qui présente souvent de grandes difficultés ; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant, qu'à se replier sur lui-même.

Il paraît que Fermat, le véritable inventeur du calcul différentiel, a considéré ce calcul comme une dérivation de celui des différences finies, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur, par rapport à ceux d'un ordre inférieur : c'est du moins ce qu'il a fait dans sa méthode *de maximis*, et dans celle des tangentes, qu'il a étendue aux courbes transcendentes. On voit même par sa belle solution du problème de la réfraction de la lumière, en supposant qu'elle parvient d'un point à un autre dans le tems le plus court, et en concevant qu'elle se meut dans les divers milieux diaphanes, avec différentes vitesses ; on voit, dis-je, qu'il savait étendre son calcul, aux fonctions irrationnelles, en se débarrassant des irrationalités, par l'élévation des radicaux aux puissances. Newton a depuis rendu ce calcul plus analytique, dans sa Méthode des fluxions, et il en a simplifié et généralisé les procédés, par l'invention de son théorème du binôme. Enfin, presque en même tems, Léibnitz a enrichi le calcul différentiel d'une notation très-heureuse, et qui s'est adaptée d'elle-même à l'extension que le calcul différentiel a reçue par la considération des différentielles partielles. La langue de l'analyse, la plus parfaite de toutes les langues, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes ; ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont les germes de nouveaux calculs. Ainsi la simple idée qu'eut Descartes, d'indiquer les puissances représentées par des lettres, en écrivant vers le haut de ces lettres, les nombres qui expriment le degré de ces puissances, a donné naissance au calcul exponentiel ; et Léibnitz a été conduit par sa notation, à l'analogie singulière des puissances et des différences. Le calcul des fonctions génératrices, qui donne la véritable origine

de cette analogie, offre tant d'exemples de ce transport des exposans des puissances aux caractéristiques, qu'il peut encore être considéré comme le calcul exponentiel des caractéristiques.

Le calcul des différences finies et des sommes des fonctions rationnelles et entières d'une variable, a précédé le calcul différentiel; mais la considération des équations aux différences finies, a suivi celle des équations aux différences infiniment petites. A la vérité, les termes généraux des progressions arithmétiques et géométriques, que l'on connaissait depuis long-tems, ne sont au fond que les intégrales d'équations aux différences finies, données par l'égalité des rapports arithmétiques et géométriques à des constantes; mais on ne les avait pas envisagés sous ce point de vue, l'un de ceux qui, se rattachant à des théories générales, ont plusieurs fois conduit à ces théories, et sont par là de véritables découvertes.

Taylor et Moivre sont, si je ne me trompe, les premiers qui aient considéré les équations aux différences finies. Moivre a intégré généralement les équations linéaires aux différences finies à coefficients constans, et qu'il a désignées sous le nom d'*échelles des suites récurrentes*. Sa théorie est une des choses les plus curieuses et les plus utiles que l'on ait trouvées sur les suites. J'ai considéré depuis, les équations linéaires aux différences finies partielles; plusieurs géomètres se sont ensuite occupés du même objet. L'intégration de ces équations, comme tout ce qui concerne les séries, découle avec une extrême facilité de la théorie des fonctions génératrices.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fonctions génératrices, à une variable.

2. Soit y_x une fonction quelconque de x ; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1.t + y_2.t^2 + y_3.t^3 \dots + y_x.t^x + y_{x+1}.t^{x+1} \dots + y_\infty.t^\infty;$$

on peut toujours concevoir une fonction de t , qui développée suivant les puissances de t , donne cette suite : cette fonction est ce que je nomme *fonction génératrice* de y_x .

La fonction génératrice d'une variable quelconque y_x , est donc généralement une fonction de t , qui développée suivant les puissances de t , a cette variable pour coefficient de t^x ; et réciproquement, la variable correspondante d'une fonction génératrice, est le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction suivant les puissances de t ; ensorte que l'exposant de la puissance de t , indique le rang que la variable y_x occupe dans la série que l'on peut concevoir prolongée indéfiniment à gauche, relativement aux puissances négatives de t .

Il suit de ces définitions, que u étant la fonction génératrice de y_x , celle de y_{x+r} , est $\frac{u}{t^r}$; car il est visible que le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^r}$ est égal à celui de t^{x+r} dans u ; par conséquent il est égal à y_{x+r} .

Le coefficient de t^x dans $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ est donc égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à la différence des deux quantités consécutives y_{x+1} et y_x , différence que nous désignerons par $\Delta.y_x$, Δ étant la caractéristique des différences finies. On a donc la fonction génératrice de la diffé-

rence finie d'une quantité variable, en multipliant par $\frac{1}{t} - 1$, la fonction génératrice de la quantité elle-même. La fonction génératrice de la différence finie de $\Delta \cdot y_x$, différence que l'on désigne par $\Delta^2 \cdot y_x$, est ainsi $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$; celle de la différence finie de $\Delta^2 \cdot y_x$ ou $\Delta^3 \cdot y_x$, est $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^3$; d'où l'on peut généralement conclure que la fonction génératrice de la différence finie $\Delta^i \cdot y_x$ est $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$.

Pareillement, le coefficient de t^x dans le développement de

$$u \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \dots \dots + \frac{q}{t^n}\right)$$

est

$$a \cdot y_x + b \cdot y_{x+1} + c \cdot y_{x+2} + e \cdot y_{x+3} \dots \dots + q \cdot y_{x+n};$$

en nommant donc $\nabla \cdot y_x$ cette quantité, sa fonction génératrice sera

$$u \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots \dots + \frac{q}{t^n}\right).$$

Si l'on nomme $\nabla^2 \cdot y_x$ ce que devient $\nabla \cdot y_x$ lorsqu'on y change y_x dans $\nabla \cdot y_x$; si l'on nomme pareillement $\nabla^3 \cdot y_x$ ce que devient $\nabla^2 \cdot y_x$ lorsqu'on y change $\nabla \cdot y_x$ dans $\nabla^2 \cdot y_x$, et ainsi de suite; leurs fonctions génératrices correspondantes seront

$$u \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots \dots + \frac{q}{t^n}\right)^2;$$

$$u \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots \dots + \frac{q}{t^n}\right)^3;$$

etc.;

et généralement la fonction génératrice de $\nabla^i \cdot y_x$ sera

$$u \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots \dots + \frac{q}{t^n}\right)^i.$$

De là il est facile de conclure généralement que la fonction génératrice de $\Delta^i \cdot \nabla^r \cdot y_{x+r}$ est

$$\frac{u}{t^r} \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots \dots + \frac{q}{t^n}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i.$$

On peut généraliser encore ces résultats, en supposant que $\nabla \cdot y_x$

représente une fonction quelconque linéaire finie ou infinie, de y_x, y_{x+1}, y_{x+2} , etc.; que $\nabla^1.y_x$ soit ce que devient $\nabla.y_x$, lorsqu'on y change y_x dans $\nabla.y_x$; que $\nabla^3.y_x$ soit ce que devient $\nabla^2.y_x$, lorsqu'on y change $\nabla.y_x$ dans $\nabla^2.y_x$, et ainsi de suite; u étant la fonction génératrice de y_x , $u.s^i$ sera la fonction génératrice de $\nabla^i.y_x$, s étant ce que devient $\nabla.y_x$, lorsqu'on y change y_x dans l'unité, y_{x+1} dans $\frac{1}{t}$, y_{x+2} dans $\frac{1}{t^2}$, etc. Cela est encore vrai, lorsque i est un nombre négatif, ou même fractionnaire et incommensurable, en faisant toutefois à ce résultat, des modifications convenables.

Représentons par Σ la caractéristique des intégrales finies, et nommons z la fonction génératrice de $\Sigma^i.y_x$, u étant la fonction génératrice de y_x ; $z.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ sera par ce qui précède, la fonction génératrice de y_x . Mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives de t , se réduire à u qui ne renferme que des puissances positives de t , si l'on n'étend l'intégrale multiple $\Sigma^i.y_x$ qu'aux valeurs positives de x ; on aura donc alors

$$z.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} \dots \dots + \frac{F}{t^i};$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{u.t^i + A.t^{i-1} + B.t^{i-2} + C.t^{i-3} \dots \dots + F}{(1-t)^i},$$

$A, B, C \dots F$ étant des constantes arbitraires qui répondent aux i constantes arbitraires qu'introduisent les i intégrations successives de $\Sigma^i.y_x$.

En faisant abstraction de ces constantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i.y_x$ est $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-i}$; ensorte que l'on obtient cette fonction génératrice, en changeant i dans $-i$, dans la fonction génératrice de $\Delta^i.y_x$; $\Delta^{-i}.y_x$ est donc alors égale à $\Sigma^i.y_x$; c'est-à-dire que les différences négatives se changent en intégrales. Mais si l'on a égard aux constantes arbitraires, il faut, en passant des puissances positives de $\frac{1}{t} - 1$ à ses puissances négatives, augmenter u de la série $\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \text{etc.}$, prolongée jusqu'à ce que le nombre de ses

termes soit égal à l'exposant de ces puissances. On peut appliquer des considérations semblables, à la fonction génératrice de $\nabla^i . y_x$.

On voit par ce qui précède, de quelle manière les fonctions génératrices se forment de la loi des variables correspondantes. Voyons maintenant comment les variables se déduisent de leurs fonctions génératrices. s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, et que l'on désigne par k_{i^n} un terme quelconque de ce développement; le coefficient de t^x dans $\frac{ku}{t^n}$, sera $k . y_{x+n}$; on aura donc le coefficient de t^x dans $u . s^i$, coefficient que nous avons désigné précédemment par $\nabla^i . y_x$, 1°. en substituant dans $s . y_x$ au lieu de $\frac{1}{t}$; 2°. en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de y_x , et en transportant à l'indice x , l'exposant de la puissance de y_x ; c'est-à-dire, en écrivant y_{x+1} au lieu de $(y_x)^1$; y_{x+2} au lieu de $(y_x)^2$, etc.; et en multipliant les termes indépendans de y_x , et qui peuvent être censés avoir $(y_x)^0$ pour facteur, par y_x . Lorsque la caractéristique ∇ se change en Δ , s est, par ce qui précède, égal à $\frac{1}{t} - 1$; on a donc alors

$$\Delta^i . y_x = y_{x+i} - i . y_{x+i-1} + \frac{i . (i-1)}{1 . 2} . y_{x+i-2} - \text{etc.}$$

Si au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, et que l'on désigne par $k . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$, un terme quelconque de ce développement; le coefficient de t^x dans $ku . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ sera $k . \Delta^n . y_x$; on aura donc $\nabla^i . y_x$; 1° en substituant dans s , Δy_x au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, ou, ce qui revient au même, $1 + \Delta . y_x$ au lieu de $\frac{1}{t}$; 2°. en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de $\Delta . y_x$, et en appliquant à la caractéristique Δ , les exposans des puissances de $\Delta . y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\Delta . y_x$ au lieu de $(\Delta . y_x)^1$, $\Delta^2 . y_x$ au lieu de $(\Delta . y_x)^2$, etc.,

et en multipliant par $(\Delta.y_x)^\circ$, ou, ce qui est la même chose, par y_x les termes indépendans de $\Delta.y_x$.

Généralement, si l'on considère s comme une fonction de r , r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coefficient de t^x dans ur , soit $\square.y_x$; on aura $\nabla^i.y_x$, en substituant dans s , $\square.y_x$ au lieu de r ; en développant ensuite s^i suivant les puissances de $\square.y_x$, et en appliquant à la caractéristique $\square$, les exposans de $\square.y_x$, c'est-à-dire, en écrivant $\square.y_x$ au lieu de $(\square.y_x)$, $\square^2.y_x$ au lieu de $(\square.y_x)^2$, etc.; et en multipliant par y_x les termes indépendans de $\square.y_x$.

Le développement de $\nabla^i.y_x$ par une série ordonnée suivant les variations successives $\square.y_x$, $\square^2.y_x$, etc., se réduit donc à la formation de la fonction génératrice de y_x , au développement de cette fonction, suivant les puissances d'une fonction donnée; enfin, au retour de la fonction génératrice ainsi développée, aux coefficients variables correspondans; les exposans des puissances du développement de la fonction génératrice, devenant ceux de la caractéristique de ces coefficients. On voit ainsi l'analogie des puissances avec les différences, ou avec toute autre combinaison des coefficients variables consécutifs. Le passage de ces coefficients à leurs fonctions génératrices, et le retour de ces fonctions développées aux coefficients, constituent le *calcul des fonctions génératrices*. Les applications suivantes en feront connaître l'esprit et les avantages.

De l'interpolation des suites à une variable, et de l'intégration des équations différentielles linéaires.

5. Toute la théorie de l'interpolation des suites se réduit à déterminer, quel que soit i , la valeur de y_{x+i} , en fonction des termes qui précèdent ou qui suivent y_x . Pour cela, on doit observer que y_{x+i} est égal aux coefficients de t_{x+i} dans le développement de u , et par conséquent égal au coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u \cdot \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i = u \cdot \left\{ 1 + i \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \text{etc.} \right\}$$

De plus, le coefficient de t^x , dans le développement de u , est y_x ; ce coefficient dans le développement de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$, est $\Delta \cdot y_x$; dans le développement de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$, il est égal à $\Delta^2 \cdot y_x$, et ainsi de suite; l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x+i} = y_x + i \cdot \Delta \cdot y_x + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_x + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot y_x + \text{etc.}$$

Cette équation ayant lieu quel que soit i , en le supposant même fractionnaire, sert à interpoler les suites dont les différences successives vont en décroissant.

Si l'on a l'équation aux différences finies

$$\Delta^n \cdot y_x = 0;$$

la série précédente se termine, et l'on a, quel que soit i , en faisant x nul,

$$y_i = y_0 + i \cdot \Delta \cdot y_0 + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_0 + \dots + \frac{i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot (i-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} \cdot \Delta^{n-1} \cdot y_0.$$

C'est l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences, $y_0, \Delta \cdot y_0, \dots, \Delta^{n-1} \cdot y_0$ étant les n constantes arbitraires de cette intégrale.

Toutes les manières de développer la puissance $\frac{1}{t}$, donnent autant de manières différentes d'interpoler les suites. Soit, par exemple,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{a}{t^r};$$

en développant $\frac{1}{t^i}$ suivant les puissances de a , par la formule (p) du n° 21 du second livre de *la Mécanique céleste*, on aura

$$\frac{u}{t^i} = u \cdot \left\{ 1 + i \cdot a + \frac{i \cdot (i+2r-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^2 + \frac{i \cdot (i+3r-1) \cdot (i+3r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 \right. \\ \left. + \frac{i \cdot (i+4r-1) \cdot (i+4r-2) \cdot (i+4r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 + \text{etc.} \right\}.$$

a étant égal à $t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$, le coefficient de t^x dans le développement

de $u\alpha$ est, par le n° 2, $\Delta.y_{x-r}$; ce même coefficient dans $u.\alpha^2$ est $\Delta^2.y_{x-2r}$, et ainsi de suite. L'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x+i} = y_x + i.\Delta.y_{x-r} + \frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\Delta^2.y_{x-2r} \\ + \frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\Delta^3.y_{x-3r} + \text{etc.}$$

4. Voici maintenant une méthode générale d'interpolation, qui a l'avantage de s'appliquer, non-seulement aux séries dont les différences des termes finissent par être nulles, mais encore aux séries dont la dernière raison des termes est celle d'une suite quelconque récurrente.

Supposons d'abord que l'on ait

$$t.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n = z; \quad (1)$$

et cherchons la valeur de $\frac{1}{t^i}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z . Il est clair que $\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1 - \theta.\frac{1}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1 - \theta.t$, on aura celle-ci

$$\frac{1 - \theta.t}{1 - \theta.\left(\frac{1}{t} + t\right) + \theta^2}.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{1}{t} + t = 2 + z;$$

ce qui change la fraction précédente dans celle-ci,

$$\frac{1 - \theta.t}{(1 - \theta)^2 - z.\theta};$$

or on a

$$\frac{1}{(1 - \theta)^2 - z.\theta} = \frac{1}{(1 - \theta)^2} + \frac{z\theta}{(1 - \theta)^4} + \frac{z^2\theta^2}{(1 - \theta)^6} + \text{etc.};$$

d'ailleurs le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^r}$, est

$$\frac{s.(s+1).(s+2) \dots (s+r-1)}{1.2.3 \dots r},$$

d'où il suit que le coefficient de θ^i est, 1°. $i+1$, dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^2}$; 2°. $\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}$, dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^4}$; 3°. $\frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}$, dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1-\theta)^6}$, et ainsi du reste; donc si l'on nomme Z le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{(1-\theta)^2 - z.\theta};$$

on aura

$$Z = i+1 + \frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}.z + \frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}.z^2 + \frac{(i-2).(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3).(i+4)}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \text{etc.},$$

ou

$$Z = (i+1). \left\{ 1 + \frac{[(i+1)^2-1].z}{1.2.3} + \frac{[(i+1)^2-1].[i+1]^2-4].z^2}{1.2.3.4.5} + \text{etc.} \right\};$$

si l'on nomme ensuite Z' le coefficient de θ^i , dans le développement de

$$\frac{\theta}{(1-\theta)^2 - z.\theta};$$

on aura Z' en changeant i en $i-1$ dans Z , ce qui donne

$$Z' = i. \left\{ 1 + \frac{(i^2-1).z}{1.2.3} + \frac{(i^2-1).(i^2-4).z^2}{1.2.3.4.5} + \text{etc.} \right\};$$

on aura ainsi $Z - t.Z'$ pour le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction

$$\frac{1 - \theta.t}{(1-\theta)^2 - z\theta};$$

ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{u}$; partant

$$\frac{u}{u'} = u.(Z - t.Z').$$

Cela

Cela posé, le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^i}$, est y_{x+i} . Ce même coefficient, dans un terme quelconque de $u.Z$, tel que $k.u.z^r$, ou $k.u.t^r.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$ est, par le n°. 2, $k.\Delta^{2r}.y_{x-r}$. Dans un terme quelconque de $u.t.Z'$, tel que $k.u.t.z^r$ ou $k.u.t^{r+1}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$, ce coefficient est $k.\Delta^{2r}.y_{x-r-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$y_{x+i} = (i+1) \cdot \left\{ y_x + \frac{[(i+1)^2-1]}{1.2.3} \cdot \Delta^2.y_{x-1} \right. \\ \left. + \frac{[(i+1)^2-1].[i+1]^2-4]}{1.2.3.4.5} \cdot \Delta^4.y_{x-2} + \text{etc.} \right\} \\ - i \cdot \left\{ y_{x-1} + \frac{(i^2-1)}{1.2.3} \cdot \Delta^2.y_{x-2} + \frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5} \cdot \Delta^4.y_{x-3} + \text{etc.} \right\}.$$

On peut donner les formes suivantes à l'expression précédente. Soit Z'' ce que devient Z' lorsqu'on y change i dans $i-1$; et par conséquent, ce que devient Z lorsqu'on y change i dans $i-2$. L'équation

$$\frac{1}{t^i} = Z - t.Z'$$

donnera

$$\frac{1}{t^{i-1}} = Z' - t.Z'';$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t^i} = \frac{Z'}{t} - Z''.$$

En ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{t^i}$, et prenant la moitié de leur somme, on aura

$$\frac{1}{t^i} = \frac{1}{2}.Z - \frac{1}{2}.Z'' + \frac{1}{2} \cdot (1+t) \cdot \left(\frac{1}{t}-1\right).Z';$$

or on a

$$\frac{1}{2}.Z - \frac{1}{2}.Z'' = 1 + \frac{i^2}{1.2}.z + \frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4}.z^2 + \frac{i^2.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}.z^3 + \text{etc.}$$

partant

$$\frac{u}{t^i} = u \cdot \left\{ 1 + \frac{i^2}{1.2} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t}-1\right) + \frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4} \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \text{etc.} \right\} \\ + \frac{i}{2} \cdot u \cdot (1+t) \cdot \left\{ \frac{1}{t} - 1 + \frac{(i^2-1)}{1.2.3} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t}-1\right) \right. \\ \left. + \frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5} \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \text{etc.} \right\};$$

d'où l'on conclut, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\begin{aligned}
 y_{x+i} = y_x + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-1} + \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-2} \\
 + \frac{i^2 \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \Delta^6 \cdot y_{x-3} + \text{etc.} \\
 + \frac{i}{2} \cdot (\Delta \cdot y_x + \Delta \cdot y_{x-1}) + \frac{i}{2} \cdot \frac{(i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\Delta^3 \cdot y_{x-1} + \Delta^3 \cdot y_{x-2}) \\
 + \frac{i}{2} \cdot \frac{(i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot (\Delta^5 \cdot y_{x-2} + \Delta^5 \cdot y_{x-3}) + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre impair $2x+1$ de quantités équidistantes; l'intervalle commun qui les sépare étant pris pour unité, y_x est la moyenne des grandeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2x}$; et i est la distance de y_{x+i} à cette moyenne. L'expression précédente est alors symétrique relativement à ces grandeurs; car $\Delta^2 \cdot y_{x-1}$, par exemple, est égal à $y_{x+1} - 2y_x + y_{x-1}$, et $\Delta \cdot y_x + \Delta \cdot y_{x-1}$ est égal à $y_{x+1} - y_{x-1}$. Ainsi les quantités placées au-dessus et au-dessous de la moyenne y_x , entrent de la même manière dans cette expression.

Si l'on change i en $i+1$ dans la dernière expression de $\frac{u}{t^i}$, et si l'on en retranche cette expression elle-même; on aura l'expression de $\frac{u}{t^{i+1}} - \frac{u}{t^i}$, ou de $\frac{u}{t^i} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$; en divisant ensuite cette valeur par $\frac{1}{t} - 1$, on aura

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{t^i} = \frac{u}{2} \cdot (1+t) \cdot \left\{ 1 + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]}{1 \cdot 2} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \right. \\
 \left. + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] \cdot [(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 + \text{etc.} \right\} \\
 + (i+\frac{1}{2}) \cdot u \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right) \cdot \left\{ 1 + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \right. \\
 \left. + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] \cdot [(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 + \text{etc.} \right\}.
 \end{aligned}$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$\begin{aligned}
y_{x+i} = & \frac{1}{2} \cdot (y_x + y_{x-1}) + \frac{[(i + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta^2 \cdot y_{x-1} + \Delta^2 \cdot y_{x-2}) \\
& + \frac{[(i + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] \cdot [(i + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\Delta^4 \cdot y_{x-2} + \Delta^4 \cdot y_{x-3}) + \text{etc.} \\
& + (i + \frac{1}{2}) \cdot \left\{ \Delta \cdot y_{x-1} + \frac{[(i + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot y_{x-2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{[(i + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] \cdot [(i + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \Delta^5 \cdot y_{x-3} + \text{etc.} \right\}.
\end{aligned}$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre pair $2x$ de quantités équidistantes, y_{x-1} et y_{x+1} étant les deux quantités moyennes. Elle est disposée d'une manière symétrique relativement aux quantités également distantes du milieu de l'intervalle qui sépare les quantités extrêmes : ce milieu est l'origine des valeurs de $i + \frac{1}{2}$, qui sont positives au-dessus, et négatives au-dessous.

Toutes ces expressions de y_{x+i} sont identiques, et telles que si l'on conçoit une courbe parabolique dont i soit l'abscisse, et y_{x+i} l'ordonnée, et dont l'équation soit celle qui donne l'expression de y_{x+i} ; cette courbe passera par les extrémités des ordonnées y_x, y_{x+1}, y_{x+2} , etc.; y_{x-1}, y_{x-2} , etc. On peut ainsi, en prenant les différences finies successives d'un nombre quelconque de coordonnées, faire passer une courbe parabolique par les extrémités de ces coordonnées.

5. Supposons généralement

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \dots \dots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n}; \quad (a)$$

on aura

$$\frac{1}{t^n} = \frac{z-a}{q} - \frac{b}{qt} - \frac{c}{qt^2} \dots \dots - \frac{p}{qt^{n-1}};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^{n+1}} = \frac{z-a}{qt} - \frac{b}{qt^2} - \frac{c}{qt^3} \dots \dots - \frac{p}{qt^n};$$

éliminant $\frac{1}{t^n}$ du second membre de cette équation, au moyen de la proposée (a), on aura

$$\frac{1}{t^{n+1}} = -\frac{p \cdot (z-a)}{q^2} + \frac{pb + q \cdot (z-a)}{q^2 \cdot t} + \text{etc.}$$

Cette expression de $\frac{1}{t^{n+1}}$ ne renferme que des puissances de $\frac{1}{t}$ d'un ordre inférieur à n . En la multipliant par $\frac{1}{t}$, on aura une expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$, qui renfermera la puissance $\frac{1}{t^n}$; mais en éliminant encore cette puissance, au moyen de la proposée (a), on réduira l'expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$ à ne contenir que des puissances de $\frac{1}{t}$ inférieures à n . En continuant ainsi, on parviendra à une expression de $\frac{1}{t^i}$, qui ne renfermera que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n , et qui sera par conséquent de cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t} \cdot Z^{(1)} + \frac{1}{t^2} \cdot Z^{(2)} + \dots + \frac{1}{t^{n-1}} \cdot Z^{(n)},$$

Z , $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, etc. étant des fonctions rationnelles et entières de z , dans lesquelles la plus haute puissance de z ne surpasse pas $\frac{i}{n}$.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{t^i}$ serait très-pénible, si i était un grand nombre; elle conduirait d'ailleurs difficilement à l'expression générale de cette quantité. On y parviendra directement de la manière suivante.

$\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1 - \frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par

$$(a - z) \cdot \theta^n + b \cdot \theta^{n-1} + c \cdot \theta^{n-2} + \dots + p \cdot \theta + q;$$

et si dans le numérateur on substitue au lieu de z , sa valeur $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \text{etc.}$, on aura

$$\frac{b \cdot \theta^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{\theta}{t}\right) + c \cdot \theta^{n-2} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{t^2}\right) + e \cdot \theta^{n-3} \cdot \left(1 - \frac{\theta^3}{t^3}\right) + \dots + q \cdot \left(1 - \frac{\theta^n}{t^n}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{t}\right) \cdot (a \cdot \theta^n + b \cdot \theta^{n-1} + c \cdot \theta^{n-2} + \dots + p \cdot \theta + q - z \cdot \theta^n)};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction

par $1 - \frac{\theta}{t}$, elle devient

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} + e.\theta^{n-3} \dots + q \\ + \frac{\theta}{t} . (c.\theta^{n-2} + e.\theta^{n-3} \dots \dots \dots + q) \\ + \frac{\theta^2}{t^2} . (e.\theta^{n-3} \dots \dots \dots + q) \\ + \text{etc.} \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t^{n-1}} . q \end{array} \right\}}{a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \dots \dots + p.\theta + q - z.\theta^n}.$$

La recherche du coefficient de θ^i dans le développement de cette fraction, se réduit à déterminer, quel que soit r , le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \dots \dots + p.\theta + q - z.\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions rationnelles et entières de θ , la première étant d'un ordre inférieur à la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - \alpha$ élevé à la puissance s , ensorte que l'on ait

$$Q = (\theta - \alpha)^s . R,$$

R étant une fonction rationnelle et entière de θ . On pourra décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{B}{R}$, A et B étant des fonctions rationnelles et entières de θ ; la première, de l'ordre $s-1$, et la seconde, d'un ordre inférieur à R ; car il est visible qu'en substituant pour A et B , des fonctions de cette nature, avec des coefficients indéterminés; en réduisant ensuite les deux fractions au même dénominateur, qui devient alors égal à Q ; en égalant enfin la somme de leurs numérateurs à P ; la comparaison des puissances semblables de θ , donnera autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. Cela posé, l'équation

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\theta - \alpha)^s . R}$$

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B \cdot (\theta - \alpha)^s}{R}.$$

Si l'on considère A , B , P et R comme des fonctions rationnelles et entières de $\theta - \alpha$, A sera une fonction de l'ordre $s - 1$, et par conséquent il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\theta - \alpha$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s - 1$ inclusivement. Soit donc

$$\frac{P}{R} = u_0 + u_1 \cdot (\theta - \alpha) + u_2 \cdot (\theta - \alpha)^2 + \text{etc.};$$

on aura

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} = \frac{u_0}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{u_1}{(\theta - \alpha)^{s-1}} + \frac{u_2}{(\theta - \alpha)^{s-2}} + \text{etc.};$$

en rejetant les puissances négatives de $\theta - \alpha$; $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ est, par conséquent, égal au coefficient de t^{-1} dans le développement de la fonction

$$\frac{u_0 + u_1 \cdot t + u_2 \cdot t^2 + \text{etc.}}{\theta - \alpha - t}.$$

Si l'on nomme P' et R' ce que deviennent P et R lorsqu'on y change $\theta - \alpha$ en t , ou, ce qui revient au même, θ en $t + \alpha$; on aura

$$\frac{P'}{R'} = u_0 + u_1 \cdot t + u_2 \cdot t^2 + \text{etc.};$$

partant $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ est égal au coefficient de t^{-1} dans le développement de

$$\frac{P'}{R' \cdot (\theta - \alpha - t)};$$

il est donc égal à

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (s-1)} \cdot d^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' \cdot (\theta - \alpha - t)},$$

pourvu que l'on suppose t nul après les différentiations. Maintenant, le coefficient de θ^r dans

$$\frac{P'}{R' \cdot (\theta - \alpha - t)}$$

étant égal à

$$-\frac{P'}{R' \cdot (a+t)^{r+1}},$$

ce même coefficient dans

$$\frac{1}{1.2.3.\dots.(s-1) \cdot d^{s-1}} \cdot d^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' \cdot (\theta - a - t)}$$

sera

$$-\frac{1}{1.2.3.\dots.(s-1) \cdot d^{s-1}} \cdot d^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' \cdot (a+t)^{r+1}},$$

t étant supposé nul après les différentiations; cette dernière quantité est donc le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{A}{(\theta - a)^r}$.

Si l'on restitue dans P' et R' , $\theta - a$ au lieu de t , ce qui les change en P et R , on aura

$$\frac{d^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' \cdot (a+t)^{r+1}}}{d^{s-1}} = \frac{d^{s-1} \cdot \frac{P}{R \cdot \theta^{r+1}}}{d^{s-1}},$$

pourvu que l'on suppose $\theta = a$, après les différentiations dans le second membre de cette équation; la fonction

$$-\frac{1}{1.2.3.\dots.(s-1)} \cdot \frac{d^{s-1} \cdot \frac{P}{R \cdot \theta^{r+1}}}{d^{s-1}}$$

est donc, avec cette condition, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta - a)^r}$.

Il suit de là que si l'on suppose

$$Q = a \cdot (\theta - a)^r \cdot (\theta - a')^r \cdot (\theta - a'')^r \cdot \text{etc.},$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$, sera

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1.2.3.\dots.(s-1) \cdot d^{s-1}} \cdot d^{s-1} \cdot \left(\frac{P}{a^{s^{r+1}} \cdot (\theta - a')^r \cdot (\theta - a'')^r \cdot \text{etc.}} \right) \\ & -\frac{1}{1.2.3.\dots.(s'-1) \cdot d^{s'-1}} \cdot d^{s'-1} \cdot \left(\frac{P}{a^{s'^{r+1}} \cdot (\theta - a)^r \cdot (\theta - a'')^r \cdot \text{etc.}} \right) \\ & -\frac{1}{1.2.3.\dots.(s''-1) \cdot d^{s''-1}} \cdot d^{s''-1} \cdot \left(\frac{P}{a^{s''^{r+1}} \cdot (\theta - a)^r \cdot (\theta - a')^r \cdot \text{etc.}} \right) \\ & - \text{etc.}, \end{aligned}$$

en faisant $\theta = \alpha$ dans le premier terme; $\theta = \alpha'$ dans le second terme; $\theta = \alpha''$ dans le troisième terme, et ainsi de suite.

Maintenant, soit

$$\mathcal{V} = \alpha.(\theta - \alpha).(\theta - \alpha').(\theta - \alpha'').\text{etc.}$$

En développant la fraction

$$\frac{1}{\mathcal{V} - z. \theta^n}$$

dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z , on aura

$$\frac{1}{\mathcal{V}} + \frac{z. \theta^n}{\mathcal{V}^2} + \frac{z^2. \theta^{2n}}{\mathcal{V}^3} + \frac{z^3. \theta^{3n}}{\mathcal{V}^4} + \text{etc.}$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{\mathcal{V}^s}$ est, par ce qui précède, égal à

$$-\frac{1}{1.2.3\dots(s-1).a^s.d^{\theta^{s-1}}}.d^{s-1}.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha'')^s.\text{etc.}}\\+\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha'')^s.\text{etc.}}\\+\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha')^s.\text{etc.}}\\+\text{etc.}\end{array}\right\}; \quad (o)$$

pourvu qu'après les différentiations, on suppose $\theta = \alpha$ dans le premier terme; $\theta = \alpha'$ dans le second terme; $\theta = \alpha''$ dans le troisième terme, etc. S'il n'y a qu'un seul facteur $\theta - \alpha$, la fonction renfermée entre les deux parenthèses, se réduit à $\frac{1}{\theta^{r+1}}$, θ devant être changé en α après les différentiations, ce qui réduit la quantité (o) à

$$(-1)^s.\frac{(r+1).(r+2).(r+3)\dots(r+s-1)}{1.2.3\dots(s-1).a^s}.\frac{1}{a^{r+s}}.$$

Si dans l'expression de $\mathcal{V}$, quelques-uns des facteurs $\theta - \alpha$, $\theta - \alpha'$, etc., sont élevés à des puissances plus hautes que l'unité; par exemple, si $\theta - \alpha$ est élevé à la puissance m ; il sera élevé à la puissance $-ms$ dans $\frac{1}{\mathcal{V}^s}$; et alors il faut changer le premier terme

de

de la quantité (o) dans le suivant

$$= \frac{1}{1.2.3 \dots (ms-1).a^i} \cdot \frac{d^{ms-1}}{d\theta^{ms-1}} \cdot \frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^i.(\theta-\alpha'')^i \dots \text{etc.}};$$

et dans les autres termes, il faut changer $(\theta - \alpha)^i$, dans $(\theta - \alpha)^{m_i}$.

Représentons généralement par $Z_r^{(i-1)}$, la quantité (o); le coefficient de θ^i , dans le développement de la fraction $\frac{1}{V-\alpha.\theta^n}$, sera

$$Z_i^{(0)} + Z_{i-n}^{(1)}.z + Z_{i-2n}^{(2)}.z^2 + Z_{i-3n}^{(3)}.z^3 + \text{etc.};$$

on aura donc pour le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction (A)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^i} = & b. [Z_{i-n+1}^{(0)} + z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} + z^3.Z_{i-4n+1}^{(3)} + \text{etc.}] \\ & + c. [Z_{i-n+2}^{(0)} + z.Z_{i-2n+2}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+2}^{(2)} + z^3.Z_{i-4n+2}^{(3)} + \text{etc.}] \\ & + e. [Z_{i-n+3}^{(0)} + z.Z_{i-2n+3}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+3}^{(2)} + z^3.Z_{i-4n+3}^{(3)} + \text{etc.}] \\ & + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{t} \cdot \left\{ \begin{aligned} & c. [Z_{i-n+1}^{(0)} + z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.}] \\ & + e. [Z_{i-n+2}^{(0)} + z.Z_{i-2n+2}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+2}^{(2)} + \text{etc.}] \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\}; \quad (A) \\ & + \frac{1}{t^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} & e. [Z_{i-n+1}^{(0)} + z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.}] \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\ & + \text{etc.} \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{t^{n-1}} \cdot q. [Z_{i-n+1}^{(0)} + z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.}]. \end{aligned}$$

Présentement, si l'on désigne par $\nabla.y_x$ la quantité

$$a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} \dots + q.y_{x+n};$$

par $\nabla^1.y_x$, ce que devient $\nabla.y_x$ lorsqu'on y change y_x dans $\nabla.y_x$;
par $\nabla^2.y_x$, ce que devient $\nabla^1.y_x$ lorsqu'on y change $\nabla.y_x$ dans

$\nabla^r \cdot y_x$, et ainsi de suite. Il est visible, par le n° 2, que le coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u \cdot z^x}{t^r}$, sera $\nabla^r \cdot y_{x+r}$; en multipliant donc l'équation précédente par u , et en ne considérant dans chaque terme que le coefficient de t^x , c'est-à-dire, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients; on aura

$$\begin{aligned}
 y_{x+i} = & y_x \cdot [b \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + c \cdot Z_{i-n+2}^{(0)} + e \cdot Z_{i-n+3}^{(0)} \dots + q \cdot Z_i^{(0)}] \\
 & + \nabla \cdot y_x \cdot [b \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} + c \cdot Z_{i-2n+2}^{(1)} + e \cdot Z_{i-2n+3}^{(1)} \dots + q \cdot Z_{i-n}^{(1)}] \\
 & + \nabla^2 \cdot y_x \cdot [b \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} + c \cdot Z_{i-3n+2}^{(2)} + e \cdot Z_{i-3n+3}^{(2)} \dots + q \cdot Z_{i-2n}^{(2)}] \\
 & + \text{etc.} \\
 & + y_{x+1} \cdot [c \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + e \cdot Z_{i-n+2}^{(0)} \dots + q \cdot Z_{i-1}^{(0)}] \\
 & + \nabla \cdot y_{x+1} \cdot [c \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} + e \cdot Z_{i-2n+2}^{(1)} \dots + q \cdot Z_{i-n-1}^{(1)}]; \quad (B) \\
 & + \text{etc.} \\
 & + y_{x+2} \cdot [e \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \dots + q \cdot Z_{i-2}^{(0)}] \\
 & + \nabla \cdot y_{x+2} \cdot [e \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \dots + q \cdot Z_{i-n-2}^{(1)}] \\
 & + \text{etc.} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + q \cdot y_{x+n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + q \cdot \nabla \cdot y_{x+n-1} \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} + q \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+n-1} \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente; car il est clair que dans ce cas, $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 \cdot y_x$, etc. vont toujours en diminuant, et finissent par être nuls dans l'infini.

6. La formule (B) s'arrête lorsque l'on a $\nabla^r \cdot y_x = 0$, r étant un nombre entier positif quelconque; et alors l'expression précédente de y_{x+i} devient l'intégrale de l'équation aux différences finies $\nabla^r \cdot y_i = 0$; ce qui est analogue à ce qu'on a vu dans le n° 3. Relativement à l'équation $\Delta^r \cdot y_i = 0$, supposons $\nabla \cdot y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = a \cdot y_i + b \cdot y_{i+1} + c \cdot y_{i+2} \dots + q \cdot y_{i+n};$$

si l'on fait x nul, dans la formule (B) du n° précédent, elle

devient

$$\begin{aligned} y_i = & y_0 \cdot [b \cdot Z_{i-n+1}^{(c)} + c \cdot Z_{i-n+2}^{(c)} + e \cdot Z_{i-n+3}^{(c)} \dots + q \cdot Z_i^{(c)}] \\ & + y_1 \cdot [c \cdot Z_{i-n+1}^{(c)} + e \cdot Z_{i-n+2}^{(c)} \dots \dots \dots + q \cdot Z_{i-1}^{(c)}] \\ & + y_2 \cdot [e \cdot Z_{i-n+1}^{(c)} \dots \dots \dots + q \cdot Z_{i-2}^{(c)}] \\ & \dots \dots \dots \\ & + q \cdot y_{n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(c)}, \end{aligned}$$

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sont les n premières valeurs de y_i ; ce sont les n constantes arbitraires que l'intégrale de l'équation $\nabla \cdot y_i = 0$ introduit.

La valeur de $Z_{i-n+1}^{(c)}$ est égale à

$$-\frac{1}{a \cdot \alpha^{i-n+2} \cdot (\alpha - \alpha') \cdot (\alpha - \alpha'') \dots \text{etc.}} - \frac{1}{a \cdot \alpha'^{i-n+2} \cdot (\alpha' - \alpha) \cdot (\alpha' - \alpha'') \dots \text{etc.}} - \text{etc.}$$

Ainsi $\mathcal{V}$ étant égal à $a \cdot (\theta - \alpha) \cdot (\theta - \alpha') \cdot (\theta - \alpha'') \dots \text{etc.}$; le premier de ces termes devient

$$-\frac{\alpha^{n-2}}{\alpha^i \cdot \frac{d\mathcal{V}}{d\alpha}},$$

pourvu que l'on change θ en α dans $\frac{d\mathcal{V}}{d\theta}$; en n'ayant donc égard qu'au terme multiplié par $\frac{1}{\alpha^i}$, l'expression précédente de y_i deviendra

$$y_i = -\frac{1}{\alpha^{i+1} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{d\alpha}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & y_0 \cdot (b \cdot \alpha^{n-1} + c \cdot \alpha^{n-2} + e \cdot \alpha^{n-3} \dots + q) \\ & + y_1 \cdot (c \cdot \alpha^{n-1} + e \cdot \alpha^{n-2} \dots + q \cdot \alpha) \\ & + y_2 \cdot (e \cdot \alpha^{n-1} \dots + q \cdot \alpha^2) \\ & \dots \dots \dots \\ & + y_{n-1} \cdot q \cdot \alpha^{n-1} \end{aligned} \right\}.$$

En changeant successivement dans le second membre de cette équation, α en α' , α'' , etc., et réciproquement; on aura autant de termes qui ajoutés au précédent, formeront l'expression complète de y_i .

Nommons k la fonction qui dans le premier terme, multiplie $\frac{1}{\alpha^i}$, ensuite que ce terme soit $\frac{k}{\alpha^i}$. Si deux racines α et α' sont égales, Q sera de cette forme $(\theta - \alpha)^2 \cdot L$. On supposera que α et α' , au

Cette fonction est donc la fonction génératrice de y_i ou de la variable principale de l'équation aux différences $\nabla \cdot y_i = 0$. La formule (B) du n° précédent, donnera pareillement la valeur de y_i , ou l'intégrale complète de l'équation aux différences $\nabla^3 \cdot y_i = 0$: $y_0, \nabla \cdot y_0; y_1, \nabla \cdot y_1; \dots, y_{n-1}, \nabla \cdot y_{n-1}$ seront les $2n$ arbitraires de cette intégrale. Le cas des racines égales se résoudra de la même manière que ci-dessus. On aura par la même formule, l'intégrale des équations aux différences $\nabla^3 \cdot y_i = 0$, $\nabla^4 \cdot y_i = 0$, etc., ce qui montre l'analogie qui existe entre l'interpolation des suites et l'intégration des équations aux différences.

Soit $y_i = y'_i + y''_i$, et supposons que u' soit la fonction génératrice de y'_i , et u'' celle de y''_i , u étant celle de y_i ; on aura $u = u' + u''$. Soit encore

$$u'' = \frac{\lambda}{z^i},$$

z ayant la signification que nous lui avons donnée dans le n° 5; et nommons X_i le coefficient de t^i dans le développement de λ ; on aura par le n° 2,

$$X_i = \nabla^i \cdot y''_i.$$

Maintenant on a, par le n° 5,

$$\frac{1}{z^i} = \frac{t^{ni}}{(a \cdot t^n + b \cdot t^{n-1} + c \cdot t^{n-2} + \dots + q)^i};$$

or le coefficient de t^i , dans le développement du second membre de cette équation, est égal à celui de θ^{i-ni} dans le développement de

$$\frac{1}{(a \cdot \theta^n + b \cdot \theta^{n-1} + c \cdot \theta^{n-2} + \dots + q)^i};$$

et par le n° précédent, ce coefficient est égal à $Z_{i-ni}^{(i-1)}$; donc le coefficient de t^i dans le développement de $\frac{\lambda}{z^i}$, sera

$$X_{i-ni} \cdot Z_0^{(i-1)} + X_{i-ni-1} \cdot Z_1^{(i-1)} + X_{i-ni-2} \cdot Z_2^{(i-1)} + \dots + X_0 \cdot Z_{i-ni}^{(i-1)},$$

ou $\Sigma \cdot X_r \cdot Z_{i-ni-r}^{(i-1)}$, l'intégrale étant prise relativement à r , depuis $r=0$

jusqu'à $r = i - ns + 1$; ce sera la valeur de y_i'' . Cela posé, si dans la formule (B) du n° précédent, on suppose $\nabla' . y_i = 0$; elle donnera, en observant que $y_i = y_i' + y_i''$,

$$\begin{aligned}
 y_i' + \Sigma . X_r . Z_{i-nr-r}^{(s-1)} &= y_0 . [b . Z_{i-n+1}^{(0)} + c . Z_{i-n+2}^{(0)} + q . Z_i^{(0)}] \\
 &+ \nabla . y_0 . [b . Z_{i-2n+1}^{(1)} + c . Z_{i-2n+2}^{(1)} + q . Z_{i-n}^{(1)}] \\
 & \\
 &+ \nabla^{s-1} . y_0 . [b . Z_{i-in+1}^{(s-1)} + c . Z_{i-in+2}^{(s-1)} + q . Z_{i-in+n}^{(s-1)}] \\
 &+ y_1 . [c . Z_{i-n+1}^{(0)} + q . Z_{i-1}^{(0)}] \\
 &+ \nabla . y_1 . [c . Z_{i-2n+1}^{(1)} + q . Z_{i-n-1}^{(1)}]; \quad (C) \\
 & \\
 &+ \nabla^{s-1} . y_1 . [c . Z_{i-in+1}^{(s-1)} + q . Z_{i-in+n-1}^{(s-1)}] \\
 & \\
 &+ q . Z_{i-n+1}^{(0)} . y_{n-1} + q . Z_{i-2n+1}^{(1)} . \nabla . y_{n-1} \\
 & + q . Z_{i-in+1}^{(s-1)} . \nabla^{s-1} . y_{n-1}
 \end{aligned}$$

$y_0, \nabla . y_0, \dots \nabla^{s-1} . y_0; y_1, \nabla . y_1$, etc. étant les ns arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla' . y_i = 0$, ou

$$\nabla' . y_i' + \nabla' . y_i'' = 0;$$

or $\nabla' . y_i''$ étant égale à X_i , cette équation devient

$$0 = \nabla' . y_i' + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale des équations linéaires aux différences finies dont les coefficients sont constans, dans le cas où elles ont un dernier terme fonction de i .

L'intégrale définie, relative à $r \Sigma . X_r . Z_{i-nr-r}^{(s-1)}$, peut être facilement transformée dans une suite d'intégrales indéfinies, relatives à i ; car l'expression générale de $Z_{i-nr-r}^{(s-1)}$ est formée de ns termes de la forme $I . r^\mu . \alpha'$, I étant une fonction de i indépendante de la variable r ; l'intégrale précédente est donc composée d'intégrales de la forme $I . \Sigma r^\mu . \alpha' . X_r$; cette dernière intégrale devant être prise depuis r nul

jusqu'à $r = i - ns + 1$, elle est égale à l'intégrale indéfinie

$$I. \Sigma (i - ns + 1)^{\mu} . \alpha^{i - ns + 1} . X_{i - ns + 1},$$

prise depuis $i = ns - 1$.

7. On peut donner à l'expression de $\frac{1}{t^i}$ une infinité d'autres formes dont plusieurs peuvent être utiles. Donnons-lui, par exemple, cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z^{(0)} + \left(\frac{1}{t} - 1\right).Z^{(1)} + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2.Z^{(2)} \dots + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}.Z^{(n-1)}.$$

On déterminera ainsi les valeurs de $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, etc. On mettra d'abord l'équation

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots + \frac{q}{t^n}$$

sous cette forme, en y substituant $\left(\frac{1}{t} - 1 + 1\right)$ au lieu de $\frac{1}{t}$, et développant suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$,

$$z = a' + b'.\left(\frac{1}{t} - 1\right) + c'.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \dots + q.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n,$$

et l'on aura

$$a' = a + b + c \dots + q$$

$$b' = b + 2c + 3e \dots + nq$$

$$c' = c + 3e \dots + \frac{n.(n-1)}{1,2}.q$$

etc.

On multipliera ensuite, comme précédemment, le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1-\theta}$ par

$$(a - z).\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \dots + p.\theta + q,$$

en observant de substituer dans le numérateur, 1°. au lieu de z ,

$$a' + b'.\left(\frac{1}{t} - 1\right) + c'.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \text{etc.}$$

2°. Au lieu de $a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} + \text{etc.}$, la quantité

$$\theta^n. \left[a' + b'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + c'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \text{etc.} \right];$$

si l'on fait de plus pour abréger,

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{1}{t'};$$

on aura

$$\frac{b'.\theta^{n-1}.\left(1 - \theta - \frac{\theta}{t'}\right) + c'.\theta^{n-2}.\left((1 - \theta)^2 - \frac{\theta^2}{t'^2}\right) + \dots + q.\left((1 - \theta)^n - \frac{\theta^n}{t'^n}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{t}\right).(a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} + \dots + p.\theta + q - z.\theta^n)}$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente, par $1 - \frac{\theta}{t}$, elle se réduit à celle-ci,

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \theta^{n-1}.\left[b' + c'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + e'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \dots + q.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^{n-1}\right] \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'}.\left[c' + e'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \dots + q.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^{n-2}\right] \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'^2}.\left[e' + \dots + q.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^{n-3}\right] \\ \dots \dots \dots \\ + \frac{q.\theta^{n-1}}{t'^{n-1}} \end{array} \right\}}{a.\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} + \dots + p.\theta + q - z.\theta^n}$$

De là il est aisé de conclure que si l'on conserve à $Z_r^{(r-1)}$, la même signification que nous lui avons donnée dans le n° 5, et que l'on considère qu'en désignant par q_i le coefficient de θ^i dans le développement d'une fonction quelconque de θ , ce même coefficient dans le développement de cette fonction multipliée par $\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^\mu$, sera par le n° 2, égal à $\Delta^\mu.q_i$; on aura

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i} = & b'.Z_{i-n+1}^{(0)} + b'.z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + b'.z^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.} \\
& + c'.\Delta.Z_{i-n+1}^{(0)} + c'.z.\Delta.Z_{i-2n+1}^{(1)} + c'.z^2.\Delta.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.} \\
& + e'.\Delta^2.Z_{i-n+1}^{(0)} + e'.z.\Delta^2.Z_{i-2n+1}^{(1)} + e'.z^2.\Delta^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.} \\
& \dots \dots \dots \\
& + q.\Delta^{n-1}.Z_{i-n+1}^{(0)} + q.z.\Delta^{n-1}.Z_{i-2n+1}^{(1)} + q.z^2.\Delta^{n-1}.Z_{i-3n+1}^{(2)} + \text{etc.} \\
& + \frac{1}{i'} \cdot \left\{ \begin{array}{l} c'.Z_{i-n+1}^{(0)} + c'.z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + \text{etc.} \\ + e'.\Delta.Z_{i-n+1}^{(0)} + e'.z.\Delta.Z_{i-2n+1}^{(1)} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} \\
& + \frac{1}{i'^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e'.Z_{i-n+1}^{(0)} + e'.z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} \\
& \dots \dots \dots \\
& + \frac{q}{i'^{n-1}} \cdot \{ Z_{i-n+1}^{(0)} + z.Z_{i-2n+1}^{(1)} + \text{etc.} \}.
\end{aligned}$$

Présentement, il est clair par le n° 2, que le coefficient de x^i dans le développement de la fonction $\frac{u.z^i}{i' r}$ est $\Delta'.\nabla^i.y_x$; l'équation précédente donnera donc, en multipliant ses deux membres par u , et repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\begin{aligned}
y_{x+i} = & y_x \cdot [b'.Z_{i-n+1}^{(0)} + c'.\Delta.Z_{i-n+1}^{(0)} + e'.\Delta^2.Z_{i-n+1}^{(0)} \dots + q.\Delta^{n-1}.Z_{i-n+1}^{(0)}] \\
& + \nabla.y_x \cdot [b'.Z_{i-2n+1}^{(1)} + c'.\Delta.Z_{i-2n+1}^{(1)} + e'.\Delta^2.Z_{i-2n+1}^{(1)} \dots + q.\Delta^{n-1}.Z_{i-2n+1}^{(1)}] \\
& + \nabla^2.y_x \cdot [b'.Z_{i-3n+1}^{(2)} + c'.\Delta.Z_{i-3n+1}^{(2)} + e'.\Delta^2.Z_{i-3n+1}^{(2)} \dots + q.\Delta^{n-1}.Z_{i-3n+1}^{(2)}] \\
& + \text{etc.} \\
& + \Delta.y_x \cdot [c'.Z_{i-n+1}^{(0)} + e'.\Delta.Z_{i-n+1}^{(0)} \dots \dots \dots + q.\Delta^{n-2}.Z_{i-n+1}^{(0)}] \\
& + \Delta.\nabla.y_x \cdot [c'.Z_{i-2n+1}^{(1)} + e'.\Delta.Z_{i-2n+1}^{(1)} \dots \dots \dots + q.\Delta^{n-2}.Z_{i-2n+1}^{(1)}] \\
& + \Delta.\nabla^2.y_x \cdot [c'.Z_{i-3n+1}^{(2)} + e'.\Delta.Z_{i-3n+1}^{(2)} \dots \dots \dots + q.\Delta^{n-2}.Z_{i-3n+1}^{(2)}] \\
& + \text{etc.} \\
& \dots \dots \dots \\
& + q.Z_{i-n+1}^{(0)}.\Delta^{n-1}.y_x + q.Z_{i-2n+1}^{(1)}.\Delta^{n-1}.\nabla.y_x + q.Z_{i-3n+1}^{(2)}.\Delta^{n-1}.\nabla^2.y_x + \text{etc.}
\end{aligned}$$

la caractéristique ∇ se rapportant à la variable x , et la caractéristique Δ se rapportant aux deux variables x et i .

8. Supposons dans la formule précédente, x et i infiniment grands, de manière que l'on ait

$$i = \frac{x'}{dx'}; \quad x = \frac{\varpi}{dx'};$$

y_{x+i} deviendra une fonction de $\varpi + x'$, fonction que nous désignerons par $\phi(\varpi + x')$. Supposons de plus

$$a' = a''; \quad b' = \frac{b''}{dx'}; \quad c' = \frac{c''}{dx'^2}; \dots q = \frac{q''}{dx'^n};$$

l'équation

$$0 = a' + b' \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + c' \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \text{etc.}$$

deviendra

$$0 = a'' + \frac{b''}{dx'} \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \frac{c''}{dx'^2} \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \dots + \frac{q''}{dx'^n} \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^n.$$

Cette dernière équation donne pour $\theta - 1$, n racines $f dx'$, $f' dx'$, $f'' dx'$, etc., et par conséquent pour θ , les n valeurs

$$\theta = 1 + f dx'; \quad \theta = 1 + f' dx'; \quad \theta = 1 + f'' dx'; \quad \text{etc.}$$

Maintenant si l'on suppose $\theta = 1 + h dx'$; on aura, i étant supposé infini,

$$\frac{1}{\theta^i} = \frac{1}{(1 + h dx')^i} = 1 - i \cdot h dx' + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot h^2 dx'^2 - \text{etc.} = e^{-h x'},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. D'ailleurs la quantité a est, par le n° précédent, égale à $a' - b' + c' - \text{etc.}$; et par conséquent égale à $a'' - \frac{b''}{dx'} \dots \pm \frac{q''}{dx'^n}$, valeur qui se réduit à son dernier terme, qui surpasse infiniment les autres; l'expression de $Z_r^{(i-1)}$ du n° 5 devient, en y changeant r dans $i - 1$,

$$Z_{i-1}^{(i-1)} = - \frac{dx'}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i-1) \cdot (\pm q'') \cdot d h^{i-1}} \cdot d^{i-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{-h x'}}{(h-f')^i \cdot (h-f'')^i \cdot \text{etc.}} \\ \frac{e^{-h x'}}{(h-f')^i \cdot (h-f'')^i \cdot \text{etc.}} \\ \frac{e^{-h x'}}{(h-f')^i \cdot (h-f'')^i \cdot \text{etc.}} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

la différence d^{i-1} étant prise en ne faisant varier que h , et en substituant après les différentiations, f au lieu de h dans le premier terme, f' au lieu de h dans le second terme, et ainsi de suite. Nommons $X^{(i-1)}.dx'$ la quantité précédente; on aura, à l'infiniment petit près, μ étant un nombre fini,

$$Z_{i+\mu}^{(i-1)} = Z_{i-1}^{(i-1)} = X^{(i-1)}.dx'.$$

D'ailleurs on a $y_x = \phi(\varpi)$; et la caractéristique Δ des différences finies doit se changer dans la caractéristique d des différences infiniment petites; ensorte que l'équation

$$\nabla.y_x = a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci

$$\nabla.y_x = a'' + \frac{b''}{dx'}.\Delta.y_x + \frac{c''}{dx'^2}.\Delta^2.y_x + \text{etc.}$$

devient, en y changeant dx' en $d\varpi$,

$$\nabla.y_x = a'' + b'' \cdot \frac{d.\phi(\varpi)}{d\varpi} + c'' \cdot \frac{d^2.\phi(\varpi)}{d\varpi^2} + \dots + q'' \cdot \frac{d^n.\phi(\varpi)}{d\varpi^n}.$$

L'expression de y_{x+i} trouvée dans le n° précédent, deviendra donc

$$\begin{aligned} \phi(\varpi+x') = & \phi(\varpi) \cdot \left(b'' \cdot X^{(0)} + c'' \cdot \frac{dX^{(0)}}{dx'} + e'' \cdot \frac{d^2X^{(0)}}{dx'^2} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-1}.X^{(0)}}{dx'^{n-1}} \right) \\ & + \nabla.\phi(\varpi) \cdot \left(b'' \cdot X^{(1)} + c'' \cdot \frac{dX^{(1)}}{dx'} + e'' \cdot \frac{d^2X^{(1)}}{dx'^2} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-1}.X^{(1)}}{dx'^{n-1}} \right) \\ & + \nabla^2.\phi(\varpi) \cdot \left(b'' \cdot X^{(2)} + c'' \cdot \frac{dX^{(2)}}{dx'} + e'' \cdot \frac{d^2X^{(2)}}{dx'^2} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-1}.X^{(2)}}{dx'^{n-1}} \right) \\ & + \text{etc.} \\ & + \frac{d.\phi(\varpi)}{d\varpi} \cdot \left(c'' \cdot X^{(0)} + e'' \cdot \frac{dX^{(0)}}{dx'} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-2}.X^{(0)}}{dx'^{n-2}} \right) \\ & + \frac{d.\nabla.\phi(\varpi)}{d\varpi} \cdot \left(c'' \cdot X^{(1)} + e'' \cdot \frac{dX^{(1)}}{dx'} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-2}.X^{(1)}}{dx'^{n-2}} \right) \\ & + \text{etc.} \\ & + \frac{d^2.\phi(\varpi)}{d\varpi^2} \cdot \left(e'' \cdot X^{(0)} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-3}.X^{(0)}}{dx'^{n-3}} \right) \\ & + \frac{d^2.\nabla.\phi(\varpi)}{d\varpi^2} \cdot \left(e'' \cdot X^{(1)} \dots + q'' \cdot \frac{d^{n-3}.X^{(1)}}{dx'^{n-3}} \right) \\ & + \text{etc.} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$+ q'' \cdot \frac{d^{n-1} \cdot \varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}} \cdot X^{(0)} + q'' \cdot \frac{d^{n-1} \cdot \nabla \cdot \varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}} \cdot X^{(1)} \\ + q'' \cdot \frac{d^{n-1} \cdot \nabla^2 \cdot \varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}} \cdot X^{(2)} + \text{etc.}$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une équation linéaire aux différences infiniment petites à coefficients constans.

Si l'on a

$$\nabla' \cdot \varphi(\varpi + x') = 0,$$

la formule se termine et donne la valeur de $\varphi(\varpi + x')$, ou l'intégrale de l'équation différentielle précédente; $\varphi(\varpi)$, $\frac{d \cdot \varphi(\varpi)}{d\varpi}$, etc.; $\nabla \cdot \varphi(\varpi)$, $\frac{d \cdot \nabla \cdot \varphi(\varpi)}{d\varpi}$, etc.; $\nabla^2 \cdot \varphi(\varpi)$, $\frac{d \cdot \nabla^2 \cdot \varphi(\varpi)}{d\varpi}$, etc. étant les ns arbitraires de l'intégrale.

Supposons que l'on ait l'équation différentielle

$$0 = \nabla' \cdot \varphi(\varpi + x') - V_{x'},$$

$V_{x'}$ étant une fonction donnée de x' ; il faut, par le n° 6, ajouter à l'expression précédente de $\varphi(\varpi + x')$, le terme $\int V_{x'} \cdot X_{x'-r}^{(s-1)} \cdot dr$, $X_{x'-r}^{(s-1)}$ étant la même fonction de x' que $X^{(s-1)}$. L'intégrale relative à r , doit être prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=x'$. Cette intégrale définie peut, par le numéro cité, être transformée en intégrales indéfinies relatives à x' .

De la transformation des suites.

9. La théorie des fonctions génératrices peut servir encore à transformer les suites en d'autres qui suivent une loi donnée. Considérons la suite infinie

$$y_0 + y_1 \cdot a + y_2 \cdot a^2 + \dots + y_x \cdot a^x + \text{etc.}; \quad (V)$$

et nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série infinie

$$y_0 + y_1 \cdot a t + y_2 \cdot a^2 t^2 + \dots + y_x \cdot a^x t^x + \text{etc.};$$

le coefficient de t^x dans le développement de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$,

sera égal à la somme de la suite proposée (V), prise depuis le terme y_x inclusivement, jusqu'à l'infini. Soit généralement z une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, et nommons $\Pi.y_x$ le coefficient de t^x dans uz .

Les coefficients de t^x dans $u.z^2$, $u.z^3$, etc. seront $\Pi^2.y_x$, $\Pi^3.y_x$, etc. Cela posé, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$ par $k - z$, et l'on prendra pour k ce que devient z

lorsqu'on y fait t égal à l'unité; $k - z$ sera divisible alors par $1 - \frac{1}{t}$. Soit

$$h + \frac{h^{(1)}}{t} + \frac{h^{(2)}}{t^2} + \frac{h^{(3)}}{t^3} + \text{etc.}$$

le quotient de cette division; on aura

$$\begin{aligned} \frac{u}{1 - \frac{1}{t}} &= \frac{u.h}{k} \cdot \left(1 + \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k^2} + \frac{z^3}{k^3} + \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{u.h^{(1)}}{kt} \cdot \left(1 + \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k^2} + \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{u.h^{(2)}}{kt^2} \cdot \left(1 + \frac{z}{k} + \frac{z^2}{k^2} + \text{etc.}\right) \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\begin{aligned} S.y_x \cdot a^x &= \frac{h.y_x \cdot a^x}{k} + \frac{h \cdot \Pi.(y_x \cdot a^x)}{k^2} + \frac{h \cdot \Pi^2.(y_x \cdot a^x)}{k^3} + \text{etc.} \\ &+ \frac{h^{(1)} \cdot y_{x+1} \cdot a^{x+1}}{k} + \frac{h^{(1)} \cdot \Pi.(y_{x+1} \cdot a^{x+1})}{k^2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{h^{(2)} \cdot y_{x+2} \cdot a^{x+2}}{k} + \frac{h^{(2)} \cdot \Pi.(y_{x+2} \cdot a^{x+2})}{k^2} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Le signe S désignant la somme des termes depuis x inclusivement, jusqu'à l'infini. Supposons maintenant

$$z = a + \frac{b}{at} + \frac{c}{a^2 t^2} + \frac{e}{a^3 t^3} + \text{etc.};$$

on aura

$$\Pi.(y_x.\alpha^x) = \alpha^x.(a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + e.y_{x+3} + \text{etc.})$$

En désignant par $\nabla.y_x$ la quantité $ay_x + by_{x+1} + \text{etc.}$; on aura

$$\Pi.(y_x.\alpha^x) = \alpha^x.\nabla.y_x;$$

et généralement on aura

$$\Pi^r.(y_x.\alpha^x) = \alpha^x.\nabla^r.y_x;$$

on a ensuite

$$k = a + \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \text{etc.};$$

ce qui donne

$$h = \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

$$h^{(1)} = \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

$$h^{(2)} = \frac{e}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

etc.;

on aura donc

$$\begin{aligned} S.y_x.\alpha^x &= \frac{\left(\frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \text{etc.}\right)}{k}.\alpha^x.\left(y_x + \frac{\nabla.y_x}{k} + \frac{\nabla^2.y_x}{k^2} + \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{\left(\frac{c}{\alpha} + \frac{e}{\alpha^2} + \text{etc.}\right)}{k}.\alpha^x.\left(y_{x+1} + \frac{\nabla.y_{x+1}}{k} + \frac{\nabla^2.y_{x+1}}{k^2} + \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{\left(\frac{e}{\alpha} + \text{etc.}\right)}{k}.\alpha^x.\left(y_{x+2} + \frac{\nabla.y_{x+2}}{k} + \frac{\nabla^2.y_{x+2}}{k^2} + \text{etc.}\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

En faisant $x=0$, on aura une transformée de la suite proposée, dont les termes suivront une autre loi; et si les quantités $\nabla.y_x$, $\nabla^2.y_x$, etc. vont en décroissant, cette suite sera convergente. Elle se terminera, toutes les fois que l'on aura $\nabla^r.y_x = 0$; ce qui aura lieu lorsque la proposée sera une suite récurrente. On aura donc ainsi la somme des suites récurrentes, à compter d'un terme quelconque $y_x.\alpha^x$, et par conséquent on aura aussi la somme de leurs termes, comprise entre deux termes quelconques $y_x.\alpha^x$ et $y_{x'}.\alpha^{x'}$.

*Théorèmes sur le développement des fonctions et de leurs différences ,
en séries.*

10. En appliquant à des fonctions particulières, les principes généraux exposés dans le n° 1, on aura une infinité de théorèmes sur le développement des fonctions, en séries. Nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n = u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n.$$

Or il est clair que le coefficient de t^x dans le premier membre de cette équation, est la différence $n^{ième}$ de y_x , x variant de i ; car ce coefficient dans $u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)$ est $y_{x+i}-y_x$ ou $'\Delta.y_x$, en désignant par la caractéristique $'\Delta$, les différences finies, lorsque x varie de la quantité i ; d'où il est facile de conclure que ce même coefficient, dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n$ est $'\Delta^n.y_x$. D'ailleurs si l'on développe $u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, les coefficients de t^x dans les développemens de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)$, $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$, etc. sont, par le n° 2, $\Delta.y_x$, $\Delta^2.y_x$, etc.; ensorte que ce coefficient, dans $u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$, est $[(1+\Delta.y_x)^i-1]^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité, on applique à la caractéristique Δ , les exposans de puissances de $\Delta.y_x$, et qu'ainsi au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta.y_x)^r$, on écrive $\Delta^r.y_x$; on aura donc avec cette condition,

$$' \Delta^n.y_x = [(1+\Delta.y_x)^i-1]^n; \quad (1)$$

Si l'on désigne par la caractéristique $'\Sigma$, l'intégrale finie, lorsque x varie de i ; $'\Sigma^n.y_x$ sera, par le n° 2, le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u.\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^{-n}$, en faisant abstraction

des constantes arbitraires que l'intégration introduit ; or on a

$$u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-n}=u.\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^{-n};$$

de plus, le coefficient de t^x dans $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-r}$ est $\Sigma^r.y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires ; ce coefficient dans $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^r$ est $\Delta^r.y_x$; on aura donc

$$'\Sigma^n.y_x=[(1+\Delta.y_x)^i-1]^{-n}; \quad (2)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ , les exposans des puissances de $\Delta.y_x$; que l'on change les différences négatives en intégrales, et que l'on substitue y_x au lieu de $\Delta^o.y_x$; et comme ce développement renferme l'intégrale $\Sigma^n.y_x$, qui peut être censée renfermer n constantes arbitraires ; l'équation (2) est encore vraie, en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer que cette équation se déduit de l'équation (1), en faisant dans celle-ci, n négatif, et en y changeant les différences négatives en intégrales ; c'est-à-dire, en écrivant $'\Sigma^n.y_x$ au lieu de $'\Delta^n.y_x$ dans le premier membre ; et généralement dans le développement du second membre, $\Sigma^r.y_x$ au lieu de $\Delta^{-r}.y_x$.

Les équations (1) et (2) auraient également lieu, si x , au lieu de varier de l'unité dans $\Delta.y_x$, variait d'une quantité quelconque ϖ , pourvu que la variation de x dans $'\Delta.y_x$ soit égale à $i\varpi$. En effet, il est clair que si dans y_x on fait $x=\frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ , lorsque x variera de l'unité ; $\Delta.y_x$ se changera dans $\Delta.y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ ; et $'\Delta.y_x$ se changera dans $'\Delta.y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Maintenant si après avoir substitué ces quantités dans les équations (1) et (2), on suppose ϖ infiniment petit et égal à dx' ; $\Delta.y_{x'}$ se changera dans la différence infiniment petite $dy_{x'}$. Si de plus on fait i infini, et $idx'=a$, a étant une quantité finie ; la variation de x' dans $'\Delta.y_{x'}$, sera a ; on aura donc

$$' \Delta^n.y_{x'}=[(1+dy_{x'})^i-1]^n; \quad (q)$$

$$' \Sigma^n.y_{x'}=\frac{1}{[(1+dy_{x'})^i-1]^n};$$

or

or on a

$$\log (1+dy_{x'})^i = i \cdot \log (1+dy_{x'}) = i \cdot dy_{x'} = a \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'};$$

ce qui donne

$$(1 + dy_{x'})^i = c^{a \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on a donc

$${}^i\Delta^n \cdot y_{x'} = \left(c^{a \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1 \right)^n, \quad (3)$$

$${}^i\Sigma^n \cdot y_{x'} = \frac{1}{\left(c^{a \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1 \right)^n}; \quad (4)$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique d , les exposans des puissances de $dy_{x'}$; de changer les différences négatives en intégrales, et la quantité $d^n \cdot y_{x'}$ en $y_{x'}$.

On peut donner à l'équation (5) cette forme singulière qui nous sera utile dans la suite.

$${}^i\Delta^n \cdot y_{x'} = \left(c^{\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'} + \frac{na}{2}}{dx'}} - c^{\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'} + \frac{na}{2}}{dx'}} \right)^n.$$

En effet, elle donne

$${}^i\Delta^n \cdot y_{x'} = c^{\frac{na}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} \cdot \left(c^{\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} \right)^n.$$

Considérons un terme quelconque du développement de

$\left(c^{\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} \right)^n$, tel que $k \left(\frac{dy_{x'}}{dx'} \right)^r$. En le multipliant par $c^{\frac{na}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}}$, et développant cette dernière quantité, on aura

$$k \cdot \frac{d^r}{dx'^r} \cdot \left[y_{x'} + \frac{na}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'} + \left(\frac{na}{2} \right)^2 \cdot \frac{d^2 y_{x'}}{1 \cdot 2 \cdot dx'^2} + \text{etc.} \right];$$

cette quantité est égale à $k \cdot \frac{d^r y_{x' + \frac{na}{2}}}{dx'^r}$; d'où il est facile de conclure

$$c^{\frac{na}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} \cdot \left(c^{\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}} \right)^n = \left(c^{\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'} + \frac{na}{2}}{dx'}} - c^{-\frac{a}{2} \cdot \frac{dy_{x'} + \frac{na}{2}}{dx'}} \right)^n = {}^i\Delta^n \cdot y_{x'},$$

Si dans les équations (1) et (2), on suppose encore i infiniment petit et égal à dx ; on aura

$${}'\Delta^n.y_x = d^n.y_x; \quad {}'\Sigma^n.y_x = \frac{1}{dx^n} \cdot \int^n y_x \cdot dx^n;$$

on a d'ailleurs

$$(1 + \Delta.y_x)^i = e^{dx \cdot \log(1 + \Delta.y_x)} = 1 + dx \cdot \log(1 + \Delta.y_x);$$

les équations (1) et (2) deviendront ainsi

$$\frac{d^n.y_x}{dx^n} = [\log(1 + \Delta.y_x)]^n, \quad (5)$$

$$\int^n y_x \cdot dx^n = \frac{1}{[\log(1 + \Delta.y_x)]^n}. \quad (6)$$

On peut observer ici une analogie singulière entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales. L'équation

$${}'\Delta.y_x = c^{\alpha \cdot \frac{dy_x}{dx}} - 1 \quad (o)$$

est la traduction du théorème connu de Taylor, lorsque, dans le développement de son second membre, suivant les puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, on applique à la caractéristique d , les exposans de ces puissances. En élevant les deux membres de cette équation à la puissance n , et appliquant aux caractéristiques ${}'\Delta$ et d , les exposans des puissances de ${}'\Delta.y_x$ et de dy_x , on aura l'équation (3), d'où résulte l'équation (4), en changeant les différences négatives en intégrales.

L'équation précédente donne

$$c^{\alpha \cdot \frac{dy_x}{dx}} = 1 + {}'\Delta.y_x.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on aura

$$\alpha \cdot \frac{dy_x}{dx} = \log(1 + {}'\Delta.y_x); \quad (r).$$

Supposant ensuite $\alpha = 1$, ce qui change ${}'\Delta.y_x$ dans $\Delta.y_x$, et élevant les deux membres de cette équation, à la puissance n , on

aura l'équation (5), pourvu que l'on applique les exposans des puissances, aux caractéristiques. On aura l'équation (6), en faisant n négatif, et changeant les puissances négatives en intégrales.

Si dans l'équation précédente (r), on change α dans i , on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log (1 + {}^i\Delta \cdot y_x)^{\frac{1}{i}};$$

et si l'on y suppose $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log (1 + \Delta \cdot y_x).$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\frac{dy_x}{dx}$, donne

$$\log (1 + \Delta \cdot y_x) = \log (1 + {}^i\Delta \cdot y_x)^{\frac{1}{i}};$$

d'où l'on tire

$${}^i\Delta \cdot y_x = (1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1.$$

En élevant chaque membre à la puissance n , et appliquant les exposans des puissances, aux caractéristiques; on aura l'équation (1), d'où résulte l'équation (2), en changeant les différences négatives en intégrales. Les équations (1), (2), (3), (4), (5) et (6) résultent donc du théorème de Taylor, mis sous la forme de l'équation (o), en transformant cette équation suivant les règles de l'analyse, pourvu que dans les résultats on applique aux caractéristiques, les exposans des puissances, que l'on change les différences négatives en intégrales, et que l'on substitue la variable elle-même y_x , au lieu de ses différences zéro.

Cette analogie des puissances positives avec les différences, et des puissances négatives avec les intégrales, devient évidente par la théorie des fonctions génératrices. Elle tient, comme on l'a vu, à ce que les produits de la fonction u , génératrice de y_x , par les puissances de $\frac{1}{i^i} - 1$ sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x , x variant d'une quantité quelconque i ; tandis que les quotiens de u , divisés par ces mêmes puissances, sont les fonctions génératrices des intégrales de y_x .

En considérant, au lieu du facteur $\frac{1}{i^i} - 1$ et de ses puissances,

les puissances d'une fonction quelconque rationnelle et entière de $\frac{1}{t}$, on peut en conclure des théorèmes analogues aux précédents, sur les *dérivées* successives des fonctions. Je nomme *dérivée* d'une fonction y_x , toute quantité qui en dérive, telle que $a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + \text{etc.}$ En regardant ensuite cette fonction dérivée comme une nouvelle fonction que je désigne par y'_x ; la quantité $a.y'_x + b.y'_{x+1} + c.y'_{x+2} + \text{etc.}$ sera une seconde dérivée de la fonction y_x ; et ainsi de suite. Lorsque la fonction $a.y_x + b.y_{x+1} + \text{etc.}$ devient $-y_x + y_{x+1}$, la dérivée devient une différence finie.

Maintenant on a

$$u. \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{h}{t^3} + \text{etc.} \right)^n \\ = u. \left[a + b. \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1 \right)^{\frac{1}{dx}} + c. \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1 \right)^{\frac{2}{dx}} + \text{etc.} \right]^n; \quad (q)$$

on a ensuite généralement, par le n° 2, en désignant par $\nabla.y_x$ la quantité $a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + \text{etc.}$, $\nabla^n.y_x$ pour le coefficient de la fonction génératrice du premier membre de cette équation; de plus on a

$$u. \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1 \right)^{\frac{r}{dx}} = u. \left[1 + \frac{r}{dx} \cdot \left(\frac{1}{t^{dx}} - 1 \right) + \frac{r^2}{1.2. dx^2} \cdot \left(\frac{1}{t^{dx}} - 1 \right)^2 + \text{etc.} \right].$$

Le second membre de cette équation est la fonction génératrice de

$$y_x + r. \frac{dy_x}{dx} + \frac{r^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 y_x}{dx^2} + \text{etc.},$$

ou de $c^{\frac{r dy_x}{dx}}$; en appliquant à la caractéristique d les exposans des puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, et écrivant y_x au lieu de $\left(\frac{dy_x}{dx} \right)^0$. De là on conclut que sous les mêmes conditions, le second membre de l'équation (q) est la fonction génératrice de

$$\left[a + b.c \frac{dy_x}{dx} + c.c \frac{2 dy_x}{dx} + h.c \frac{3 dy_x}{dx} + \text{etc.} \right]^n;$$

et qu'ainsi cette équation donne, en repassant des fonctions géné-

ratrices aux coefficients,

$$\nabla^n . y_x = \left[a + b.c \frac{dy_x}{dx} + e.c \frac{2 dy_x}{dx} + h.c \frac{3 dy_x}{dx} + \text{etc.} \right]^n. \quad (7)$$

On peut ainsi obtenir une infinité de résultats semblables. Nous nous bornerons au suivant, qui nous sera utile dans la suite.

$u. \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right)^n$ est la fonction génératrice de

$$y_{x+\frac{n}{2}} - n.y_{x+\frac{n}{2}-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.y_{x+\frac{n}{2}-2} - \text{etc.},$$

ou de $\Delta^n . y_{x-\frac{n}{2}}$. De plus on a

$$u. \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right)^n = u. \left[\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1 \right)^{\frac{1}{2dx}} - \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2dx}} \right]^n;$$

d'où l'on tire, en repassant par l'analyse précédente, des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\Delta^n . y_{x-\frac{n}{2}} = \left(c^{\frac{dy_x}{2dx}} - c^{-\frac{dy_x}{2dx}} \right)^n.$$

11. Je n'ai considéré jusqu'ici, qu'une seule fonction y_x de x ; mais la considération du produit de plusieurs fonctions de la même variable, conduit à divers résultats curieux et utiles d'analyse. Soit u une fonction de t , et y_x le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction; soit u' une fonction de t' , et y'_x le coefficient de t'^x dans le développement de cette fonction; soit encore u'' une fonction de t'' , et y''_x le coefficient de t''^x dans son développement; et ainsi de suite. Il est clair que $y_x . y'_x . y''_x$. etc. sera le coefficient de $t^x . t'^x . t''^x$. etc. dans le développement du produit $u . u' . u''$. etc.; ce produit sera donc la fonction génératrice de $y_x . y'_x . y''_x$. etc. La fonction génératrice de $y_{x+1} . y'_{x+1} . y''_{x+1}$. etc. — $y_x . y'_x . y''_x$. etc., ou de $\Delta . y_x . y'_x . y''_x$. etc. sera ainsi

$$u . u' . u'' . \text{etc.} \left(\frac{1}{t . t' . t'' . \text{etc.}} - 1 \right);$$

et la fonction génératrice de $\Delta^n \cdot y_x \cdot y'_x \cdot y''_x$, etc. sera

$$u \cdot u' \cdot u'' \cdot \text{etc.} \cdot \left(\frac{1}{t \cdot t' \cdot t'' \cdot \text{etc.}} - 1 \right)^n.$$

On prouvera, comme dans le n° 2, que la fonction génératrice de $\Sigma^n \cdot y_x \cdot y'_x \cdot y''_x$, etc. sera

$$u \cdot u' \cdot u'' \cdot \text{etc.} \cdot \left(\frac{1}{t \cdot t' \cdot t'' \cdot \text{etc.}} - 1 \right)^{-n};$$

c'est-à-dire que l'on peut changer n en $-n$ dans la fonction génératrice de $\Delta^n \cdot y_x \cdot y'_x$, etc., pourvu que l'on change Δ^{-n} dans Σ^n .

Appliquons ces résultats à deux fonctions y_x et y'_x . La fonction génératrice de $\Delta^n \cdot y_x \cdot y'_x$ sera $u \cdot u' \cdot \left(\frac{1}{t \cdot t'} - 1 \right)^n$. On peut la mettre sous cette forme

$$u \cdot u' \cdot \left[\frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right) \right]^n;$$

en la développant, elle devient

$$u \cdot u' \cdot \left\{ \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^n + \frac{n}{t} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right) + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot t^2} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right)^2 + \text{etc.} \right\};$$

les fonctions

$$u \cdot u' \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^n; u \cdot u' \cdot \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right); u \cdot u' \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right)^2; \text{etc.};$$

sont respectivement génératrices des produits $y'_x \cdot \Delta^n \cdot y_x$; $\Delta \cdot y'_x \cdot \Delta^{n-1} \cdot y_{x+1}$; $\Delta^2 \cdot y'_x \cdot \Delta^{n-2} \cdot y_{x+2}$; etc. L'équation

$$u \cdot u' \cdot \left(\frac{1}{t \cdot t'} - 1 \right)^n = u \cdot u' \cdot \left[\left(\frac{1}{t} - 1 \right)^n + \frac{n}{t} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right) + \text{etc.} \right]$$

donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\begin{aligned} \Delta^n \cdot y_x \cdot y'_x &= y'_x \cdot \Delta^n \cdot y_x + n \cdot \Delta \cdot y'_x \cdot \Delta^{n-1} \cdot y_{x+1} \\ &+ \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y'_x \cdot \Delta^{n-2} \cdot y_{x+2} + \text{etc.} \end{aligned} \quad (8)$$

En changeant n dans $-n$, on aura

$$\begin{aligned} \Sigma^n . y_x . y'_x &= y'_x . \Sigma^n . y_x - n . \Delta . y'_x . \Sigma^{n+1} . y_{x+1} \\ &+ \frac{n . (n+1)}{1.2} . \Delta^2 . y'_x . \Sigma^{n+2} . y_{x+2} - \text{etc.} \end{aligned} \quad (9)$$

En général, on a

$$\begin{aligned} &u . u' . u'' . \text{etc.} \left(\frac{1}{t . t' . t'' . \text{etc.}} - 1 \right)^n \\ &= u . u' . u'' . \text{etc.} \left[\left(1 + \frac{1}{t} - 1 \right) . \left(1 + \frac{1}{t'} - 1 \right) . \left(1 + \frac{1}{t''} - 1 \right) . \text{etc.} - 1 \right]^n; \end{aligned}$$

ce qui donne , en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\Delta^n . y_x . y'_x . y''_x . \text{etc.} = [(1 + \Delta) . (1 + \Delta') . (1 + \Delta'') . \text{etc.} - 1]^n; \quad (10)$$

pourvu que dans chaque terme du développement du second membre de cette équation, on place immédiatement après chaque caractéristique Δ , Δ' , Δ'' , etc., respectivement y_x , y'_x , y''_x , etc., et qu'on multiplie ce terme par le produit des fonctions dont il ne contient point la caractéristique. Ainsi dans le cas de trois variables, on écrira, au lieu de Δ' , la quantité $y'_x . y''_x . \Delta' . y_x$; au lieu de $\Delta' . \Delta''$, on écrira $y''_x . \Delta' . y_x . \Delta'' . y'_x$; au lieu de $\Delta'' . \Delta'''$, on écrira $y_x . \Delta'' . y'_x . \Delta''' . y''_x$; et ainsi du reste.

En faisant n négatif, l'équation (10) subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Dans le cas des différences infiniment petites, les caractéristiques Δ , Δ' , Δ'' , etc. se changent en d , d' , d'' , etc. L'équation (10) devient ainsi, en négligeant les différentielles d'un ordre supérieur, relativement à celles d'un ordre inférieur,

$$d^n . y_x . y'_x . y''_x . \text{etc.} = (d + d' + d'' + \text{etc.})^n.$$

Cette équation développée donne, relativement à deux fonctions y_x et y'_x ,

$$d^n . y_x . y'_x = y'_x . d^n y_x + n . dy'_x . d^{n-1} y_x + \frac{n . (n-1)}{1.2} . d^2 y'_x . d^{n-2} y_x + \text{etc.}$$

En faisant n négatif, les différences négatives se changeant en in-

tégrales, on aura

$$\begin{aligned} \int^n \cdot y_x \cdot y'_x \cdot dx^n &= y'_x \cdot \int^n y_x \cdot dx^n - n \cdot \frac{dy'_x}{dx} \cdot \int^{n+1} y_x \cdot dx^{n+1} \\ &+ \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 y'_x}{dx^2} \cdot \int^{n+2} y_x \cdot dx^{n+2} - \text{etc.} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} &u \cdot u' \cdot u'' \cdot \text{etc.} \left(\frac{1}{i^1 \cdot i'^1 \cdot i''^1 \cdot \text{etc.}} - 1 \right)^n \\ &= u \cdot u' \cdot u'' \cdot \text{etc.} \left[\left(1 + \frac{1}{i} - 1 \right)^i \cdot \left(1 + \frac{1}{i'} - 1 \right)^{i'} \cdot \left(1 + \frac{1}{i''} - 1 \right)^{i''} \cdot \text{etc.} - 1 \right]^n; \end{aligned}$$

en désignant donc par $'\Delta^n \cdot y_x \cdot y'_x \cdot y''_x \cdot \text{etc.}$, la différence finie du produit $y_x \cdot y'_x \cdot y''_x \cdot \text{etc.}$, lorsque x varie de i ; l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$' \Delta^n \cdot y_x \cdot y'_x \cdot y''_x \cdot \text{etc.} = [(1 + \Delta)^i \cdot (1 + \Delta')^{i'} \cdot (1 + \Delta'')^{i''} \cdot \text{etc.} - 1]^n; \quad (11)$$

en observant les conditions prescrites ci-dessus relativement aux caractéristiques Δ , Δ' , Δ'' , etc., et à leurs puissances. Cette dernière équation subsiste encore, en faisant n négatif, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Supposons

$$x = \frac{x'}{dx'}; \quad i = \frac{a}{dx'};$$

y_x , y'_x , etc. deviendront des fonctions de x' , que nous désignerons par $y_{x'}$, $y'_{x'}$, etc.; l'équation (11) donnera ainsi la suivante, en observant que les caractéristiques Δ , Δ' , etc. se changent en d , d' , etc., et que l'on a

$$\begin{aligned} (1 + dy_{x'})^{\frac{a}{dx'}} &= c^{\frac{a}{dx'} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'}}, \\ ' \Delta^n \cdot y_{x'} \cdot y'_{x'} \cdot y''_{x'} \cdot \text{etc.} &= \left(c^{\frac{a}{dx'} \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'} + \frac{a}{dx'} \cdot \frac{dy'_{x'}}{dx'} + \frac{a}{dx'} \cdot \frac{dy''_{x'}}{dx'} + \text{etc.} - 1 \right)^n; \quad (12) \end{aligned}$$

équation qui subsiste encore en faisant n négatif, et changeant les différences négatives en intégrales.

Ne considérons que deux variables y_x et y'_x , et supposons $y'_x = p^x$, on aura

$$(1 + \Delta')^i = p^x + i \cdot \Delta \cdot p^x + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot p^x + \text{etc.};$$

or on a généralement, x variant de l'unité,

$$\Delta' \cdot p^x = p^x \cdot (p - 1)';$$

on aura donc

$$(1 + \Delta')^i = p^i \cdot p^x.$$

L'équation (11) deviendra ainsi

$$' \Delta^n \cdot p^x \cdot y_x = p^x \cdot [p^i \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1]^n; \quad (13);$$

en faisant n négatif, on aura

$$' \Sigma^n \cdot p^x \cdot y_x = \frac{p^x}{[p^i \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1]^n} + a \cdot x^{n-1} + b \cdot x^{n-2} + \text{etc.}; \quad (14)$$

a , b , etc. étant des constantes arbitraires dues à l'intégration n fois répétée de $p^x \cdot y_x$. J'ajoute ici ces constantes, au second membre de l'équation précédente; parce qu'elles ne sont implicitement renfermées dans son premier terme, que lorsque $p = 1$.

Si l'on fait dans les deux équations précédentes, $x = \frac{x'}{dx'}$; $i = \frac{a}{dx'}$; $p = 1 + dx' \cdot \log h$; on aura

$$' \Delta^n \cdot h^{x'} \cdot y_{x'} = h^{x'} \cdot \left[h^{\frac{a}{dx'}} \cdot c^{\frac{a}{dx'}} - 1 \right]^n; \quad (15)$$

$$' \Sigma^n \cdot h^{x'} \cdot y_{x'} = \frac{h^{x'}}{\left[h^{\frac{a}{dx'}} \cdot c^{\frac{a}{dx'}} - 1 \right]^n} + a' \cdot x'^{n-1} + b' \cdot x'^{n-2} + \text{etc.} \quad (16)$$

Si dans les équations (15) et (14), on suppose i infiniment petit et égal à dx ; $' \Delta^n \cdot p^x \cdot y_x$ se changera dans $d^n \cdot p^x \cdot y_x$, et $' \Sigma^n \cdot p^x \cdot y_x$ se changera dans $\frac{1}{dx^n} \cdot f^n \cdot p^x \cdot y_x \cdot dx^n$; on aura ensuite

$$p^i \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)^i = c^{dx \cdot \log [p \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)]};$$

on aura donc

$$[p^i \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1]^n = dx^n \cdot \{ \log [p \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)] \}^n;$$

et les équations (15) et (14) deviendront

$$\frac{d^n \cdot p^x \cdot y_x}{dx^n} = p^x \cdot \{ \log [p \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)] \}^n; \quad (17)$$

$$f^n \cdot p^x \cdot y_x \cdot dx^n = \frac{p^x}{\{ \log [p \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)] \}^n} + a \cdot x^{n-1} + b \cdot x^{n-2} + \text{etc.} \quad (18)$$

CHAPITRE II.

Des fonctions génératrices à deux variables.

12. NOMMONS u une fonction de t et t' ; supposons qu'en la développant suivant les puissances de t et t' , elle donne la suite infinie

$$\begin{aligned} & y_{0,0} + y_{1,0} \cdot t + y_{2,0} \cdot t^2 \dots + y_{x,0} \cdot t^x + y_{x+1,0} \cdot t^{x+1} \dots + y_{\infty,0} \cdot t^{\infty} \\ & + y_{0,1} \cdot t' + y_{1,1} \cdot t \cdot t' + y_{2,1} \cdot t^2 \cdot t' \dots + y_{x,1} \cdot t^x \cdot t' + y_{x+1,1} \cdot t^{x+1} \cdot t' \dots + y_{\infty,1} \cdot t^{\infty} \cdot t' \\ & + y_{0,2} \cdot t'^2 + y_{1,2} \cdot t \cdot t'^2 + y_{2,2} \cdot t^2 \cdot t'^2 \dots + y_{x,2} \cdot t^x \cdot t'^2 + y_{x+1,2} \cdot t^{x+1} \cdot t'^2 \dots + y_{\infty,2} \cdot t^{\infty} \cdot t'^2 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'}$ sera $y_{x,x'}$; u sera donc la fonction génératrice de $y_{x,x'}$.

Si l'on désigne par la caractéristique Δ , les différences finies, lorsque x seul varie de l'unité, et par la caractéristique Δ' , les différences lorsque x' seul varie de la même quantité; la fonction génératrice de $\Delta \cdot y_{x,x'}$ sera, par le n° 1, $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$, et celle de $\Delta' \cdot y_{x,x'}$ sera $u \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1\right)$; d'où il est facile de conclure que la fonction génératrice de $\Delta^i \cdot \Delta'^j \cdot y_{x,x'}$ sera $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^j$.

En général si l'on désigne par $\nabla \cdot y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned} & A \cdot y_{x,x'} + B \cdot y_{x+1,x'} + C \cdot y_{x+2,x'} + \text{etc.} \\ & + B' \cdot y_{x,x'+1} + C' \cdot y_{x+1,x'+1} + \text{etc.} \\ & + C'' \cdot y_{x,x'+2} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} ; \end{aligned}$$

Si l'on désigne pareillement par $\nabla^2 \cdot y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle

$\nabla \cdot y_{x, x'}$, entre de la même manière que $y_{x, x'}$ dans $\nabla \cdot y_{x, x'}$; si l'on désigne encore par $\nabla^3 \cdot y_{x, x'}$ une fonction dans laquelle $\nabla^2 \cdot y_{x, x'}$ entre de la même manière que $y_{x, x'}$ dans $\nabla \cdot y_{x, x'}$, et ainsi de suite; la fonction génératrice de $\nabla^n \cdot y_{x, x'}$ sera

$$u \cdot \left\{ \begin{array}{l} A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{etc.} \\ + \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t \cdot t'} + \text{etc.} \\ + \frac{C''}{t'^2} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}^n$$

partant, la fonction génératrice de $\Delta^i \cdot \Delta^{i'} \cdot \nabla^n \cdot y_{x, x'}$ sera la fonction génératrice précédente, multipliée par $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$.

s étant supposée une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$; si l'on développe s^i suivant les puissances de ces variables, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^m \cdot t'^{m'}}$, un terme quelconque de ce développement; le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'}$ dans $\frac{k \cdot u}{t^m \cdot t'^{m'}}$ étant $k \cdot y_{x+m, x'+m'}$, on aura celui de $t^x \cdot t'^{x'}$ dans $u \cdot s^i$, ou, ce qui revient au même, on aura $\nabla^i \cdot y_{x, x'}$, 1°. en substituant dans s , y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$; 2°. en développant ce que devient alors $u \cdot s^i$ suivant les puissances de y_x et de $y_{x'}$, et en appliquant respectivement aux indices x et x' les exposans de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant au lieu d'un terme quelconque, tel que $k \cdot (y_x)^m \cdot (y_{x'})^{m'}$, $k \cdot y_{x+m, x'+m'}$, et par conséquent $k \cdot y_{x, x'}$ au lieu du terme tout constant k , ou $k \cdot (y_{x'})^0 \cdot (y_x)^0$,

Si au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$ et de $\frac{1}{t'} - 1$, et que l'on désigne par $k \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^m \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ un terme quelconque de ce développement; le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'}$ dans $k \cdot u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^m \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ étant $k \cdot \Delta^m \cdot \Delta^{m'} \cdot y_{x, x'}$; on aura $\nabla^i \cdot y_{x, x'}$, 1°. en substituant dans s ,

$\Delta.y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, et ${}'\Delta.y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'} - 1$; 2°. en développant alors s^i suivant les puissances de $\Delta.y_{x,x'}$ et ${}'\Delta.y_{x,x'}$; et en appliquant aux caractéristiques Δ et ${}'\Delta$, les exposans de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant, au lieu d'un terme quelconque, tel que $k.(\Delta.y_{x,x'})^m.({}'\Delta.y_{x,x'})^{m'}$, celui-ci $k.\Delta^m.{}'\Delta^{m'}.y_{x,x'}$; et par conséquent $k.y_{x,x'}$ au lieu du terme constant k .

Soit Σ la caractéristique des intégrales finies relatives à x , et ${}'\Sigma$ celle des intégrales finies relatives à x' ; soit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^i.{}'\Sigma^{i'}.y_{x,x'}$; on aura $z.(\frac{1}{t} - 1)^i.(\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$. Cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t et de t' , se réduire à u ; on aura ainsi, par le n° 2,

$$z.(\frac{1}{t} - 1)^i.(\frac{1}{t'} - 1)^{i'} = u + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \dots + \frac{q}{t^i} \\ + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \dots + \frac{q'}{t'^{i'}},$$

$a, b, c, \dots, q$ étant des fonctions arbitraires de t' , et $a', b', c', \dots, q'$ étant des fonctions arbitraires de t ; partant

$$z = \frac{u.t^i.t'^{i'} + a.t^{i-1}.t'^{i'} + b.t^{i-2}.t'^{i'} \dots + q.t^{i'} + a'.t^i.t'^{i'-1} + b'.t^i.t'^{i'-2} \dots + q'.t^i}{(1-t)^i.(1-t')^{i'}}.$$

De l'interpolation des suites à deux variables, et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles.

15. $y_{x+i, x'+i'}$ est évidemment égal au coefficient de $t^x.t^{x'}$ dans le développement de $\frac{u}{t^i.t'^{i'}}$; or on a

$$\frac{u}{t^i.t'^{i'}} = u. \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i. \left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right)^{i'};$$

on aura donc par le numéro précédent,

$$y_{x+i, x'+i'} = (1 + \Delta.y_{x,x'})^i. (1 + {}'\Delta.y_{x,x'})^{i'};$$

en développant le second membre de cette équation, on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i, x'+i'} &= y_{x, x'} + i \cdot \Delta \cdot y_{x, x'} + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x, x'} + \text{etc.} \\ &+ i' \cdot \Delta' \cdot y_{x, x'} + i \cdot i' \cdot \Delta \cdot \Delta' \cdot y_{x, x'} + \text{etc.} \\ &+ \frac{i' \cdot (i'-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta'^2 \cdot y_{x, x'} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'interpoler suivant les différences de la fonction $y_{x, x'}$, on veuille interpoler suivant d'autres lois. Pour cela, soit

$$\begin{aligned} z &= A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} + \text{etc.} \\ &+ \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t \cdot t'} + \frac{D'}{t^2 \cdot t'} + \text{etc.} \\ &+ \frac{C''}{t'^2} + \frac{D''}{t \cdot t'^2} + \text{etc.} \\ &+ \frac{D'''}{t'^3} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned} A + \frac{B'}{t'} + \frac{C''}{t'^2} + \frac{D'''}{t'^3} + \text{etc.} &= a; \\ B + \frac{C'}{t'} + \frac{D''}{t'^2} + \text{etc.} &= b; \\ C + \frac{D'}{t'} + \text{etc.} &= c; \\ \text{etc.} & \end{aligned}$$

on aura pour z une expression de cette forme

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \dots + \frac{l}{t^n}.$$

Nous supposons ici que le coefficient l de la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ est constant ou indépendant de t' , et que cette puissance est égale ou plus grande que la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ dans chacun des autres termes de z . Il est facile de

conclure de l'équation précédente, comme dans le n° 5, les valeurs successives de $\frac{1}{t^{n+1}}, \frac{1}{t^{n+2}}, \frac{1}{t^{n+3}}, \text{etc.}$, en fonctions de $a, b, c, \text{etc.}$ et z ; et il est visible que dans chaque terme de l'expression de $\frac{1}{t^i}$, la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ sera moindre que n , et la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t^2}$ ne surpassera pas i .

Considérons maintenant la formule (A) du n° 5, et supposons qu'en développant suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, la quantité

$$\begin{aligned} & b.Z_{i-n+1}^{(\circ)} + bz.Z_{i-2n+1}^{(1)} + \text{etc.} \\ & + c.Z_{i-n+2}^{(\circ)} + cz.Z_{i-2n+2}^{(1)} + \text{etc.} \\ & + e.Z_{i-n+3}^{(\circ)} + ez.Z_{i-2n+3}^{(1)} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} & M + N.z + \text{etc.} + \frac{1}{t} \cdot (M^{(1)} + N^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ & + \frac{1}{t^2} \cdot (M^{(2)} + N^{(2)}.z + \text{etc.}) \dots + \frac{1}{t^i} \cdot M^{(i)}; \end{aligned}$$

les puissances ultérieures de $\frac{1}{t}$ disparaissent d'elles-mêmes dans ce développement, puisque l'expression de $\frac{1}{t^i}$ ne doit point les contenir. Supposons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} & c.Z_{i-n+1}^{(\circ)} + cz.Z_{i-2n+1}^{(1)} + \text{etc.} \\ & + e.Z_{i-n+2}^{(\circ)} + ez.Z_{i-2n+2}^{(1)} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

on ait

$$M_1 + N_1.z + \text{etc.} + \frac{1}{t} \cdot (M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \text{etc.}) \dots + \frac{1}{t^{i-1}} \cdot M_1^{(i-1)}.$$

Supposons encore qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} & e.Z_{i-n+1}^{(\circ)} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

on ait

$$M_1 + N_1.z + \text{etc.} + \frac{1}{t'} \cdot (M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \text{etc.}) \dots + \frac{1}{t^{i-1}} \cdot M_1^{(i-1)};$$

et ainsi de suite. La formule (A) du n° 5 donnera

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^i} = & M + N.z + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{t'} \cdot (M^{(1)} + N^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ & + \frac{1}{t'^2} \cdot (M^{(2)} + N^{(2)}.z + \text{etc.}) \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{t'^i} \cdot M^{(i)} \\ & + \frac{1}{t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_1 + N_1.z + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t'} \cdot (M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ \dots \dots \dots \\ + \frac{1}{t^{i-1}} \cdot M_1^{(i-1)} \end{array} \right\} \\ & + \frac{1}{t^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_2 + N_2.z + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t'} \cdot (M_2^{(1)} + N_2^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ \dots \dots \dots \\ + \frac{1}{t^{i-2}} \cdot M_2^{(i-2)} \end{array} \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{t^{n-1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{n-1} + N_{n-1}.z + \text{etc.} \\ + \frac{1}{t'} \cdot (M_{n-1}^{(1)} + N_{n-1}^{(1)}.z + \text{etc.}) \\ \dots \dots \dots \\ + \frac{1}{t^{i-n+1}} \cdot M_{n-1}^{(i-n+1)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla.y_{x, x'}$ la quantité

$$\begin{aligned} A.y_{x, x'} + B.y_{x+1, x'} + C.y_{x+2, x'} + \text{etc.} \\ + B'.y_{x, x'+1} + C'.y_{x+1, x'+1} + \text{etc.} \\ + C''.y_{x, x'+2} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{aligned}$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=i+1$ par rapport au premier terme, depuis $r=1$ jusqu'à $r=i+1$ par rapport au second terme, et ainsi de suite. Cette expression de $y_{i,x'}$ sera l'intégrale complète de l'équation $\nabla.y_{i,x'}=0$, ou

$$\begin{aligned} 0 = & A.y_{i,x'} + B.y_{i+1,x'} + C.y_{i+2,x'} + \dots + l.y_{i+n,x'} \\ & + B'.y_{i,x'+1} + C'.y_{i+1,x'+1} + \dots \\ & + C''.y_{i,x'+2} + \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + h.y_{i,x'+n}. \end{aligned}$$

Il est visible que $y_{0,x'}, y_{1,x'}, y_{2,x'}, \dots, y_{n-1,x'}$ sont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla.y_{i,x'}=0$. Pour les déterminer, il faut connaître immédiatement, ou du moins pouvoir conclure des conditions du problème, les n premiers rangs verticaux de la table suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0} & \dots & y_{i,0}, & y_{i+1,0} & \dots & y_{\infty,0} \\ y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1} & \dots & y_{i,1}, & y_{i+1,1} & \dots & y_{\infty,1} \\ y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2} & \dots & y_{i,2}, & y_{i+1,2} & \dots & y_{\infty,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{0,x'}, & y_{1,x'}, & y_{2,x'}, & y_{3,x'} & \dots & y_{i,x'}, & y_{i+1,x'} & \dots & y_{\infty,x'} \\ y_{0,x'+1}, & y_{1,x'+1}, & y_{2,x'+1}, & y_{3,x'+1} & \dots & y_{i,x'+1}, & y_{i+1,x'+1} & \dots & y_{\infty,x'+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{0,\infty}, & y_{1,\infty}, & y_{2,\infty}, & y_{3,\infty} & \dots & y_{i,\infty}, & y_{i+1,\infty} & \dots & y_{\infty,\infty} \end{array} ; (Q)$$

Dans un grand nombre de problèmes, les n premiers rangs verticaux sont donnés par des équations aux différences finies linéaires, et par conséquent par une suite de termes de la forme $A.p^{x'}$. Supposons que l'expression de $y_{0,x'}$ contienne le terme $A.p^{x'}$; la partie correspondante de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) sera

$$A.p^{x'}.(M + M^{(1)}.p + M^{(2)}.p^2 + \dots + M^{(i)}.p^i);$$

mais la fonction

$$M + \frac{M^{(1)}}{i'} + \frac{M^{(2)}}{i'^2} + \dots + \frac{M^{(i)}}{i'^i}$$

est le développement de

$$b.Z_{i-n+1}^{(0)} + c.Z_{i-n+2}^{(0)} + \text{etc.}$$

suivant les puissances de $\frac{1}{p}$; en changeant donc dans cette dernière quantité, $\frac{1}{p}$ en p , et nommant P ce qu'elle devient alors; on aura $A.P.p^{x'}$ pour la partie de $y_{i, x'}$ qui répond au terme $A.p^{x'}$. Il suit de là que si la valeur de $y_{i, x'}$ est égale à $A.p^{x'} + A'.p'^{x'} + A''.p''^{x'} + \text{etc.}$, et que l'on nomme $P', P'', \text{etc.}$, ce que devient P , en y changeant p dans $p', p'', \text{etc.}$; on aura pour la partie correspondante de $y_{i, x'}$,

$$A.P.p^{x'} + A'.P'.p'^{x'} + A''.P''.p''^{x'} + \text{etc.}$$

On trouvera pareillement que si la valeur de $y_{i, x'}$ est exprimée par $B.q^{x'} + B'.q'^{x'} + B''.q''^{x'} + \text{etc.}$; et si l'on nomme $Q, Q', Q'', \text{etc.}$, ce que devient la quantité

$$c.Z_{i-n+1}^{(c)} + e.Z_{i-n+2}^{(c)} + \text{etc.}$$

lorsqu'on y change successivement $\frac{1}{p}$ en $q, q', q'', \text{etc.}$; la partie correspondante de $y_{i, x'}$ sera

$$B.Q.q^{x'} + B'.Q'.q'^{x'} + B''.Q''.q''^{x'} + \text{etc.},$$

et ainsi de suite. La réunion de tous ces termes donnera l'expression de $y_{i, x'}$, la plus simple à laquelle on puisse parvenir.

15. La valeur de $y_{i, x'}$ donnée par la formule (λ) du numéro précédent, dépendant de la connaissance de $M^{(r)}, M_i^{(r-1)}, \text{etc.}$; il est visible que ces quantités seront connues, lorsque l'on aura le coefficient de $\frac{1}{p^r}$ dans le développement de $Z_i^{(c)}$; tout se réduit donc à déterminer ce coefficient. On a par le n° 5,

$$\begin{aligned} Z_i^{(c)} = & - \frac{1}{a . a^{i+1} . (a - a') . (a - a'') . \text{etc.}} \\ & - \frac{1}{a . a'^{i+1} . (a' - a) . (a' - a'') . \text{etc.}} \\ & - \frac{1}{a . a''^{i+1} . (a'' - a) . (a'' - a') . \text{etc.}} \\ & - \text{etc.}, \end{aligned}$$

α , α' , α'' , etc. étant fonctions de $\frac{1}{t}$. Si l'on fait $\frac{1}{t} = s$, et que l'on différentie l'expression précédente de $Z_i^{(o)}$, n fois de suite par rapport à s , on aura avec l'équation précédente, $n + 1$ équations, au moyen desquelles, en éliminant les puissances indéterminées $\frac{1}{\alpha^{i+1}}$, $\frac{1}{\alpha'^{i+1}}$, $\frac{1}{\alpha''^{i+1}}$, etc., on parviendra à une équation linéaire entre $Z_i^{(o)}$, $\frac{dZ_i^{(o)}}{ds}$, $\frac{d^2Z_i^{(o)}}{ds^2}$, etc., dont les coefficients seront fonctions de α , α' , α'' , etc., et de leurs différentielles prises par rapport à s ; or il est clair que α , α' , α'' , etc. doivent entrer de la même manière dans ces coefficients que l'on pourra ainsi obtenir en fonctions rationnelles et entières des coefficients de l'équation qui donne les valeurs de α , α' , α'' , etc., et des différences de ces coefficients, et par conséquent en fonctions rationnelles de s . En faisant ensuite disparaître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(o)}$ et ses différentielles, équation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles et entières de s . Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $k \cdot s^m \cdot \frac{d^\mu Z_i^{(o)}}{ds^\mu}$, et nommons λ_r le coefficient de $\frac{1}{t^r}$ dans le développement de $Z_i^{(o)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}$; ce coefficient dans le développement de $k \cdot s^m \cdot \frac{d^\mu Z_i^{(o)}}{ds^\mu}$ sera

$$k \cdot (r + \mu - m) \cdot (r + \mu - m - 1) \cdot (r + \mu - m - 2) \dots (r - m + 1) \cdot \lambda_{r + \mu - m}.$$

En repassant ainsi des fonctions génératrices à leurs coefficients, l'équation entre $Z_i^{(o)}$ et ses différences, donnera une équation entre λ_r , λ_{r+1} , etc., dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de r , et dont l'intégrale sera la valeur de λ_r .

Il suit de là que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coefficients sont constans, dépend, 1°. de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies dont les coefficients sont variables; 2°. d'une intégrale *définie*.

L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i, x'}$ dans la formule (λ) est relative à r , et doit s'étendre jusqu'à $r = i + 1$.

Relativement à l'équation aux différences partielles du premier ordre

$$0 = A \cdot y_{i, x'} + B \cdot y_{i+1, x'} + B' \cdot y_{i, x'+1},$$

on a

$$Z_i^{(0)} = -\frac{1}{a \cdot \alpha^{i+1}};$$

on a de plus

$$a = A + B' \cdot s,$$

$$\alpha = -\frac{B}{a};$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)} = -\frac{(A + B' \cdot s)^i}{(-B)^{i+1}};$$

d'où l'on tire cette équation différentielle

$$0 = \frac{dZ_i^{(0)}}{ds} \cdot (A + B' \cdot s) - i \cdot B' \cdot Z_i^{(0)};$$

ce qui donne l'équation aux différences finies

$$0 = (r+1) \cdot A \cdot \lambda_{r+1} - (i-r) \cdot B' \cdot \lambda_r;$$

on a ensuite

$$M^{(r)} = B \cdot \lambda_r.$$

La formule (λ) du numéro précédent deviendra donc

$$y_{i, x'} = B \cdot \Sigma \cdot \lambda_r \cdot y_{0, x'+r},$$

L'intégrale finie étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i$. C'est l'intégrale complète de l'équation précédente aux différences partielles du premier ordre.

L'équation aux différences en λ , donne en l'intégrant,

$$\lambda_r = \frac{H \cdot i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot \dots \cdot (i-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} \cdot \frac{B'^r}{A^r},$$

H étant une constante arbitraire; et le dénominateur étant l'unité, lorsque r est nul. Pour déterminer cette constante, on observera

que le coefficient indépendant de $\frac{1}{t}$ dans $Z_i^{(s)}$ est $-\frac{A^i}{(-B)^{i+1}}$; c'est la valeur de λ_0 , et par conséquent de H ; on aura donc

$$y_{i,x'} = -\sum \frac{i.(i-1).(i-2) \dots (i-r+1)}{1.2.3 \dots r} \cdot \frac{A^{i-r} \cdot B^r}{(-B)^{i+1}} \cdot y_{0,x'+r}$$

En passant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coefficients sont constans, 1°. en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2°. au moyen d'une intégrale définie. Mais ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur cet objet que j'ai considéré ailleurs avec étendue.

On doit faire ici une remarque importante relative au nombre des fonctions arbitraires que renferme l'expression générale de $y_{i,x'}$. Ce nombre, dans la formule (λ) du numéro précédent, est égal à n ; mais il devient plus petit dans le cas où la valeur de z du n° 15 ne renfermant que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n , la plus haute puissance n' de $\frac{1}{t}$ a un coefficient constant ou indépendant de $\frac{1}{t}$. Alors en suivant l'analyse précédente, et déterminant à son moyen la valeur de $\frac{1}{t^{x'}}$, comme nous avons déterminé celle de $\frac{1}{t^i}$; en repassant ensuite des fonctions génératrices à leurs coefficients, on parviendra à une formule analogue à la formule (λ); seulement, l'intégrale définie, au lieu de s'étendre jusqu'à $r=i+1$, devra s'étendre jusqu'à $r=x'+1$. Cette nouvelle expression de $y_{i,x'}$, ne dépendra plus que des n' fonctions arbitraires $y_{i,0}$, $y_{i,1}$, $y_{i,2}$, $\dots$, $y_{i,n'-1}$; et tandis que la première suppose la connaissance des n premiers rangs verticaux de la table (Q) du n° 14; celle-ci n'exige que la connaissance des n' premiers rangs horizontaux de la même table. Ainsi les n fonctions arbitraires $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, $y_{2,x'}$, $\dots$, $y_{n-1,x'}$ de la formule (λ) n'équivalent qu'à n' fonctions arbitraires distinctes. En effet, l'équation proposée aux différences partielles, donne $y_{i,n'}$ au moyen des valeurs de $y_{i \pm r,0}$, $y_{i \pm r,1}$, $\dots$, $y_{i \pm r,n'-1}$, r étant un nombre entier. Elle donne pareillement $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i \pm r,0}$, $y_{i \pm r,1}$, $\dots$, $y_{i \pm r,n'}$, et éliminant $y_{i \pm r,n'}$ au moyen de

son expression, on a $y_{i, n'+1}$ au moyen de $y_{i \pm r, 0}, y_{i \pm r, 1}, \dots, y_{i \pm r, n'-1}$; en continuant ainsi, on voit que l'expression générale de $y_{i, x'}$ ne dépend que des arbitraires $y_{i \pm r, 0}, y_{i \pm r, 1}, \dots, y_{i \pm r, n'-1}$; on peut donc, au moyen des n' premiers rangs horizontaux de la table (Q), former tous ses rangs verticaux qui sont, chacun, des fonctions de x' , dans lesquelles i est invariable.

En passant du fini à l'infiniment petit, on voit avec évidence, que le nombre des fonctions arbitraires des équations aux différentielles partielles, peut être moindre que le plus haut degré de la différentielle dans ces équations.

16. Quoique les formules données dans les n^{os} 13 et 14, aient une grande généralité, il y a cependant quelques cas qui n'y sont pas compris. Ces cas ont lieu, lorsque l'équation $z = 0$ donne l'expression de $\frac{1}{t'}$ en $\frac{1}{t'}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que la plus haute puissance de $\frac{1}{t'}$ est multipliée par une fonction rationnelle de $\frac{1}{t'}$. Pour avoir alors l'expression de $y_{x, x'}$ en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante,

$$z = \frac{1}{t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t'} - c; \quad (a)$$

Cette équation donne

$$\frac{1}{t'} = \frac{\frac{a}{t'} + c + z}{\frac{1}{t'} - b};$$

par conséquent

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = \frac{u \cdot \left(\frac{a}{t'} + c + z \right)^x}{\left(\frac{1}{t'} - b \right)^x \cdot t'^{x'}}.$$

En développant le second membre de cette dernière équation, et repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura l'expression de $y_{x, x'}$; car cette quantité est le coefficient de $t^x \cdot t'^0$ dans

le développement de la fonction génératrice $\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}}$; et le coefficient $t^x \cdot t'^{x'}$ dans un terme quelconque du développement du second membre, tel que $u \cdot \frac{k \cdot z^k}{t^{x'} \cdot t'^{x'+r}}$, est $\nabla^k \cdot \mathcal{Y}_{0, x'+r}, \nabla \cdot \mathcal{Y}_{x, x'}$ étant le coefficient de la fonction génératrice $u \cdot z$, coefficient qui est ici égal à

$$\mathcal{Y}_{x+1, x'+1} - a \cdot \mathcal{Y}_{x, x'+1} - b \cdot \mathcal{Y}_{x+1, x'} - c \cdot \mathcal{Y}_{x, x'}.$$

Si l'on a $0 = \nabla \cdot \mathcal{Y}_{x, x'}$, les coefficients des termes affectés de z disparaîtront, et alors on aura l'expression de $\mathcal{Y}_{x, x'}$ en fonction de $\mathcal{Y}_{0, x'}, \mathcal{Y}_{0, x'+1}, \mathcal{Y}_{0, x'+2}$, etc.; Cette expression sera l'intégrale de l'équation

$$0 = \mathcal{Y}_{x+1, x'+1} - a \cdot \mathcal{Y}_{x, x'+1} - b \cdot \mathcal{Y}_{x+1, x'} - c \cdot \mathcal{Y}_{x, x'}. \quad (b)$$

Pour avoir cette expression, z peut être considéré comme nul, puisque l'on ne doit avoir égard qu'aux termes indépendans de z ; l'équation (a) devient ainsi

$$0 = \frac{1}{t \cdot t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c;$$

c'est ce que je nomme *équation génératrice* de l'équation (b) aux différences partielles. En effet, on obtient cette dernière équation en multipliant la précédente par u , et repassant des fonctions génératrices aux coefficients.

L'expression que l'on obtient par l'analyse précédente pour $\mathcal{Y}_{x, x'}$, est une suite infinie. On parviendra de cette manière à une expression finie. Reprenons la valeur de $\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}}$, et donnons-lui cette forme

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = \frac{u \cdot \left(\frac{1}{t'} - b + b\right)^{x'} \cdot \left[c + ab + a \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)\right]^x}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x}.$$

Si l'on développe le second membre de cette équation, par rapport aux puissances de $\frac{1}{t'} - b$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = & u \cdot \left\{ \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + x' \cdot b \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + \frac{x' \cdot (x'-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} + \text{etc.} \right\} \\ & \times \left\{ a^x + x \cdot (c + ab) \cdot \frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot (c + ab)^2 \cdot \frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} + \text{etc.} \right\}. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 V &= a^x, \\
 V^{(1)} &= x' \cdot b \cdot a^x + x \cdot (c + ab) \cdot a^{x-1}, \\
 V^{(2)} &= \frac{x' \cdot (x' - 1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 \cdot a^x + x' \cdot x \cdot b \cdot (c + ab) \cdot a^{x-1} + \frac{x \cdot (x - 1)}{1 \cdot 2} \cdot (c + ab)^2 \cdot a^{x-2}, \\
 V^{(3)} &= \frac{x' \cdot (x' - 1) \cdot (x' - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3 \cdot a^x + \frac{x' \cdot (x' - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x \cdot b^2 \cdot (c + ab) \cdot a^{x-1} \\
 &\quad + x' \cdot \frac{x \cdot (x - 1)}{1 \cdot 2} \cdot b \cdot (c + ab)^2 \cdot a^{x-2} \\
 &\quad + \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (c + ab)^3 \cdot a^{x-3},
 \end{aligned}$$

etc. ;

on aura

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = u \cdot \left\{ V \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + V^{(2)} \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} \dots + V^{(x')} \right\} \\
 \left\{ + \frac{V^{(x'+1)}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{V^{(x'+2)}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} \dots \dots + \frac{V^{(x'+x)}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x} \right\}.$$

Or l'équation

$$\frac{1}{t \cdot t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0$$

donne

$$\frac{1}{t'} - b = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab};$$

partant

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = u \cdot \left\{ V \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} \dots \dots + V^{(x')} \right\} \\
 \left\{ + \frac{V^{(x'+1)}}{c + ab} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c + ab)^2} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right)^2 \dots + \frac{V^{(x'+x)}}{(c + ab)^x} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right)^x \right\}.$$

Pour repasser maintenant des fonctions génératrices aux coefficients, nous observerons, 1°. que le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'}$ dans $\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}}$, est $\mathcal{V}_{x, x'}$; 2°. que ce même coefficient, dans un terme quelconque, tel que $u \cdot \left(\frac{1}{t'} - b\right)^r$, ou $u \cdot b^r \cdot \left(\frac{1}{bt'} - 1\right)^r$, est $b^r \cdot \Delta^r \cdot \left(\frac{y_{0, x'}}{b^{x'}}\right)$, la caractéristique Δ des différences se rapportant à la variabilité de x' , et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations;

tions; 3°. que ce coefficient dans $u.\left(\frac{1}{t} - a\right)^r$, est $a^r.\Delta^r.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$, la caractéristique Δ se rapportant à la variabilité de x , et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations; on aura donc avec ces conditions,

$$\begin{aligned} y_{x,x'} = & V.b^{x'}.\Delta^{x'}.\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) + V^{(1)}.b^{x'-1}.\Delta^{x'-1}.\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) \dots\dots + V^{(x')}.y_{0,x'}, \\ & + \frac{a}{c+ab}.V^{(x'+1)}.\Delta.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) + \frac{a^2}{(c+ab)^2}.V^{(x'+2)}.\Delta^2.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) \dots\dots \\ & \dots\dots + \frac{a^x}{(c+ab)^x}.V^{(x'+x)}.\Delta^x.\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right); \end{aligned}$$

c'est l'intégrale complète de l'équation (b) aux différences partielles. Il est clair que cette intégrale suppose que l'on connaît le premier rang horizontal et le premier rang vertical de la table (Q) du n° 14.

17. L'expression précédente de $y_{x,x'}$ offre cela de remarquable, savoir, que les caractéristiques Δ et Δ' des différences finies, ont pour exposans, les variables x et x' . En voici un autre exemple. Considérons l'équation aux différences partielles

$$0 = \Delta^n.y_{x,x'} + \frac{a}{\alpha}.\Delta^{n-1}.\Delta'.y_{x,x'} + \frac{b}{\alpha^2}.\Delta^{n-2}.\Delta'^2.y_{x,x'} + \text{etc.},$$

la caractéristique Δ se rapportant à la variable x dont l'unité est la différence, et la caractéristique Δ' se rapportant à la variable x' dont α est la différence. L'équation génératrice correspondante sera, par le numéro précédent,

$$0 = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{a}{\alpha}.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}.\left(\frac{1}{t'\alpha} - 1\right) + \frac{b}{\alpha^2}.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2}.\left(\frac{1}{t'\alpha} - 1\right)^2 + \text{etc.}$$

Cette équation donne les n suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} - 1 &= \frac{q}{\alpha}.\left(1 - \frac{1}{t'\alpha}\right), \\ \frac{1}{t} - 1 &= \frac{q'}{\alpha}.\left(1 - \frac{1}{t'\alpha}\right), \\ \frac{1}{t} - 1 &= \frac{q''}{\alpha}.\left(1 - \frac{1}{t'\alpha}\right), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$q, q', q'',$ etc. étant les n racines de l'équation

$$0 = z^n - a \cdot z^{n-1} + b \cdot z^{n-2} - \text{etc.}$$

L'équation

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{q}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{t^a}\right)$$

donne

$$\begin{aligned} \frac{u}{t^x, t'^{x'}} &= \frac{u}{t'^{x'}} \cdot \left(1 + \frac{q}{a} - \frac{q}{a} \cdot \frac{1}{t'^a}\right)^x \\ &= \frac{u}{t'^{x'}} (-1)^x \cdot \left\{ \frac{q^x}{a^x} \cdot \frac{1}{t'^{ax}} - x \cdot \frac{q^{x-1}}{a^{x-1}} \cdot \left(1 + \frac{q}{a}\right) \cdot \frac{1}{t'^{a(x-1)}} \right. \\ &\quad \left. + \text{etc.} \right\}. \end{aligned}$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$y_{x, x'} = (-1)^x \cdot \left\{ \frac{q^x}{a^x} \cdot y_{0, x' + ax} - x \cdot \frac{q^{x-1}}{a^{x-1}} \cdot \left(1 + \frac{q}{a}\right) \cdot y_{0, x' + a(x-1)} + \text{etc.} \right\}.$$

Le second membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$\left(1 + \frac{q}{a}\right)^{x + \frac{x'}{a}} \cdot \left(-\frac{q}{a}\right)^x \cdot \Delta^x \cdot \left[\left(\frac{q}{a + q}\right)^{\frac{x'}{a}} \cdot y_{0, x'}\right].$$

En désignant donc par la fonction arbitraire $\phi(x')$ la quantité

$$\left(\frac{q}{a + q}\right)^{\frac{x'}{a}} \cdot y_{0, x'}, \text{ l'expression de } y_{x, x'} \text{ deviendra}$$

$$y_{x, x'} = \left(1 + \frac{q}{a}\right)^{x + \frac{x'}{a}} \cdot \left(-\frac{q}{a}\right)^x \cdot \Delta^x \cdot \phi(x').$$

Cette valeur satisfait donc à l'équation proposée aux différences partielles. Il est visible que chacune des racines $q', q'',$ etc., fournit une valeur semblable, dans laquelle on peut introduire une autre arbitraire. Nous désignerons par $\phi_1(x'), \phi_2(x'),$ etc. ces nouvelles arbitraires. La réunion de toutes ces valeurs satisfera à l'équation proposée, parce qu'elle est linéaire, et cette réunion en sera l'intégrale complète qui est ainsi,

$$\begin{aligned}
 y_{x, x'} &= \left(1 + \frac{\alpha}{q}\right)^{x + \frac{x'}{\alpha}} \cdot \left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x \cdot \Delta^x \cdot \phi(x') \\
 &+ \left(1 + \frac{\alpha}{q'}\right)^{x + \frac{x'}{\alpha}} \cdot \left(-\frac{q'}{\alpha}\right)^x \cdot \Delta^x \cdot \phi_1(x') \\
 &+ \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx' ; si l'on observe d'ailleurs que

$$\left(1 + \frac{dx'}{q}\right)^{x + \frac{x'}{dx'}} = c^{\frac{x'}{q}},$$

comme il est facile de s'en convaincre, en prenant les logarithmes de chaque membre de cette équation, on aura

$$y'_{x, x'} = c^{\frac{x'}{q}} \cdot (-q)^x \cdot \left(\frac{d^x \cdot \phi(x')}{dx'^x}\right) + c^{\frac{x'}{q'}} \cdot (-q')^x \cdot \left(\frac{d^x \cdot \phi_1(x')}{dx'^x}\right) + \text{etc.};$$

c'est l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles finies et infiniment petites,

$$0 = \Delta^n \cdot y_{x, x'} + a \cdot \Delta^{n-1} \cdot \left(\frac{d \cdot y_{x, x'}}{dx'}\right) + b \cdot \Delta^{n-2} \cdot \left(\frac{d^2 \cdot y_{x, x'}}{dx'^2}\right) + \text{etc.}$$

Toutes les équations aux différences partielles que nous avons examinées jusqu'ici, n'ont point de dernier terme indépendant de la variable principale. Si elles en avaient, on y aurait égard, et l'on intégrerait ces équations par la méthode que nous avons donnée pour cet objet, relativement aux équations aux simples différences, et qu'il est facile d'appliquer aux équations à différences partielles.

Théorèmes sur le développement en séries, des fonctions de plusieurs variables.

18. Si l'on applique aux fonctions de plusieurs variables, la méthode du n° 11; on aura sur le développement de ces fonctions en séries, des théorèmes analogues à ceux du n° 10. Considérons

la fonction génératrice $u \cdot \left[\frac{1}{t \cdot t' \cdot t'' \cdot \text{etc.}} - 1 \right]^n$, et donnons-lui cette forme

$$u \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{t} - 1 \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{t'} - 1 \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{t''} - 1 \right) \cdot \text{etc.} - 1 \right]^n;$$

u étant supposé une fonction de $t, t', t'', \text{etc.}$, dans le développement de laquelle $\mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$ est le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'} \cdot t''^{x''} \cdot \text{etc.}$. Ce coefficient dans le développement de $u \cdot \left[\frac{1}{t \cdot t' \cdot t'' \cdot \text{etc.}} - 1 \right]^n$ sera $\Delta^n \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, $x, x', x'', \text{etc.}$ étant supposés varier de l'unité dans $\mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$. Ce même coefficient, dans le développement de la fonction génératrice

$$u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^r \cdot \left(\frac{1}{t'} - 1 \right)^{r'} \cdot \left(\frac{1}{t''} - 1 \right)^{r''} \cdot \text{etc.},$$

sera

$${}^r\Delta \cdot {}^{r'}\Delta \cdot {}^{r''}\Delta \cdot \text{etc.} \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}},$$

les caractéristiques ${}^r\Delta, {}^{r'}\Delta, {}^{r''}\Delta, \text{etc.}$ se rapportant respectivement aux variables $x, x', x'', \text{etc.}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\Delta^n \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} = \left\{ \left(1 + {}^r\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right) \cdot \left(1 + {}^{r'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right) \right\}^n; \\ \times \left(1 + {}^{r''}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right) \cdot \text{etc.} - 1$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques ${}^r\Delta, {}^{r'}\Delta, \text{etc.}$, les exposants des puissances de ${}^r\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}, {}^{r'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}, \text{etc.}$

En changeant n dans $-n$, la même équation subsiste encore, pourvu que l'on change, comme dans les n° 10 et 11, les caractéristiques $\Delta, {}^r\Delta, {}^{r'}\Delta, \text{etc.}$, lorsqu'elles ont un exposant négatif, en intégrales finies correspondantes, les signes $\Sigma, {}^r\Sigma, {}^{r'}\Sigma, \text{etc.}$ étant les caractéristiques des intégrales, correspondantes aux caractéristiques $\Delta, {}^r\Delta, {}^{r'}\Delta, \text{etc.}$ des différences.

Il est clair que $u \cdot \left[\frac{1}{t^i \cdot t'^{i'} \cdot t''^{i''} \cdot \text{etc.}} - 1 \right]^n$ est la fonction génératrice de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $\mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, x variant de i , x' variant de i' , x'' variant de i'' , etc.; or on a

$$u. \left[\frac{1}{i^i \cdot i'^{i'} \cdot i''^{i''} \text{etc.}} - 1 \right]^n = u. \left[\left(1 + \frac{1}{i} - 1 \right)^i \cdot \left(1 + \frac{1}{i'} - 1 \right)^{i'} \cdot \left(1 + \frac{1}{i''} - 1 \right)^{i''} \text{etc.} - 1 \right]^n,$$

en désignant donc par $\bar{\Delta}$ la caractéristique des différences, lorsque x varie de i , x' de i' , x'' de i'' , etc.; et par $\bar{\Sigma}$, la caractéristique intégrale correspondante, on aura

$$\bar{\Delta}^n \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} = \left[\left(1 + {}^i\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right)^i \cdot \left(1 + {}^{i'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right)^{i'} \text{etc.} - 1 \right]^n,$$

$$\bar{\Sigma}^n \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} = \frac{1}{\left[\left(1 + {}^i\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right)^i \cdot \left(1 + {}^{i'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}} \right)^{i'} \text{etc.} - 1 \right]^n};$$

pourvu que dans le développement du second membre de ces équations, on applique aux caractéristiques ${}^i\Delta$, ${}^{i'}\Delta$, etc., les exposans des puissances de ${}^i\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, ${}^{i'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, etc., et que l'on change les différences négatives en intégrales. On peut ainsi se dispenser d'indiquer les arbitraires que l'intégrale finie $\bar{\Sigma}^n$ doit introduire, parce qu'elles sont censées renfermées dans les intégrales que donne le développement de son expression.

Les deux équations précédentes ont encore lieu, en supposant que dans les différences ${}^i\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, ${}^{i'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, etc., x , x' , x'' , au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ϖ ; pourvu que dans la différence $\bar{\Delta} \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, x varie de $i\varpi$, x' de $i'\varpi$, x'' de $i''\varpi$, etc. Maintenant si l'on suppose ϖ infiniment petit, les différences ${}^i\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, ${}^{i'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', x'', \text{etc.}}$, etc., se changeront, la première dans $dx \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx} \right)$, la seconde dans $dx' \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx'} \right)$, etc. De plus, si l'on fait i , i' , i'' , etc. infiniment grands, et tels que l'on ait

$$idx = \alpha, \quad i'dx' = \alpha', \quad \text{etc.};$$

on aura

$$\left(1 + {}^i\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', \text{etc.}} \right)^i = \left\{ 1 + dx \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx} \right) \right\}^{\frac{\alpha}{dx}} = c^{\alpha \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx} \right)},$$

c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura pareillement

$$\left(1 + {}^{i'}\Delta \cdot \mathcal{Y}_{x, x', \text{etc.}} \right)^{i'} = c^{\alpha' \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx'} \right)},$$

et ainsi de suite ; partant

$$\bar{\Delta}^n \cdot y_{x, x', \text{etc.}} = \left[c^{\alpha \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx} \right) + \alpha' \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx'} \right) + \text{etc.} - 1 \right]^n,$$

$$\bar{\Sigma}^n \cdot y_{x, x', \text{etc.}} = \frac{1}{\left[c^{\alpha \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx} \right) + \alpha' \cdot \left(\frac{dy_{x, x', \text{etc.}}}{dx'} \right) + \text{etc.} - 1 \right]^n};$$

x variant de α , x' de α' , etc., dans les deux premiers membres de ces équations.

Si au lieu de supposer α infiniment petit, on le suppose fini, et i infiniment petit et égal à dx ; si l'on suppose encore i' , i'' , etc. infiniment petits et respectivement égaux à dx' , dx'' , etc., on aura

$$(1 + {}^i\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}})^i = (1 + {}^i\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}})^{dx} = 1 + dx \cdot \log(1 + {}^i\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}});$$

on aura pareillement

$$(1 + {}^{ii}\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}})^{ii} = 1 + dx' \cdot \log(1 + {}^{ii}\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}});$$

etc.

d'ailleurs $\bar{\Delta}^n \cdot y_{x, x', \text{etc.}}$ se change alors dans $d^n \cdot y_{x, x', \text{etc.}}$; on aura donc

$$d^n \cdot y_{x, x', \text{etc.}} = [dx \cdot \log(1 + {}^i\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}}) + dx' \cdot \log(1 + {}^{ii}\Delta \cdot y_{x, x', \text{etc.}}) + \text{etc.}]^n;$$

équation qui en faisant n négatif, subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales. Ces divers résultats sont analogues à ceux que nous avons trouvés dans le n° 10, relativement aux fonctions d'une seule variable; et l'on y retrouve l'analogie que nous avons observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales.

Considérations sur le passage du fini à l'infiniment petit.

19. Le passage du fini à l'infiniment petit, consiste à négliger les différences infiniment petites, par rapport aux quantités finies, et généralement les infiniment petits d'un ordre supérieur, relativement à ceux d'un ordre inférieur. Cette omission semble ôter à ce passage, la rigueur géométrique; mais pour se convaincre de son entière exactitude, il suffit de le considérer comme le résultat de

la comparaison des puissances homogènes d'une variable indéterminée, dans le développement des termes d'une équation qui subsiste, quelle que soit cette indéterminée; car il est clair que les termes affectés de la même puissance, doivent se détruire mutuellement.

Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons l'équation suivante que donne l'équation (q) du n° 10, en y faisant $n = 1$,

$${}^1\Delta.y_{x'} = (1 + dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}} - 1,$$

Δ est la caractéristique des différences finies, x' variant de α , et d est la caractéristique des différences, x' variant de dx' . L'équation précédente développée donne, en appliquant conformément à l'analyse du numéro cité, les exposans des puissances de $dy_{x'}$ à la caractéristique d ,

$${}^1\Delta.y_{x'} = \frac{\alpha}{dx'} \cdot dy_{x'} + \frac{(\alpha^2 - \alpha dx')}{1 \cdot 2 \cdot dx'^2} \cdot d^2y_{x'} + \text{etc.},$$

$dy_{x'}$ est égal à $y_{x'+dx'} - y_{x'}$. Supposons qu'en développant la fonction de $x' + dx'$, représentée par $y_{x'+dx'}$, on ait

$$y_{x'+dx'} = y_{x'} + dx' \cdot y'_{x'} + dx'^2 \cdot z_{x'} + \text{etc.};$$

on aura

$$dy_{x'} = dx' \cdot y'_{x'} + dx'^2 \cdot z_{x'} + \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$d^2y_{x'} = dx' \cdot dy'_{x'} + dx'^2 \cdot dz_{x'} + \text{etc.}$$

Développons pareillement $y'_{x'+dx'}$, $z_{x'+dx'}$, etc. suivant les puissances de dx' , et supposons que l'on ait

$$y'_{x'+dx'} = y'_{x'} + dx' \cdot y''_{x'} + dx'^2 \cdot s_{x'} + \text{etc.},$$

$$z_{x'+dx'} = z_{x'} + dx' \cdot z'_{x'} + \text{etc.};$$

on aura

$$dy'_{x'} = dx' \cdot y''_{x'} + dx'^2 \cdot s_{x'} + \text{etc.},$$

$$dz_{x'} = dx' \cdot z'_{x'} + \text{etc.};$$

partant

$$d^2y_{x'} = dx'^2 \cdot y''_{x'} + dx'^3 \cdot s_{x'} + \text{etc.} \\ + dx'^3 \cdot z'_{x'} + \text{etc.};$$

L'expression précédente de $'\Delta.y_{x'}$ deviendra ainsi,

$$\begin{aligned} '\Delta.y_{x'} &= \alpha.y'_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2}.y''_{x'} + \text{etc.} \\ &+ dx' \cdot \left\{ \begin{aligned} &\alpha.(z_{x'} - \frac{1}{2}y''_{x'} + \text{etc.}) \\ &+ \alpha^2.(s_{x'} + z''_{x'} + \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} \right\}; \quad (o) \\ &+ dx'^2.\text{etc.} \end{aligned}$$

dx' étant indéterminé, les termes indépendans de dx' doivent être égaux séparément entre eux; on a donc

$$' \Delta.y_{x'} = \alpha.y'_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2}.y''_{x'} + \text{etc.}$$

Maintenant, $y'_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne dans le Calcul différentiel, par $\frac{dy_{x'}}{dx'}$. Pareillement $y''_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y'_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne par $\frac{dy'_{x'}}{dx'}$, ou par $\frac{d^2y_{x'}}{dx'^2}$, et ainsi de suite; en substituant donc dans l'équation précédente, $y_{x'+\alpha} - y_{x'}$ au lieu de $'\Delta.y_{x'}$, on aura le théorème suivant,

$$y_{x'+\alpha} = y_{x'} + \alpha \cdot \frac{dy_{x'}}{dx'} + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y_{x'}}{dx'^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y_{x'}}{dx'^3} + \text{etc.}$$

Considéré comme résultat de la comparaison des termes indépendans de dx' , ce théorème ne laisse aucun doute sur son exactitude rigoureuse, et il est visible par l'analyse précédente, que cette comparaison revient à négliger les termes multipliés par dx' et ses puissances, relativement aux quantités finies; cette omission n'ôte donc rien à la rigueur du Calcul différentiel. Mais on voit de plus, *à priori*, que les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée dx' , doivent se détruire mutuellement, ce que l'on peut vérifier *à posteriori*; ainsi ce que l'on néglige comme infiniment petit est rigoureusement nul; ensorte que l'omission des infiniment petits, relativement aux quantités finies, n'est au fond qu'un moyen facile d'éliminer les termes superflus qui doivent disparaître dans le résultat final.

Ce

Ce rapprochement du calcul aux différences finies, et du calcul différentiel, met en évidence la rigueur des résultats de ce dernier calcul, et donne sa vraie métaphysique ; mais ses applications à l'étendue, à la durée et au mouvement, supposent de plus, le principe des limites. On peut, par un rapprochement semblable, éclaircir divers points de l'analyse infinitésimale, qui ont été des sujets de contestation parmi les géomètres : telle est la discontinuité des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différences partielles. Ceux qui ont rejeté cette discontinuité, se fondaient sur ce que l'analyse ordinaire des différences infiniment petites, suppose que les différentielles successives d'une fonction, doivent être infiniment petites relativement aux précédentes, ce qui n'a point lieu lorsque la fonction est discontinue. Pour éclaircir cette question délicate, il faut la considérer dans les différences finies, et observer ce qui arrive dans le passage de ces différences aux différences infiniment petites.

Prenons pour exemple l'équation suivante aux différences finies partielles

$$(y_{x+1, x'} - 2y_{x, x'} + y_{x-1, x'}) - (y_{x, x'+1} - 2y_{x, x'} + y_{x, x'-1}) = 0; \quad (a)$$

son équation génératrice est, par le n° 16,

$$t.\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-t'.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2=0;$$

et en suivant l'analyse donnée précédemment, il est facile d'en conclure que l'intégrale complète de l'équation proposée (a) est

$$y_{x, x'} = \phi(x + x') + \psi(x - x'),$$

$\phi(x+x')$ étant une fonction arbitraire de $x+x'$, et $\psi(x-x')$ étant une fonction arbitraire de $x-x'$. Il est facile d'ailleurs de s'assurer que cette valeur satisfait à la proposée, et qu'elle en est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme deux fonctions arbitraires.

Supposons présentement que dans la table suivante,

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_{0,0}, \mathcal{Y}_{1,0}, \mathcal{Y}_{2,0}, \mathcal{Y}_{3,0}, \dots, \mathcal{Y}_{n-1,0}, \mathcal{Y}_{n,0} \\ & \mathcal{Y}_{0,1}, \mathcal{Y}_{1,1}, \mathcal{Y}_{2,1}, \mathcal{Y}_{3,1}, \dots, \mathcal{Y}_{n-1,1}, \mathcal{Y}_{n,1} \\ & \mathcal{Y}_{0,2}, \mathcal{Y}_{1,2}, \mathcal{Y}_{2,2}, \mathcal{Y}_{3,2}, \dots, \mathcal{Y}_{n-1,2}, \mathcal{Y}_{n,2}; \quad (\text{Z}) \\ & \vdots \\ & \mathcal{Y}_{0,\infty}, \mathcal{Y}_{1,\infty}, \mathcal{Y}_{2,\infty}, \mathcal{Y}_{3,\infty}, \dots, \mathcal{Y}_{n-1,\infty}, \mathcal{Y}_{n,\infty} \end{aligned}$$

on connaisse les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{0,0}, \mathcal{Y}_{0,1}, \mathcal{Y}_{0,2} \dots \mathcal{Y}_{0,\infty} \\ \mathcal{Y}_{n,0}, \mathcal{Y}_{n,1}, \mathcal{Y}_{n,2} \dots \mathcal{Y}_{n,\infty}; \end{aligned}$$

et que l'on connaisse de plus tous les termes de ces deux colonnes ; on pourra déterminer toutes les valeurs de $\mathcal{Y}_{x,x'}$ qui tombent entre ces colonnes. Car si l'on veut former le troisième rang horizontal , on observera que l'équation (a) donne

$$\mathcal{Y}_{x,x'+1} = \mathcal{Y}_{x+1,x'} + \mathcal{Y}_{x-1,x'} - \mathcal{Y}_{x,x'-1}.$$

En faisant dans cette dernière équation, $x' = 1$, et successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3 \dots x = n-1$, on aura les valeurs de $\mathcal{Y}_{1,2}$, $\mathcal{Y}_{2,2}$, $\mathcal{Y}_{3,2} \dots \mathcal{Y}_{n-1,2}$, ou le troisième rang horizontal, au moyen des deux premiers rangs horizontaux. On formera de la même manière, le quatrième rang horizontal, et ainsi de suite à l'infini. Mais si l'on veut déterminer les valeurs de $\mathcal{Y}_{x,x'}$ qui tombent hors de la table (Z), les conditions précédentes ne suffisent pas, et il faut leur en ajouter d'autres.

Reprenons l'intégrale

$$\mathcal{Y}_{x,x'} = \varphi(x+x') + \psi(x-x');$$

et supposons que le second rang horizontal qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait

$$\psi(x-x') = \varphi(x-x');$$

on aura

$$\mathcal{Y}_{x,x'} = \varphi(x+x') + \varphi(x-x').$$

En faisant $x' = 0$, on a $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{x,0}$; partant

$$\mathcal{Y}_{x,x'} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{x-x',0}.$$

Il est facile de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée (a); mais elle n'en est qu'une intégrale particulière qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$\mathcal{Y}_{x,1} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{x+1,0} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{x-1,0}.$$

Tant que $x+x'$ sera égal ou moindre que n , et que $x-x'$ sera positif ou nul; on aura la valeur de $\mathcal{Y}_{x,x'}$, au moyen du premier

rang horizontal. Mais lorsque x croissant, $x + x'$ deviendra plus grand que n , ou lorsque $x - x'$ deviendra négatif; il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x',0}$ et de $y_{x-x',0}$, au moyen des deux colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces colonnes soient nuls, et que l'on ait ainsi $y_{0,x'} = 0$ et $y_{n,x'} = 0$. En faisant x nul dans l'équation

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0},$$

on aura

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

En faisant ensuite $x = n$ dans la même équation, on aura

$$y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

Si l'on change ensuite dans cette dernière équation x' en $n + x'$, on aura

$$y_{2n+x',0} = -y_{-x',0} = y_{x',0};$$

en changeant encore x' dans $n + x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = -y_{n-x',0};$$

et généralement, on aura

$$y_{2r n + x',0} = y_{x',0},$$

$$y_{(2r+1)n + x',0} = -y_{n-x',0}.$$

On pourra ainsi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x,x'}$ à l'infini, du côté des valeurs positives de x , et l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

De là résulte la construction suivante. Représentons les valeurs de $y_{x,0}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, par les ordonnées menées aux angles d'un polygone dont l'abscisse soit x , et dont les deux extrémités, que je désigne par A et B , aboutissent aux points où $x = 0$ et $x = n$. On portera ce polygone depuis $x = n$ jusqu'à $x = 2n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$; c'est-à-dire, une position telle, que les parties qui étaient au dessus de l'axe des abscisses x , se trouvent au-dessous, le point B restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la

même place que dans la première, et le point A répondant ainsi à l'abscisse $x = 2n$. On placera ensuite ce même polygone, depuis $x = 2n$ jusqu'à $x = 3n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, et par conséquent semblable à la première, de manière que le point A , dans cette troisième position, conserve la place qu'il avait dans la seconde, et qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$. En continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses; les ordonnées menées aux angles de cette suite de polygones, seront les valeurs de $y_{x,0}$, qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, A restant d'ailleurs à la même place dans ces deux positions. On placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à $x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B conservant la même place, et ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représentent les valeurs de $y_{x,0}$, qui répondent à x négatif. On aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$ en prenant la demi-somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ et $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer. Elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, et depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{0,x'} = 0$, et $y_{n,x'} = 0$, et que d'ailleurs le second rang horizontal de la table (Z) soit tel, que l'on ait

$$y_{x,1} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+1,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-1,0}.$$

On a par ce qui précède,

$$y_{x,x'+n} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x'+n,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x'-n,0};$$

de plus,

$$y_{x+x'+n,0} = -y_{n-x-x',0}, \quad y_{x-x'-n,0} = -y_{n-x+x',0};$$

donc

$$y_{x,x'+n} = -\frac{1}{2} \cdot y_{n-x-x',0} - \frac{1}{2} \cdot y_{n-x+x',0} = -y_{n-x,x'};$$

il suit de là que dans la table (Z), le $(n+x')$ ^{ième} rang horizontal, est

le $x'^{ième}$ rang pris avec un signe contraire et dans un ordre renversé ;
 ensorte que le terme $r^{ième}$ du rang $(n+x')^{ième}$ est le même que le
 terme $(n-r)^{ième}$ du $x'^{ième}$ rang pris avec un signe contraire. On a
 ensuite

$$y_{x, 2n+x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{2n+x+x', 0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x'-2n, 0};$$

on a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$y_{2n+x+x', 0} = y_{x+x', 0};$$

$$y_{x-x'-2n, 0} = -y_{2n+x'-x, 0} = -y_{x'-x} = y_{x-x'};$$

partant

$$y_{x, 2n+x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x', 0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x', 0} = y_{x, x'};$$

d'où il suit que le $(2n+x')^{ième}$ rang horizontal est exactement égal au
 $x'^{ième}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde tendue,
 dont la figure initiale soit quelconque, pourvu qu'elle soit très-
 rapprochée dans tous ses points, de l'axe des abscisses. Nommons x
 l'abscisse, t le tems, $y_{x, t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la
 corde, après le tems t . Concevons de plus l'abscisse x partagée
 dans une infinité de parties égales à dx , et que nous prendrons
 pour unité; ce qui revient à considérer x comme un nombre infini.
 Cela posé, on aura par les principes de dynamique,

$$\left(\frac{ddy_{x, t}}{dt^2}\right) = \frac{a^2}{dx^2} \cdot (y_{x+1, t} - 2y_{x, t} + y_{x-1, t});$$

a étant un coefficient constant dépendant de la tension et de la
 grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$; on aura $dt = \frac{dx'}{a}$, et $y_{x, t}$
 deviendra une fonction de x et de x' , que nous désignons par $y_{x, x'}$;
 or la grandeur de dt étant arbitraire, on peut la supposer telle, que
 la variation de x' soit égale à celle de x , que nous avons prise pour
 l'unité; l'équation précédente devient ainsi

$$y_{x, x'+1} - 2y_{x, x'} + y_{x, x'-1} = y_{x+1, x'} - 2y_{x, x'} + y_{x-1, x'},$$

x et x' étant ici des nombres infinis. Cette équation est la même
 que celle que nous venons de considérer; ainsi la construction
 géométrique que nous avons donnée précédemment, peut-être

employée dans ce cas : le polygone dont les ordonnées des angles sont représentées par $y_{x,0}$, est ici la figure initiale de la corde ; mais il faut pour cela supposer la longueur n , divisée dans une infinité de parties égales à dx . Il faut de plus que la corde soit fixe à ses extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0, y_{n,x'} = 0$. D'ailleurs l'équation de condition

$$y_{x,1} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+1,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-1,0};$$

ou, ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \frac{1}{2} \cdot (y_{x+1,0} - 2 \cdot y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

se change en celle-ci,

$$dt \cdot \left(\frac{dy_{x,0}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \cdot dx^2 \cdot \left(\frac{d^2 y_{x,0}}{dx^2} \right);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dy_{x,0}}{dt} \right) = 0.$$

Or $\left(\frac{dy_{x,0}}{dt} \right)$ est la vitesse initiale de la corde ; cette vitesse doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la construction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que soit sa figure initiale, pourvu cependant que dans tous ses points, $y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0}$ soit un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que deux élémens contigus de la corde, ne forment point un angle fini. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle du problème puisse subsister, et pour que celle-ci

$$dt \cdot \left(\frac{dy_{x,0}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \cdot (y_{x+1,0} - 2 \cdot y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\left(\frac{dy_{x,0}}{dt} \right) = 0$. Mais d'ailleurs il est évident, par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être discontinue et formée d'un nombre quelconque d'arcs de courbes différentes, pourvu que ces arcs se touchent.

Les diverses situations de la corde dans son mouvement, sont représentées par les rangs horizontaux de la table (Z) ; et comme

les rangs qui correspondent aux valeurs de x' , $x' + 2n$, $x' + 4n$, etc. sont les mêmes par ce qui précède, il en résulte que la corde revient à la même situation après les tems t , $t + \frac{2n}{a}$, $t + \frac{4n}{a}$, etc.

On voit encore par la construction géométrique donnée ci-dessus, que si l'on conçoit une suite de cordes liées entre elles, et placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, comme dans cette construction; toutes ces cordes vibreront de la même manière, ensorte que leurs figures initiales étant les mêmes, leurs figures seront constamment pareilles. On peut même ne fixer que les deux extrémités de cette suite, et laisser leurs nœuds entièrement libres; car les élémens des deux cordes au point de leur jonction, étant en ligne droite et également tendus, ce point n'a aucune tendance à se mouvoir, et doit conséquemment rester immobile; ce que l'expérience confirme.

Cette analyse des cordes vibrantes, établit d'une manière incontestable, la possibilité d'admettre des fonctions discontinues dans ce problème; et l'on en doit généralement conclure que ces fonctions peuvent être employées dans tous les problèmes qui dépendent d'équations à différences partielles infiniment petites, pourvu qu'elles puissent subsister avec ces équations et avec les conditions du problème. On peut en effet considérer ces équations, comme des cas particuliers d'équations aux différences finies, dans lesquelles on suppose que les variables deviennent infinies; or rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies partielles, il est visible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales, ne sont point assujéties à la loi de continuité, et que les constructions de ces équations, au moyen de polygones, ont lieu quelle que soit la nature de ces polygones. Maintenant lorsqu'on passe du fini à l'infiniment petit, ces polygones se changent dans des courbes qui, par conséquent, peuvent être discontinues; ainsi la loi de continuité n'est nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales, ni dans les constructions géométriques qui les représentent. Il faut seulement observer que si l'équation aux différentielles partielles en y_x, x' est de l'ordre n , il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\left(\frac{d^{n-r}}{dx^r, d{x'}^{n-r}} y_{x, x'}\right)$.

r et s étant des nombres entiers positifs, s pouvant être nul ; c'est-à-dire que la différentielle de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est indispensable pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister ; parce que toute équation différentielle partielle suppose que les différentielles partielles de $y_{x,x'}$ dont elle est formée, et divisées par les puissances respectives de dx et de dx' , sont des quantités finies et comparables entre elles ; mais rien n'oblige d'admettre la même condition relativement aux différences de $y_{x,x'}$ de l'ordre n ou d'un ordre supérieur. En prenant pour fonctions arbitraires, les différences les plus élevées des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles ; cette intégrale ne renfermera plus alors que des fonctions arbitraires et leurs intégrales successives qui sont continues, parce qu'en général l'intégrale $\int ds \cdot \phi(s)$ est continue dans le cas même où la fonction $\phi(s)$ ne l'est pas. La condition précédente se réduit donc à ce que la différence $(n-1)^{\text{ième}}$ de chaque fonction arbitraire soit continue, c'est-à-dire que sa différentielle soit infiniment plus petite. Il ne doit donc point y avoir de saut entre deux tangentes consécutives de la courbe qui représente la fonction arbitraire de l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du second ordre ; ainsi dans le problème des cordes vibrantes que nous venons de discuter, il est nécessaire et il suffit que deux élémens quelconques contigus de la figure initiale de la corde, forment entre eux un angle infiniment peu différent de deux angles droits. Il ne doit point y avoir de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs de la courbe qui représente la fonction arbitraire continue dans l'intégrale, si l'équation aux différences partielles est du troisième ordre ; et ainsi de suite.

Considérations générales sur les fonctions génératrices.

20. Il est souvent utile de connaître la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation aux différences finies, ordinaires ou partielles ; parce que l'analyse offrant divers moyens pour développer les fonctions en séries, on peut ainsi obtenir d'une manière fort simple, la valeur de la quantité cherchée. Il résulte
du

du n° 5, que la quantité y_x , donnée par l'équation aux différences finies

$$0 = a \cdot y_x + b \cdot y_{x+1} + c \cdot y_{x+2} + \dots + p \cdot y_{x+n-1} + q \cdot y_{x+n},$$

est le coefficient de t^x dans le développement de la fonction

$$\frac{A + B \cdot t + C \cdot t^2 + \dots + H \cdot t^{n-1}}{a \cdot t^n + b \cdot t^{n-1} + c \cdot t^{n-2} + \dots + p \cdot t + q},$$

$A, B, C, \dots H$ étant des constantes arbitraires. En effet, si l'on compare cette fonction à celle-ci,

$$y_0 + y_1 \cdot t + y_2 \cdot t^2 + \dots + y_x \cdot t^x + y_{x+1} \cdot t^{x+1} + \dots + y_\infty \cdot t^\infty;$$

on aura, en faisant disparaître le dénominateur, et en vertu de l'équation aux différences en y_x ,

$$\begin{aligned} A + B \cdot t + C \cdot t^2 + \dots + H \cdot t^{n-1} &= t^{n-1} \cdot (b \cdot y_0 + c \cdot y_1 + \text{etc.}) \\ &+ t^{n-2} \cdot (c \cdot y_0 + e \cdot y_1 + \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

en égalant ensuite les puissances homogènes de t , on aura les valeurs de A, B, C , etc. au moyen des n valeurs $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$; on aura donc ainsi la fonction génératrice de y_x .

Si l'on suppose $\Sigma^i \cdot y_x = y'_x$, on aura $y_x = \Delta^i \cdot y'_x$; et alors l'équation

$$0 = a \cdot y_x + b \cdot y_{x+1} + c \cdot y_{x+2} + \dots + q \cdot y_{x+n},$$

devient

$$0 = a \cdot \Delta^i \cdot y'_x + b \cdot \Delta^i \cdot y'_{x+1} + \dots + q \cdot \Delta^i \cdot y'_{x+n};$$

ce qui donne en intégrant,

$$a \cdot y'_x + b \cdot y'_{x+1} + \dots + q \cdot y'_{x+n} = M \cdot x^{i-1} + N \cdot x^{i-2} + \text{etc.},$$

M, N , etc. étant des constantes arbitraires. Par le n° 2, u étant la fonction génératrice de y_x , celle de y'_x est

$$\frac{u \cdot t^i + A' \cdot t^{i-1} + B' \cdot t^{i-2} + \text{etc.}}{(1-t)^i};$$

la fonction génératrice de y'_x ou de la quantité donnée par l'équa-

tion précédente en y'_x est donc

$$\frac{(A+B.t+C.t^2+\dots+H.t^{n-1}).t^i+(A'.t^{i-1}+B'.t^{i-2}+\text{etc.}).(a.t^n+b.t^{n-1}+\dots+q)}{(1-t)^i.(a.t^n+b.t^{n-1}+c.t^{n-2}+\dots+p.t+q)}.$$

Concevons maintenant que a, b, c , etc. soient des fonctions rationnelles et entières de t' de l'ordre n , et que A, B, C , etc. soient des fonctions arbitraires de la même quantité; y_x sera fonction de x et de t' . En la développant par rapport aux puissances de t' , nous nommerons $y_{x, x'}$ le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce développement. Cela posé, si l'on suppose

$$\begin{aligned} a &= a'.t'^n + b'.t'^{n-1} + c'.t'^{n-2} + \text{etc.}, \\ b &= a''.t'^n + b''.t'^{n-1} + c''.t'^{n-2} + \text{etc.}, \\ c &= a'''.t'^n + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

L'équation différentielle précédente en y_x donnera, en comparant les coefficients de la puissance $t'^{x'+n}$, l'équation suivante aux différences partielles en $y_{x, x'}$,

$$\begin{aligned} 0 &= a'.y_{x, x'} + b'.y_{x, x'+1} + c'.y_{x, x'+2} + \text{etc.} \\ &\quad + a''.y_{x+1, x'} + b''.y_{x+1, x'+1} + \text{etc.} \\ &\quad + a'''.y_{x+2, x'} + \text{etc.} \\ &\quad + \text{etc.}; \end{aligned}$$

la fonction génératrice de la variable $y_{x, x'}$ de cette équation sera donc

$$\begin{aligned} &\frac{A+B.t+C.t^2+\dots+H.t^{n-1}}{a'.t^n.t'^n+b'.t^n.t'^{n-1}+c'.t^n.t'^{n-2}+\text{etc.}} \\ &\quad + \frac{a''.t^{n-1}.t'^n+b''.t^{n-1}.t'^{n-1}+\text{etc.}}{a''.t^{n-1}.t'^n+b''.t^{n-1}.t'^{n-1}+\text{etc.}} \\ &\quad + \frac{a'''.t^{n-2}.t'^n+\text{etc.}}{a'''.t^{n-2}.t'^n+\text{etc.}} \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

A, B, C , etc. étant des fonctions arbitraires de t' , elles donneront par leur développement, les fonctions arbitraires qui doivent entrer dans l'expression de $y_{x, x'}$.

On peut encore déterminer les fonctions génératrices des équations aux différences finies, dans lesquelles les coefficients sont variables. Considérons pour cela l'équation aux différences

$$\begin{aligned} 0 &= a.y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + \dots + q.y_{x+n} \\ &\quad + x.(a'.y_x + b'.y_{x+1} + c'.y_{x+2} + \dots + q'.y_{x+n}) \\ &\quad + x^2.(a''.y_x + b''.y_{x+1} + c''.y_{x+2} + \dots + q''.y_{x+n}) \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on nomme u la fonction génératrice de y_x , on aura, en vertu de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} & u \cdot \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \dots + \frac{q}{t^n} \right) \\ & + t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left\{ u \cdot \left(a' + \frac{b'}{t} + \frac{c'}{t^2} \dots + \frac{q'}{t^n} \right) \right\} \\ & + t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left\{ t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left\{ u \cdot \left(a'' + \frac{b''}{t} + \frac{c''}{t^2} \dots + \frac{q''}{t^n} \right) \right\} \right\} \\ & + \text{etc.} \\ & = A + B \cdot t + C \cdot t^2 \dots + H \cdot t^{n-1}, \end{aligned}$$

$A, B, C, \dots, H$ étant des constantes arbitraires qui dépendent des valeurs de $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. En effet, si l'on substitue dans cette équation, la valeur précédente de u en série; on voit qu'en vertu de l'équation différentielle proposée, tous les coefficients de la même puissance de t , disparaissent lorsque cette puissance est égale ou plus grande que n ; et la comparaison des puissances inférieures donnent un nombre n d'équations qui déterminent les constantes A, B, C , etc., au moyen des valeurs $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

L'équation différentielle précédente n'est intégrable généralement, que dans le cas où elle est du premier ordre, et alors les coefficients de l'équation aux différences finies en y_x ne renferment que la première puissance de x : dans ce dernier cas, on peut obtenir la fonction génératrice u par des quadratures.

21. La connaissance des fonctions génératrices des équations différentielles, donne l'expression des intégrales de ces équations, au moyen de quadratures définies. Reprenons pour cela, l'équation

$$u = y_0 + y_1 \cdot t + y_2 \cdot t^2 \dots + y_x \cdot t^x + y_{x+1} \cdot t^{x+1} \dots + y_\infty \cdot t^\infty.$$

Substituons dans ses deux membres, $c^{x\varpi} \sqrt{-1}$ au lieu de t^x , c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; et nommons U , ce que devient alors u . En multipliant l'équation par $c^{-x\varpi} \sqrt{-1} d\varpi$, et intégrant, on aura

$$\int U \cdot d\varpi \cdot c^{-x\varpi} \sqrt{-1} = \int d\varpi \cdot \left\{ y_0 \cdot c^{-x\varpi} \sqrt{-1} + y_1 \cdot c^{-(x-1)\varpi} \sqrt{-1} \dots \dots \right. \\ \left. \dots + y_x + y_{x+1} \cdot c^{\varpi} \sqrt{-1} + \text{etc} \right\}.$$

Si l'on substitue pour $c^{\pm r\varpi} \sqrt{-1}$, sa valeur $\cos r\varpi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin r\varpi$,

et si l'on prend l'intégrale depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, 2π étant la circonférence, le second membre se réduit à $2\pi y_x$; on a donc

$$y_x = \frac{1}{2\pi} \cdot \int U \cdot d\varpi \cdot (\cos x\varpi - \sqrt{-1} \cdot \sin x\varpi)$$

mais cette formule a l'inconvénient d'introduire des imaginaires dont on peut se débarrasser de la manière suivante.

Considérons l'équation

$$0 = ay_x + b \cdot y_{x+1} \dots \dots \dots + q \cdot y_{x+n} \\ + x \cdot (a' \cdot y_x + b' \cdot y_{x+1} \dots \dots + q' \cdot y_{x+n});$$

et supposons

$$y_x = \int t^{-x-1} \cdot T \cdot dt,$$

T étant une fonction de t qu'il s'agit de déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En substituant pour y_x cette valeur dans l'équation différentielle en y_x , et observant que l'on a

$$x \cdot \int t^{-x-1} dt \cdot \frac{T}{t^r} = -t^{-x} \cdot \frac{T}{t^r} + \int t^{-x} \cdot d \left(\frac{T}{t^r} \right),$$

ce qui fait disparaître le coefficient variable x ; on aura

$$0 = -T \cdot t^{-x} \cdot \left(a' + \frac{b'}{t} \dots \dots + \frac{q'}{t^n} \right) \\ + \int t^{-x-1} \cdot dt \cdot \left\{ T \cdot \left(a + \frac{b}{t} \dots \dots + \frac{q}{t^n} \right) \right. \\ \left. + t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left[T \cdot \left(a' + \frac{b'}{t} \dots \dots + \frac{q'}{t^n} \right) \right] \right\}. \quad (h)$$

En égalant à zéro la partie sous le signe $\int$, on aura

$$0 = T \cdot \left(a + \frac{b}{t} \dots \dots + \frac{q}{t^n} \right) \\ + t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left[T \cdot \left(a' + \frac{b'}{t} \dots \dots + \frac{q'}{t^n} \right) \right].$$

Cette équation intégrée donne T en fonction de t . Elle est la même que l'équation différentielle en u du numéro précédent, en négligeant dans celle-ci le terme indépendant de u . La valeur de T est donc la partie de u qui est indépendante de ce terme.

Pour avoir les limites de l'intégrale $\int t^{-x-1} \cdot T \cdot dt$, on égalera à zéro la partie hors du signe $\int$, dans l'équation (h); ce qui donne

$$0 = T \cdot t^{-x} \cdot \left(a' + \frac{b'}{t} \dots \dots + \frac{q'}{t^n} \right).$$

Cette équation est satisfaite en supposant t infini, et en le supposant égal à l'une des racines de l'équation

$$0 = a' + \frac{b'}{t} \dots + \frac{q'}{t^n};$$

on aura ainsi $n + 1$ limites de l'intégrale $\int t^{-x-1} \cdot T \cdot dt$; en multipliant ensuite chaque intégrale comprise entre une de ces limites, et les n autres limites, par une constante arbitraire; la somme de ces produits sera la valeur complète de y_x .

On peut étendre cette méthode, aux équations à différences partielles finies et infiniment petites, comme nous le ferons voir dans la seconde partie de ce Livre.

On voit par ce qui précède, l'analogie qui existe entre les fonctions génératrices des variables, et les intégrales définies au moyen desquelles ces variables peuvent être exprimées. Pour la rendre encore plus sensible, considérons l'équation

$$y_x = \int T \cdot dt \cdot t^{-x},$$

T étant une fonction de t , et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées. On aura, x variant de α

$$\Delta \cdot y_x = \int T \cdot dt \cdot t^{-x} \cdot \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right),$$

et généralement,

$$\Delta^i \cdot y_x = \int T \cdot dt \cdot t^{-x} \cdot \left(\frac{1}{t^\alpha} - 1 \right)^i;$$

en faisant i négatif, la caractéristique Δ se change dans le signe intégral Σ . Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx ; on aura $\frac{1}{t} = 1 + dx \cdot \log. \frac{1}{t}$; on aura donc, en observant qu'alors $\Delta^i \cdot y_x$ se change dans $d^i y_x$,

$$\frac{d^i y_x}{dx^i} = \int T \cdot dt \cdot t^{-x} \cdot \left(\log. \frac{1}{t} \right)^i.$$

On trouvera de la même manière, et en adoptant les dénominations du n° 2,

$$\nabla^i \cdot y_x = \int T \cdot dt \cdot t^{-x} \cdot \left(a + \frac{b}{t} \dots + \frac{q}{t^n} \right)^i.$$

Ainsi la même analyse qui donne les fonctions génératrices des dérivées successives des variables, donne les fonctions sous le signe $\int$, des intégrales définies qui expriment ces dérivées. La caractéristique ∇^i n'exprime, à proprement parler, qu'un nombre i d'opérations consécutives; la considération des fonctions génératrices réduit ces opérations à des élévations d'un polynome à ses diverses puissances; et la considération des intégrales définies donne directement l'expression de $\nabla^i.y_x$, dans le cas même où l'on supposerait i un nombre fractionnaire.

Mais le grand avantage de cette transformation des expressions analytiques, en intégrales définies, est de fournir une approximation aussi commode que convergente, de ces expressions, lorsqu'elles sont formées d'un grand nombre de termes et de facteurs; c'est ce qui a lieu dans la théorie des probabilités, quand le nombre des événemens que l'on considère est très-grand. Alors le calcul numérique des résultats auxquels on est conduit par la solution des problèmes, devient impraticable, et il est indispensable d'avoir pour ce calcul, une méthode d'approximation d'autant plus convergente, que ces résultats sont plus compliqués.

Leur expression en intégrales définies, procure cet avantage, et celui de donner les lois suivant lesquelles la probabilité des résultats indiqués par les événemens, approche de la certitude à mesure que les événemens se multiplient, lois dont la connaissance est l'un des objets les plus intéressans de la théorie des probabilités. Ce fut à l'occasion d'un problème de ce genre, dont la solution dépendait de l'expression du terme moyen du binome élevé à une grande puissance, que Stirling transforma cette expression dans une série très-convergente : son résultat peut être regardé comme une des choses les plus ingénieuses que l'on ait trouvées sur les suites. Il est surtout remarquable, en ce que dans une recherche qui semble n'admettre que des quantités algébriques, il introduit une quantité transcendante, savoir, la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre. Mais la méthode de Stirling, fondée sur un théorème de Wallis, et sur l'interpolation des suites, laissait à désirer une méthode directe qui s'étendit à toutes les fonctions composées d'un grand nombre de termes

et de facteurs. Telle est la méthode dont je viens de parler, et que j'ai donnée d'abord dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1778, et ensuite avec plus d'étendue, dans les *Mémoires de la même académie*, pour l'année 1782. Le développement de cette méthode va être l'objet de la seconde Partie de ce Livre, et complètera ainsi le Calcul des fonctions génératrices.

Les séries auxquelles cette méthode conduit, renferment le plus souvent, la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre; et c'est la raison pour laquelle Stirling l'a rencontrée dans le cas particulier qu'il a considéré; mais quelquefois elles dépendent d'autres transcendentes dont le nombre est infini.

Les limites des intégrales définies que cette méthode réduit en séries convergentes, sont, comme on vient de le voir, données par les racines d'une équation que l'on peut nommer *équation des limites*. Mais une remarque très-importante dans cette analyse, et qui permet de l'étendre aux fonctions que la théorie des probabilités présente le plus souvent, est que les séries auxquelles on parvient, ont également lieu dans le cas même où, par des changemens de signe dans les coefficients de l'équation des limites, ses racines deviennent imaginaires. Ces passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, dont les premières applications ont paru, si je ne me trompe, dans les *Mémoires* cités, m'ont conduit dans ces *Mémoires*, aux valeurs de plusieurs intégrales définies, qui offrent cela de remarquable, savoir, qu'elles dépendent à-la-fois de ces deux transcendentes, le rapport de la circonférence au diamètre, et le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On peut donc considérer ces passages, comme des moyens de découvertes, pareils à l'induction dont les géomètres font depuis long-tems usage. Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précautions et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats. Leur rapprochement des méthodes directes, servant à les confirmer et à faire voir la grande généralité de l'analyse, et pouvant par cette raison, intéresser les géomètres; j'ai insisté particulièrement sur ces passages qu'Euler considérait en même tems que moi, et dont il a fait plusieurs applications curieuses, mais qui n'ont paru que depuis la publication des *Mémoires* cités.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DES APPROXIMATIONS DES FORMULES QUI SONT
FONCTIONS DE TRÈS-GRANDS NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

*De l'intégration par approximation, des différentielles qui
renferment des facteurs élevés à de grandes puissances.*

22. **O**N vient de voir que l'on peut toujours ramener à l'intégration de semblables différentielles, les formules données par la théorie des fonctions génératrices. Nous allons donc nous occuper d'abord avec étendue, de l'approximation de ce genre d'intégrales.

Si l'on désigne par $u, u', u'',$ etc. et ϕ , des fonctions quelconques de x , et par $s, s', s'',$ etc., de très-grands nombres; toute fonction différentielle qui renferme des fonctions élevées à de grandes puissances, sera comprise dans le terme $\phi dx . u' . u'' . u''' .$ etc. Pour avoir en série convergente, son intégrale prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\theta$, on fera

$$\phi . u' . u'' . u''' . \text{etc.} = y;$$

et en désignant par Y ce que devient y lorsqu'on y change x en θ , on supposera

$$y = Y . c^{-1},$$

c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura ainsi

$$t = \log \frac{y}{y}.$$

Si l'on considère x comme une fonction de t donnée par cette équation; on aura, en supposant dt constant,

$$x = \theta + t \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3x}{dt^3} + \text{etc.},$$

t devant être supposé nul après les différentiations, dans les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc. On a généralement

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{1}{dt} \cdot d \cdot \frac{1}{dt} \cdot d \cdot \frac{1}{dt} \cdot \dots \cdot d \cdot \frac{dx}{dt};$$

la caractéristique différentielle se rapportant à tout ce qui la suit, et dt pouvant varier d'une manière quelconque dans le second membre de cette équation; de plus, si l'on différencie l'expression précédente de t en y , et si l'on désigne $-\frac{y dx}{dy}$ par v , on aura $dt = \frac{dx}{v}$; on aura donc

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{v \cdot d \cdot v \cdot d \cdot v \cdot \dots \cdot d v}{dx^{n-1}},$$

dx étant supposé constant dans le second membre de cette équation. Ainsi, en nommant U ce que devient v lorsqu'on y change x en θ ; la valeur de $\frac{d^n x}{dt^n}$ qui répond à $x = \theta$, ou, ce qui revient au même, à $t = 0$, sera égal à

$$\frac{U \cdot d \cdot U \cdot d \cdot U \cdot \dots \cdot d U}{dx^{n-1}};$$

on aura donc

$$x = \theta + U \cdot t + \frac{U \cdot dU}{1.2 \cdot dx} \cdot t^2 + \frac{U \cdot d \cdot U \cdot dU}{1.2.3 \cdot dx^2} \cdot t^3 + \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$dx = U \cdot dt \cdot \left(1 + \frac{dU}{dx} \cdot t + \frac{d \cdot U \cdot dU}{1.2 \cdot dx^2} \cdot t^2 + \text{etc.} \right);$$

par conséquent

$$\int y dx = UY \cdot \int dt \cdot c^{-t} \cdot \left(1 + \frac{dU}{d\theta} \cdot t + \frac{d \cdot U \cdot dU}{1 \cdot 2 \cdot d\theta^2} \cdot t^2 + \text{etc.} \right).$$

Si l'on prend l'intégrale depuis $t=0$ jusqu'à t infini, on aura généralement

$$\int t^n dt \cdot c^{-t} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n;$$

partant

$$\int y dx = UY \cdot \left(1 + \frac{dU}{d\theta} + \frac{d \cdot U \cdot dU}{d\theta^2} + \frac{d \cdot U \cdot d \cdot U \cdot dU}{d\theta^3} + \text{etc.} \right);$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=\theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini.

Nommons Y' et U' , ce que deviennent y et u lorsqu'on y change x en θ' ; on aura pareillement

$$\int y dx = U'Y' \cdot \left(1 + \frac{dU'}{d\theta'} + \frac{d \cdot U' \cdot dU'}{d\theta'^2} + \frac{d \cdot U' \cdot dU' \cdot dU'}{d\theta'^3} + \text{etc.} \right);$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x=\theta'$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. En retranchant donc ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\begin{aligned} \int y dx = & UY \cdot \left(1 + \frac{dU}{d\theta} + \frac{d \cdot U \cdot dU}{d\theta^2} + \frac{d \cdot U \cdot d \cdot U \cdot dU}{d\theta^3} + \text{etc.} \right) \\ & - U'Y' \cdot \left(1 + \frac{dU'}{d\theta'} + \frac{d \cdot U' \cdot dU'}{d\theta'^2} + \frac{d \cdot U' \cdot d \cdot U' \cdot dU'}{d\theta'^3} + \text{etc.} \right); \quad (A) \end{aligned}$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x=\theta$ jusqu'à $x=\theta'$, en sorte que la considération de t disparaît dans cette formule. Si θ et θ' étaient primitivement renfermés dans y , il ne faudrait faire varier que les quantités θ et θ' qu'introduisent dans U et U' , les changemens de x en θ et θ' dans la fonction v .

La formule (A) sera très-convergente, si v ou $-\frac{y dx}{dy}$ est une très-petite quantité; or y étant, par la supposition, égal à $\varphi \cdot u^i \cdot u'^j \cdot u''^k \dots$; on a

$$v = - \frac{1}{\frac{s du}{u dx} + \frac{s' du'}{u' dx} + \frac{s'' du''}{u'' dx} + \text{etc.} + \frac{d\varphi}{\varphi dx}}.$$

Ainsi dans le cas où $s, s', s'',$ etc. sont de très-grands nombres, v sera fort petit; et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α étant une fraction très-petite, la fonction v sera de l'ordre α , et les termes successifs de la formule (A) seront respectivement des ordres $\alpha, \alpha^2, \alpha^3,$ etc.

Cette formule cesserait d'être convergente, si la supposition de $x = \theta$ rendait très-petit le dénominateur de l'expression de v . Supposons, par exemple, que $(x-a)^\mu$ soit un facteur de ce dénominateur; il est clair que les termes successifs de la formule (A) sont respectivement divisés par $(\theta-a)^\mu, (\theta-a)^{2\mu+1}, (\theta-a)^{3\mu+2},$ etc., et deviendront très-considérables, si θ est peu différent de a ; la convergence de cette formule exige donc que $(\theta-a)^\mu, (\theta'-a)^\mu$ soient plus grands que α ; elle ne peut conséquemment être employée dans l'intervalle où $(x-a)^\mu$ est égal ou moindre que α ; mais dans ce cas, on pourra faire usage de la méthode suivante.

23. Si l'on nomme Y ce que devient y lorsqu'on y change x en a ; il est visible que $(x-a)^\mu$ étant un facteur de $-\frac{dy}{ydx}$, ou,

ce qui revient au même, de $\frac{d \cdot \log \frac{Y}{y}}{dx}$; $(x-a)^{\mu+1}$ sera un facteur de $\log \frac{Y}{y}$. Soit donc

$$y = Y \cdot e^{-t^{\mu+1}},$$

$$v = \frac{x-a}{(\log Y - \log y)^{\frac{1}{\mu+1}}};$$

on aura

$$x = a + vt,$$

v ne devenant point infini, par la supposition de $x = a$. Si l'on désigne ensuite par $U, \frac{d \cdot U^2}{dx}, \frac{d^2 \cdot U^3}{dx^2},$ etc. ce que deviennent $v, \frac{dv^2}{dx}, \frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2},$ etc., lorsqu'on y change x en a après les différentiations; on aura, par la formule (p) du n° 21 du second Livre de *la Mécanique céleste*,

$$x = a + U \cdot t + \frac{d \cdot U^2}{1 \cdot 2 \cdot dx} \cdot t^2 + \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^2} \cdot t^3 + \text{etc.};$$

ce qui donne

$$f_y dx = Y \cdot f dt \cdot e^{-t^{\mu+1}} \cdot \left(U + \frac{d \cdot U^2}{dx} \cdot t + \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} \cdot t^2 + \text{etc.} \right); \quad (\text{B})$$

cette formule pourra être employée dans tout l'intervalle où x diffère très-peu de a ; elle peut conséquemment servir de supplément à la formule (A) du numéro précédent; mais au lieu d'être ordonnée, comme elle, par rapport aux puissances de α , elle ne

l'est que par rapport aux puissances de $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$; car il est visible que dans ce dernier cas, v n'est que de l'ordre $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$.

Pour déterminer plus facilement les quantités $U, \frac{d \cdot U^2}{dx^2}, \text{etc.}$, supposons

$$\log Y - \log y = (x-a)^{\mu+1} \cdot [A + B \cdot (x-a) + C \cdot (x-a)^2 + \text{etc.}].$$

Nous aurons, en changeant x en a après les différentiations,

$$A = - \frac{d^{\mu+1} \cdot \log y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu+1) \cdot dx^{\mu+1}},$$

$$B = - \frac{d^{\mu+2} \cdot \log y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu+2) \cdot dx^{\mu+2}},$$

etc.

Nous aurons ensuite, quel que soit r ,

$$v^r = [A + B \cdot (x-a) + C \cdot (x-a)^2 + \text{etc.}]^{-\frac{r}{\mu+1}};$$

d'où il est facile de conclure en développant cette expression de v^r , et nommant $Q \cdot (x-a)^{r-1}$ le terme de ce développement, qui a pour facteur $(x-a)^{r-1}$,

$$\frac{d^{r-1} \cdot U^r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1) \cdot dx^{r-1}} = Q.$$

La formule (B) ne présente plus ainsi d'autres difficultés que celles qui résultent de l'intégration des quantités de la forme $\int t^r dt \cdot e^{-t^{\mu+1}}$; et l'on a généralement,

$$\begin{aligned} \int t^n . dt . c^{-t^{\mu+1}} &= -\frac{c^{-t^{\mu+1}}}{\mu+1} \cdot \left\{ t^{n-\mu} + \frac{(n-\mu)}{\mu+1} . t^{n-2\mu-1} + \frac{(n-\mu) \cdot (n-2\mu-1)}{(\mu+1)^2} . t^{n-3\mu-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(n-\mu) \cdot (n-2\mu-1) \dots (n-r\mu-r+2)}{(\mu+1)^{r-1}} . t^{n-r\mu-r+1} \right\} \\ &\quad + \frac{(n-\mu) \cdot (n-2\mu-1) \dots (n-r\mu-r+1)}{(\mu+1)^r} . \int t^{n-r\mu-r} . dt . c^{-t^{\mu+1}} ; \end{aligned}$$

r étant égal au quotient de la division de n par $\mu+1$, si la division est possible, ou au nombre immédiatement inférieur, si elle ne l'est pas. La détermination de l'intégrale $\int y dx$ dépend donc des intégrales de cette forme

$$\int t . dt . c^{-t^{\mu+1}}, \int t . dt . c^{-t^{\mu+1}}, \dots \int t^{\mu-1} . dt . c^{-t^{\mu+1}} .$$

Il n'est pas possible d'obtenir exactement ces intégrales par les méthodes connues; mais il sera facile dans tous les cas, d'avoir leurs valeurs approchées.

24. Nous aurons principalement besoin dans la suite, de la valeur de $\int y dx$, prise pour tout l'intervalle compris entre deux valeurs consécutives de x , qui rendent y nul; nous allons conséquemment exposer les simplifications dont cette valeur est alors susceptible. La variable y ayant été supposée, dans le numéro précédent, égale à $Y . c^{-t^{\mu+1}}$, il est visible que les deux valeurs de x qui rendent y nul, rendent également nulle la quantité $c^{-t^{\mu+1}}$; ce qui exige que $\mu+1$ soit un nombre pair, et que l'une des valeurs de x réponde à $t = -\infty$, et l'autre à $t = \infty$; Y est donc alors le *maximum* de y , compris entre ces valeurs. Soit $\mu+1 = 2i$; si l'on prend l'intégrale $\int t^{2n+1} . dt . c^{-t^{2i}}$, depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, sa valeur sera nulle; car il est clair que les élémens de cette intégrale, qui répondent aux valeurs négatives de t , sont égaux et de signe contraire à ceux qui répondent aux mêmes valeurs prises positivement. L'intégrale $\int t^{2n} . dt . c^{-t^{2i}}$ est égal à $2 \int t^{2n} dt . c^{-t^{2i}}$, cette dernière intégrale étant prise depuis t nul

jusqu'à t infini; et dans ce cas, on a par le numéro précédent,

$$f t^{2n} . dt . c^{-t^{2i}} = \frac{(2n-2i+1) \cdot (2n-4i+1) \dots (2n-2ri+1)}{(2i)^r} . f t^{2n-2ri} . dt . c^{-t^{2i}}$$

r étant égal au nombre entier du quotient de la division de n par i . Soit donc, en prenant les intégrales depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\begin{aligned} k &= \int dt . c^{-t^{2i}}, \\ k^{(1)} &= \int t^2 . dt . c^{-t^{2i}}, \\ k^{(2)} &= \int t^4 . dt . c^{-t^{2i}}, \\ &\dots \dots \dots \\ k^{(i-1)} &= \int t^{2i-2} . dt . c^{-t^{2i}}; \end{aligned}$$

la formule (B) du numéro précédent deviendra

$$\begin{aligned} \int y dx &= 2k . Y . \left\{ U + \frac{1}{2i} \cdot \frac{d^i . U^{2i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i . dx^{2i}} + \frac{(2i+1)}{4i^2} \cdot \frac{d^{i+1} . U^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 4i . dx^{i+1}} + \text{etc.} \right\} \\ &+ 2k^{(1)} . Y . \left\{ \frac{d^2 . U^3}{1 \cdot 2 . dx^2} + \frac{3}{2i} \cdot \frac{d^{2i+2} . U^{2i+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2i+2) . dx^{i+2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cdot (2i+3)}{4i^2} \cdot \frac{d^{i+2} . U^{i+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (4i+2) . dx^{i+2}} + \text{etc.} \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ 2k^{(i-1)} . Y . \left\{ \frac{d^{2i-2} . U^{2i-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2i-2) . dx^{2i-2}} + \frac{(2i-1)}{2i} \cdot \frac{d^{i-1} . U^{i-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (4i-2) . dx^{i-2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2i-1) \cdot (4i-1)}{4i^2} \cdot \frac{d^{6i-2} . U^{6i-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (6i-2) . dx^{6i-2}} + \text{etc.} \right\}; \end{aligned}$$

Cette formule est la somme d'un nombre i de suites différentes, décroissantes comme les puissances de α , puisque U est de l'ordre $\frac{1}{2i}$, et multipliées respectivement par les transcendantes $k, k^{(1)}, \text{etc.}$, qu'il est, par conséquent, important de connaître; mais il suffit pour cela d'en connaître un nombre égal au plus grand nombre entier compris dans $\frac{i}{2}$.

Considérons pour cela, la double intégrale

$$\iint ds . dx . c^{-s(1+x^n)},$$

les intégrales étant prises depuis s et x nuls jusqu'à leurs valeurs infinies. En l'intégrant d'abord par rapport à s , elle se réduit à

$$\int \frac{dx}{1+x^n};$$

mais cette dernière intégrale est $\frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire, on a donc

$$\iint ds \cdot dx \cdot c^{-s \cdot (1+x^n)} = \frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Intégrons maintenant cette double intégrale, d'abord par rapport à x . En faisant $sx^n = t^n$, elle devient

$$\int \frac{ds \cdot c^{-s}}{s^{\frac{1}{n}}} \cdot fdt \cdot c^{-t^n}$$

et si l'on fait $s = t^n$, on aura

$$n \cdot fdt \cdot c^{-t^n} \cdot f t^{n-2} \cdot dt \cdot c^{-t^n} = \frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{\pi}{n}},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on change n dans $\frac{n}{r-1}$, cette équation devient

$$n^2 \cdot fdt \cdot c^{-t^{\frac{n}{r-1}}} \cdot f t^{\frac{n}{r-1}-2} \cdot dt \cdot c^{-t^{\frac{n}{r-1}}} = \frac{(r-1)^2 \cdot \pi}{\sin \left(\frac{r-1}{n} \right) \cdot \pi},$$

et si dans cette nouvelle équation, on change t dans t^{r-1} , on aura

$$n^2 \cdot f t^{r-2} \cdot dt \cdot c^{-t^n} \cdot f t^{n-r} \cdot dt \cdot c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin \left(\frac{r-1}{n} \right) \cdot \pi}. \quad (\text{T})$$

On aura, au moyen de cette formule, en y faisant $n = 2i$, toutes les valeurs de k , $k^{(1)}$, $\dots \dots k^{(i-1)}$, lorsque l'on en connaîtra la moitié, si i est pair, ou la moitié moins un demi, si i est impair.

En faisant $n = 2$ et $r = 2$, cette formule donne ce résultat

remarquable

$$\int dt . e^{-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

25. On peut en vertu de la généralité de l'analyse, étendre les résultats précédens, au cas où t est imaginaire. Considérons l'intégrale $\int dx . \cos rx . e^{-a^2 x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini. On peut la mettre sous cette forme

$$\frac{1}{2} \cdot \int dx . e^{-a^2 x^2 + rx} . \sqrt{-1} + \frac{1}{2} \cdot \int dx . e^{-a^2 x^2 - rx} . \sqrt{-1};$$

L'intégrale $\int dx . e^{-a^2 x^2 + rx} . \sqrt{-1}$ est égale à

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{c} \cdot \int dx . e^{-\left(ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a}\right)^2}.$$

Si l'on fait

$$t = ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a},$$

elle devient

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \cdot \int dt . e^{-t^2};$$

ici l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ jusqu'à t infini, parce que ces deux limites répondent à x nul et à x infini.

En faisant r négatif dans cette formule, on aura l'expression de l'intégrale $\int dx . e^{-a^2 x^2 - rx} \sqrt{-1}$; mais dans ce cas, les limites de l'intégrale relative à t sont $t = \frac{r\sqrt{-1}}{2a}$, et t infini; la réunion de ces deux intégrales est donc égale à

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \cdot \int dt . e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; car la première intégrale ajoute à la seconde, ce qui lui manque pour former la moitié de l'intégrale prise entre les deux limites infinies; or

cette dernière intégrale est $\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \cdot \sqrt{\pi}$; on a donc

$$\int dx . \cos rx . e^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

L'analyse

L'analyse qui vient de nous conduire à ce résultat, est fondée sur le passage du réel à l'imaginaire; car on y traite les intégrales relatives à t et prises entre deux limites, dont une est imaginaire et l'autre est infinie, comme si ces limites étaient toutes réelles. Mais on peut parvenir à ce résultat de la manière suivante.

Nommons y l'intégrale $\int dx \cdot \cos rx \cdot e^{-a^2 x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini; on aura

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr} &= - \int x dx \cdot \sin rx \cdot e^{-a^2 x^2} \\ &= \frac{1}{2a^2} \cdot \sin rx \cdot e^{-a^2 x^2} - \frac{r}{2a^2} \cdot \int dx \cdot \cos rx \cdot e^{-a^2 x^2}; \end{aligned}$$

on aura donc, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2} \cdot y = 0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$y = B \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2}};$$

B étant une constante arbitraire que l'on déterminera en observant que r étant nul, on a

$$y = B = \int dx \cdot e^{-a^2 x^2}.$$

Cette dernière intégrale est, par le numéro précédent, $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; donc $B = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; par conséquent

$$\int dx \cdot \cos rx \cdot e^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2}};$$

ce qui est conforme au résultat trouvé ci-dessus par le passage du réel à l'imaginaire.

En différentiant $2n$ fois par rapport à r , on aura

$$\int x^{2n} dx \cdot \cos rx \cdot e^{-a^2 x^2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \frac{d^{2n}}{dr^{2n}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

le signe $+$ ayant lieu si n est pair, et le signe $-$ si n est impair.

Cette dernière équation différenciée par rapport à r , donne

$$\int x^{2n+1} \cdot dx \cdot \sin rx \cdot c^{-a^2 x^2} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \frac{d^{2n+1}}{dr^{2n+1}} \cdot c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

En intégrant une fois par rapport à r , l'expression de $\int dx \cdot \cos rx \cdot c^{-a^2 x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx \cdot \sin rx}{x} \cdot c^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Lorsque a est nul, $\frac{r}{a}$ devient infini, et l'intégrale $\int \frac{dr}{2a} \cdot c^{-\frac{r^2}{4a^2}}$ prise depuis r nul, devient $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$; donc

$$\int \frac{dx \cdot \sin rx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

26. On peut de là conclure les valeurs de quelques intégrales définies singulières auxquelles j'ai été conduit, comme on le verra dans la suite, par le passage du réel à l'imaginaire.

Considérons la double intégrale

$$\iint 2dx \cdot ydy \cdot c^{-y^2 \cdot (1+x^2)} \cdot \cos rx,$$

les intégrales étant prises depuis x et y nuls jusqu'à x et y infinis. En l'intégrant d'abord par rapport à y , elle devient

$$\int \frac{dx \cdot \cos rx}{1+x^2}.$$

Intégrons-la maintenant par rapport à x . On a par le numéro précédent,

$$\int dx \cdot \cos rx \cdot c^{-y^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2y} \cdot c^{-\frac{r^2}{4y^2}};$$

ce qui donne

$$\iint 2ydy \cdot dx \cdot \cos rx \cdot c^{-y^2 \cdot (1+x^2)} = \sqrt{\pi} \cdot \int dy \cdot c^{-y^2 - \frac{r^2}{4y^2}}.$$

Il s'agit maintenant d'avoir cette dernière intégrale prise depuis y nul jusqu'à y infini.

Pour cela, donnons-lui cette forme,

$$c' \cdot fdy \cdot c^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2}.$$

r étant supposé positif, la quantité $\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2$ a un *minimum* qui répond à $y = \sqrt{\frac{r}{2}}$; ce qui donne $2r$ pour ce *minimum*; soit donc

$$y = \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{z^2 + 2r};$$

y devant s'étendre depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$, z doit s'étendre depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. Cette valeur de y donne

$$dy = \frac{1}{2} \cdot dz + \frac{1}{2} \cdot \frac{zdz}{\sqrt{z^2 + 2r}}.$$

En prenant les intégrales depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, on a

$$\int dz \cdot e^{-z^2} = \sqrt{\pi}; \quad \int \frac{zdz \cdot e^{-z^2}}{\sqrt{z^2 + 2r}} = 0;$$

on a donc

$$\int dy \cdot e^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2} = \int dy \cdot e^{-z^2 - 2r} = e^{-2r} \int \frac{1}{2} \cdot dz \cdot e^{-z^2} = \frac{e^{-2r} \cdot \sqrt{\pi}}{2};$$

partant

$$\int dy \cdot e^{-y^2 - \frac{r^2}{y^2}} = \frac{e^{-r} \cdot \sqrt{\pi}}{2}.$$

On aura généralement par la même analyse, l'intégrale

$$\int y^{\pm 2n} \cdot dy \cdot e^{-y^2 - \frac{r^2}{y^2}},$$

prise depuis y nul jusqu'à y infini, et par conséquent aussi dans les mêmes limites, l'intégrale

$$\int x^{\pm \frac{n}{2}} \cdot dx \cdot e^{-ax - \frac{b}{x}},$$

a et b étant positifs. Cela posé, on aura

$$\iint 2y dy \cdot dx \cdot \cos rx \cdot e^{-y^2 \cdot (1+x^2)} = \frac{\pi}{2c};$$

on a donc

$$\int \frac{dx \cdot \cos rx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2c}.$$

En différentiant par rapport à r on a

$$\int \frac{x dx \cdot \sin rx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2c^r};$$

de là il est facile de conclure la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(a + bx) \cdot dx \cdot \cos rx}{m + 2nx + x^2},$$

prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à x infini, le dénominateur n'ayant point de facteurs réels en x du premier degré. Si l'on fait

$$x = -n + x' \cdot \sqrt{m - n^2},$$

cette intégrale devient, en supposant

$$\frac{a - bn}{\sqrt{m - n^2}} = a',$$

$$\int \frac{(a' + bx') \cdot dx' \cdot [\cos(rx' \cdot \sqrt{m - n^2}) \cdot \cos rn + \sin(rx' \cdot \sqrt{m - n^2}) \cdot \sin rn]}{1 + x'^2}.$$

Cette intégrale doit être prise comme celle relative à x , depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x' = \infty$; or l'intégrale $\int \frac{x' dx' \cdot \cos(rx' \cdot \sqrt{m - n^2})}{1 + x'^2}$ prise dans ces limites, est nulle; parce que ses élémens négatifs détruisent ses élémens positifs correspondans; il en est de même de l'intégrale $\int \frac{dx' \cdot \sin(rx' \cdot \sqrt{m - n^2})}{1 + x'^2}$; la fonction intégrale précédente se réduit donc à

$$\int \frac{[a' \cdot \cos rn \cdot \cos(rx' \cdot \sqrt{m - n^2}) + b \cdot \sin rn \cdot \sin(rx' \cdot \sqrt{m - n^2})] x' \cdot dx'}{1 + x'^2}$$

On a par ce qui précède,

$$\int \frac{dx' \cdot \cos(rx' \cdot \sqrt{m - n^2})}{1 + x'^2} = \pi \cdot c^{-r \cdot \sqrt{m - n^2}}.$$

En différentiant cette expression par rapport à r , on a

$$\int \frac{x' dx' \cdot \sin(rx' \cdot \sqrt{m - n^2})}{1 + x'^2} = \pi \cdot c^{-r \cdot \sqrt{m - n^2}};$$

on a donc

$$\int \frac{(a + bx) \cdot dx \cdot \cos rx}{m + 2nx + x^2} = (a' \cdot \cos rn + b \cdot \sin rn) \cdot \pi \cdot c^{-r \cdot \sqrt{m - n^2}}.$$

On trouvera par la même analyse,

$$\int \frac{(a+bx).dx.\sin rx}{m+2nx+x^2} = (b \cdot \cos rn - a' \cdot \sin rn) \cdot \pi \cdot e^{-r} \cdot \sqrt{m-n^2}.$$

Si l'on différentie la première de ces deux équations, $i-1$ fois par rapport à m , et ensuite 2s fois par rapport à r , on aura l'expression de l'intégrale

$$\int \frac{x^{2i}.dx.(a+bx).\cos rx}{(m+2nx+x^2)^i}. \quad (i)$$

Maintenant M et N étant des fonctions rationnelles et entières de x , le degré de la première étant supposé plus petit que celui de la seconde, et N étant supposé n'avoir aucun facteur réel du premier degré; on pourra, comme on sait, décomposer l'intégrale $\int \frac{M}{N}.dx \cdot \cos rx$, en différens termes de la forme (i); on aura donc généralement l'expression de cette intégrale définie.

On aura de la même manière, la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{M}{N}.dx \cdot \sin rx.$$

27. Reprenons maintenant la formule (B) du n° 25. Le cas de $\mu+1=2$ étant le plus ordinaire, nous allons exposer ici les formules qui y sont relatives. La formule (B) devient dans ce cas,

$$fydx = Y.fdt.e^{-t^2} \cdot \left\{ U + t \cdot \frac{d.U^2}{dx} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{d^2.U^3}{dx^2} \right. \\ \left. + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3.U^4}{dx^3} + \text{etc.} \right\}; \quad (b)$$

ici l'on a

$$t = \sqrt{\log Y - \log y}, \quad v = \frac{x-a}{\sqrt{\log Y - \log y}},$$

Y étant le *maximum* de y , et a étant la valeur de x qui correspond à ce *maximum*; U , $\frac{dU}{dx}$, etc. sont ce que deviennent v , $\frac{dv}{dx}$, etc., lorsqu'on y change x en a . Cette formule donne, en

l'intégrant depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$,

$$\begin{aligned} \int y dx = & Y \cdot \left(U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{d^4 \cdot U^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.} \right) \cdot \int dt \cdot c^{-t} \\ & + \frac{Y}{2} \cdot c^{-T^2} \cdot \left(\frac{d \cdot U^2}{dx} + \frac{T \cdot d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{(T^2+1) \cdot d^3 \cdot U^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.} \right); \quad (c) \\ & - \frac{Y}{2} \cdot c^{-T'^2} \cdot \left(\frac{d \cdot U^2}{dx} + \frac{T' \cdot d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{(T'^2+1) \cdot d^3 \cdot U^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

l'intégrale $\int dt \cdot c^{-t}$ étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$, et l'intégrale $\int y dx$ étant prise depuis la valeur de x qui convient à $t = T$, jusqu'à celle qui convient à $t = T'$.

Si l'on suppose $T = -\infty$ et $T' = \infty$, on aura généralement

$$T^n \cdot c^{-T^2} = 0, \quad T'^n \cdot c^{-T'^2} = 0.$$

On a d'ailleurs par le n° 24, $\int dt \cdot c^{-t} = \sqrt{\pi}$; la formule précédente devient ainsi

$$\int y dx = Y \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{d^4 \cdot U^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.} \right), \quad (d)$$

l'intégrale $\int y dx$ étant prise entre les valeurs de x qui rendent y nul, et Y étant le *maximum* de y , compris entre ces valeurs. Les différens termes de cette formule se détermineront facilement par le n° 23, et l'on aura

$$U = \frac{1}{\sqrt{-\frac{d^2 \cdot \log y}{2 dx^2}}};$$

x devant être changé en α , après les différentiations. On a

$$d^2 \cdot \log y = \frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2};$$

la supposition de $x = \alpha$ fait disparaître dy ; on aura donc

$$\frac{d^2 \cdot \log y}{dx^2} = \frac{ddY}{Y \cdot dx^2},$$

Y et $\frac{ddY}{dx^2}$ étant ce que deviennent y et $\frac{ddy}{dx^2}$, lorsqu'on y change x en α . Ainsi, en ne considérant dans la formule (d) que le premier

terme de la série, on aura à très-peu près

$$fydx = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot Y^3}{\sqrt{-\frac{ddY}{dx^2}}}.$$

Cette expression de $fydx$ sera d'autant plus approchée, que les facteurs de y seront élevés à de plus hautes puissances.

La formule (c) renferme l'intégrale indéfinie $\int dt \cdot c^{-t}$ prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$; ce qui revient à la prendre depuis $t = 0$ jusqu'aux limites T et T' , et à retrancher la première intégrale de la seconde. Il n'est pas possible d'obtenir en termes finis, l'intégrale prise depuis t nul; mais on l'obtiendra d'une manière fort approchée, si T est peu considérable, par la série suivante :

$$\int dt \cdot c^{-t} = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{T^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{T^9}{9} - \text{etc.}$$

Cette série a l'avantage d'être alternativement plus petite ou plus grande que l'intégrale, suivant que l'on s'arrête à un terme positif ou négatif. Ce genre de séries que l'on peut nommer *séries-limites*, a ainsi l'avantage de faire connaître les limites des erreurs des approximations. On a encore

$$\int dt \cdot c^{-t} = T \cdot c^{-T} \cdot \left(1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{(2T)^2}{1.3.5} + \frac{(2T)^3}{1.3.5.7} + \text{etc.} \right).$$

Ces deux séries finissent toujours par être convergentes, quelle que soit la valeur de T ; mais leur convergence ne commence qu'à des termes éloignés du premier, si $2T^2$ a une valeur considérable; il convient donc de ne les employer que pour des valeurs égales ou moindres que quatre. Pour de plus grandes valeurs, on pourra faire usage de la série suivante, qui donne la valeur de l'intégrale $\int dt \cdot c^{-t}$ depuis $t = T$ jusqu'à t infini,

$$\int dt \cdot c^{-t} = \frac{c^{-T}}{2T} \cdot \left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2 \cdot T^4} - \frac{1.3.5}{2^3 \cdot T^6} + \text{etc.} \right).$$

Cette série est encore une *série-limite*. En la retranchant de $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$, valeur de l'intégrale $\int dt \cdot c^{-t}$ prise depuis t nul jusqu'à t infini, on aura la valeur de l'intégrale prise depuis t nul jusqu'à $t = T$.

Mais la série a l'inconvénient de finir par être divergente : on obvie à cet inconvénient, en la transformant en fraction continue, comme je l'ai fait dans le dixième Livre de *la Mécanique céleste*, où j'ai trouvé qu'en faisant $q = \frac{1}{2T^2}$, on a, l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à l'infini,

$$\int dt \cdot e^{-v} = \frac{e^{-T}}{2T} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \frac{4q}{1 + \frac{5q}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Pour faire usage de cette expression, il faut réduire la fraction continue

$$\frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \text{etc.}}}}$$

en fractions alternativement plus grandes et plus petites que la fraction entière. Les deux premières fractions sont $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1+q}$; les numérateurs des fractions suivantes sont tels, que le numérateur de la fraction $i^{ième}$ est égal au numérateur de la fraction $(i-1)^{ième}$, plus au numérateur de la fraction $(i-2)^{ième}$, multiplié par $(i-1) \cdot q$; les dénominateurs se forment de la même manière. Ces fractions successives sont

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1+q}, \frac{1+2q}{1+3q}, \frac{1+5q}{1+6q+3q^2}, \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2}, \text{ etc.}$$

Lorsque q ou $\frac{1}{2T^2}$ sera égal ou moindre que $\frac{1}{4}$, ces fractions donneront d'une manière prompte et approchée, la valeur de la fraction entière.

28. On peut facilement étendre l'analyse précédente aux doubles, triples, etc. intégrales. Pour cela, considérons la double intégrale $\iint y dx dx'$, y étant une fonction de x et de x' , qui renferme des facteurs

facteurs élevés à de grandes puissances. Supposons que l'intégrale relative à x' doive être prise depuis une fonction X de x jusqu'à une autre fonction $X' + X$ de la même variable. En faisant $x' = X + tX'$, l'intégrale $\int y dx dx'$ se changera dans celle-ci, $\int y X'. dx. dt$; l'intégrale relative à t devant être prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$: on peut donc réduire ainsi l'intégrale $\int y dx. dx'$ à des limites constantes et indépendantes des variables qu'elle renferme. Nous supposerons qu'elle a cette forme, et que l'intégrale relative à x est prise depuis $x=\theta$ jusqu'à $x=\varpi$, et que l'intégrale relative à x' est prise depuis $x'=\theta'$ jusqu'à $x'=\varpi'$. Cela posé, en nommant Y ce que devient y lorsqu'on y change x et x' en θ et θ' ; on fera

$$y = Y \cdot e^{-t-t'};$$

en supposant ensuite

$$x = \theta + u, \quad x' = \theta' + u';$$

on réduira $\log \frac{Y}{y}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de u et de u' , et l'on aura une équation de cette forme

$$M \cdot u + M' \cdot u' = t + t',$$

dans laquelle M est la partie du développement en série, de $\log \frac{Y}{y}$, qui renferme tous les termes multipliés par u , et M' est l'autre partie qui renferme les termes multipliés par u' , et qui sont indépendants de u . On partagera l'équation précédente, dans les deux suivantes :

$$M \cdot u = t, \quad M' \cdot u' = t';$$

d'où l'on tirera celles-ci, par le retour des suites,

$$u = N \cdot t, \quad u' = N' \cdot t',$$

N étant une suite ordonnée par rapport aux puissances de t et de t' , et N' étant uniquement ordonnée par rapport aux puissances de t' et étant indépendante de t ; ces deux suites sont très-convergentes, si y renferme des facteurs très-élevés. Maintenant on a $dx \cdot dx' = du \cdot du'$; de plus on a

$$du = \left(\frac{d \cdot N t}{dt} \right) \cdot dt + \left(\frac{d \cdot N t}{dt'} \right) \cdot dt',$$

$$du' = \left(\frac{d \cdot N' t'}{dt'} \right) \cdot dt';$$

mais dans le produit $du \cdot du'$, la différentielle du est prise en faisant u' constant, ce qui rend t' constant, ou $dt' = 0$; on a donc

$$du = \left(\frac{d \cdot Nt}{dt} \right) \cdot dt;$$

par conséquent

$$du \cdot du' = \left(\frac{d \cdot Nt}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d \cdot N't'}{dt'} \right) \cdot dt \cdot dt';$$

ce qui donne

$$\int y dx \cdot dx' = Y \cdot \int \left(\frac{d \cdot Nt}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d \cdot N't'}{dt'} \right) \cdot dt \cdot dt' \cdot e^{-t-t'}.$$

Il est facile d'intégrer les divers termes du second membre de cette équation, puisqu'il ne s'agit que d'intégrer des termes de la forme $f t^n \cdot dt \cdot e^{-t}$.

Si l'on prend l'intégrale relative à t' , depuis t' nul jusqu'à t' infini, et que l'on nomme Q le résultat de l'intégration; on aura

$$\int y dx' = Y \cdot Q,$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x' = \theta'$ jusqu'à la valeur de x' , qui répond à t' infini. Si l'on change ensuite dans Y et Q , θ' en ϖ' , et que l'on nomme Y' et Q' , ce que deviennent alors ces quantités; on aura

$$\int y dx' = Y' \cdot Q',$$

l'intégrale étant prise depuis $x' = \varpi'$ jusqu'à la valeur de x' , qui répond à t' infini.

En nommant R et R' les intégrales $\int Q dt$ et $\int Q' dt$ prises depuis t nul jusqu'à t infini; on aura

$$\int y dx \cdot dx' = YR - Y'R',$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x' = \theta'$ jusqu'à $x' = \varpi'$, et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Si dans Y , R , Y' , R' , on change θ dans ϖ , et que l'on nomme Y_1 , R_1 , Y'_1 , R'_1 ce que deviennent alors ces quantités; on aura

$$\int y dx \cdot dx' = Y_1 \cdot R_1 - Y'_1 \cdot R'_1,$$

l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ' , et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \varpi$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini; on aura donc

$$\int y dx . dx' = YR - Y'R' - Y_1 R_1 + Y'_1 R'_1,$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites θ et ϖ , et l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ' .

Cette formule répond à la formule (A) du n° 22, qui n'est relative qu'à une seule variable; elle a, comme elle, l'inconvénient de ne pouvoir s'étendre aux intervalles voisins du *maximum* de y . Il faut, pour ces intervalles, employer une méthode analogue à celle du n° 23. Ainsi, en supposant que dans l'intervalle compris entre θ et ϖ , y devienne un *maximum* relativement à x , ensorte que la condition de ce *maximum* ne fasse disparaître que la différentielle de y , prise par rapport à x ; on fera

$$y = Y . e^{-t^2 - t'^2},$$

Y étant la valeur de y qui convient à ce *maximum* et à $x' = \theta'$; et si dans l'intervalle compris entre les limites des intégrations relatives à x et à x' , y devient un *maximum*; on fera

$$y = Y . e^{-t^2 - t'^2}.$$

Comme nous aurons besoin principalement dans la suite, de l'intégrale $\int y dx . dx'$ prise entre les limites de x et de x' qui rendent y nul, nous allons discuter ce cas.

Considérons l'intégrale $\int y dx . dx'$, y étant une fonction de x, x' , qui renferme des facteurs élevés à de grandes puissances. Si l'on nomme a, a' les valeurs de x, x' qui répondent au *maximum* de y , et que l'on nomme Y ce *maximum*; on fera

$$y = Y . e^{-t^2 - t'^2};$$

en supposant ensuite

$$x = a + \theta, \quad x' = a' + \theta';$$

on substituera ces valeurs dans la fonction $\log \frac{Y}{y}$, et en la développant dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et

aux produits de θ , θ' ; on aura une équation de cette forme

$$M.\theta^2 + 2N.\theta\theta' + P.\theta'^2 = t^2 + t'^2.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$M.\left(\theta + \frac{N}{M}.\theta'\right)^2 + \left(P - \frac{N^2}{M}\right).\theta'^2 = t^2 + t'^2;$$

on fera donc

$$t = \theta.\sqrt{M} + \frac{N.\theta'}{\sqrt{M}}, \quad t' = \theta'.\sqrt{P - \frac{N^2}{M}}.$$

En différentiant ces équations, on aura des différentielles de cette forme

$$\begin{aligned} dt &= L.d\theta + I.d\theta', \\ dt' &= L'.d\theta + I'.d\theta'. \end{aligned}$$

Maintenant on a

$$f y dx . dx' = f y . d\theta . d\theta';$$

dans le produit $d\theta . d\theta'$, $d\theta$ est pris en supposant θ' constant, et alors on a

$$dt = L.d\theta;$$

ensuite dt' doit être pris en regardant t constant, dans le produit $dt . dt'$; alors on a

$$\begin{aligned} 0 &= L.d\theta + I.d\theta', \\ dt' &= L'.d\theta + I'.d\theta'; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$dt' = \frac{(LI' - L'I)}{L}.d\theta';$$

on a donc

$$dt . dt' = d\theta . d\theta' . (LI' - L'I);$$

par ce moyen, l'intégrale $f y d\theta . d\theta'$ est transformée dans celle-ci,

$$Y . \int \frac{dt . dt' . e^{-t^2 - t'^2}}{LI' - L'I}.$$

Le dénominateur $LI' - L'I$ est une fonction de θ et de θ' que l'on réduira en fonction de t et de t' , au moyen des valeurs de t et de t' en θ et θ' . On obtiendra ainsi l'intégrale précédente dans une suite

de termes de la forme $\int t^n \cdot t'^n \cdot dt \cdot dt' \cdot c^{-t^2-t'^2}$; les intégrales étant prises depuis t et t' égaux à $-\infty$, jusqu'à leurs valeurs infinies positives. Ces intégrales sont nulles, lorsque l'un des deux nombres n et n' est impair; et dans le cas où ils sont tous deux pairs, n étant égal à $2i$, et n' à $2i'$, on a

$$\int t^{2i} \cdot t'^{2i'} \cdot dt \cdot dt' \cdot c^{-t^2-t'^2} = \frac{1.3.5\dots 2i-1 \cdot 1.3.5\dots 2i'-1}{2^i \cdot 2^{i'}} \cdot \pi.$$

Si les puissances auxquelles les facteurs de y sont élevés, sont très-grandes; alors on a, à très-peu près,

$$M = -\frac{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}{2Y}, \quad 2N = -\frac{\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)}{Y}, \quad P = -\frac{\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)}{2Y},$$

$\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)$, $\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right)$ étant ce que deviennent $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dxdx'}\right)$ et $\left(\frac{ddy}{dx'^2}\right)$ lorsqu'on y change x et x' en a et a' ; l'intégrale $\int y dx dx'$ devient ainsi à fort peu près,

$$\sqrt{\frac{2\tau \cdot Y^2}{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)\left(\frac{ddY}{dx'^2}\right) - \left(\frac{ddY}{dxdx'}\right)^2}}.$$

CHAPITRE II.

De l'intégration par approximation, des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites.

29. **O**N a vu dans le n° 22, que les intégrales des équations linéaires aux différences entre une variable s , dont la différence finie est supposée constante, et une fonction y_s de cette variable, peuvent être mises sous la forme $y_s = \int x^s \cdot \phi dx$, ϕ étant une fonction de x de la même nature que la fonction génératrice de l'équation proposée aux différences, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées de x . En supposant s un très-grand nombre, on aura par l'analyse précédente, une valeur très-approchée de cette intégrale, et par conséquent de y_s . Mais cette méthode d'approximation étant très-importante dans la théorie des probabilités, nous allons la développer avec étendue.

Considérons l'équation aux différences finies

$$S = A.y_s + B.\Delta.y_s + C.\Delta^2.y_s + \text{etc.}, \quad (1)$$

A, B, C , etc. étant des fonctions rationnelles et entières de s , auxquelles nous donnerons cette forme :

$$\begin{aligned} A &= a + a^{(1)}.s + a^{(2)}.s.(s-1) + a^{(3)}.s.(s-1).(s-2) + \text{etc.}, \\ B &= b + b^{(1)}.s + b^{(2)}.s.(s-1) + b^{(3)}.s.(s-1).(s-2) + \text{etc.}, \\ C &= c + c^{(1)}.s + c^{(2)}.s.(s-1) + c^{(3)}.s.(s-1).(s-2) + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

$\Delta.y_s$ est la différence finie de y_s , s étant supposé varier de l'unité ; $\Delta^2.y_s$, $\Delta^3.y_s$, etc. sont les seconde, troisième, etc. différences de y_s ; et S est une fonction de s . Cela posé, représentons y_s par $\int x^s \cdot \phi dx$, ϕ étant une fonction de x qu'il faut déterminer, ainsi

que les limites de l'intégrale. En désignant x' par δy , on aura

$$\Delta . y_1 = f \delta y . (x-1) . \phi dx, \quad \Delta^2 . y_1 = f \delta y . (x-1)^2 . \phi dx, \quad \text{etc.};$$

on aura ensuite

$$s . x' = x . \frac{d . \delta y}{dx}, \quad s . (s-1) . x' = x^2 . \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}, \quad \text{etc.};$$

L'équation (1) aux différences, devient ainsi

$$S = f \phi dx . \left\{ \begin{array}{l} \delta y . [a + b . (x-1) + e . (x-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{x . d . \delta y}{dx} . [a^{(1)} + b^{(1)} . (x-1) + e^{(1)} . (x-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{x^2 . d^2 . \delta y}{dx^2} . [a^{(2)} + b^{(2)} . (x-1) + e^{(2)} . (x-1)^2 + \text{etc.}] \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Au lieu de faire y , égal à $f x' . \phi dx$, on peut le supposer égal à $f c^{-ix} . \phi dx$; alors on a

$$\Delta . y_1 = f c^{-ix} . (c^{-x} - 1) . \phi dx, \quad \Delta^2 . y_1 = f c^{-ix} . (c^{-x} - 1)^2 . \phi dx, \quad \text{etc.}$$

De plus, si l'on désigne c^{-ix} par δy , on aura

$$s . c^{-ix} = - \frac{d . \delta y}{dx}, \quad s^2 . c^{-ix} = \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}, \quad \text{etc.};$$

en mettant donc les coefficients de l'équation (1) sous cette forme,

$$\begin{aligned} A &= a + a^{(1)} . s + a^{(2)} . s^2 + \text{etc.}, \\ B &= b + b^{(1)} . s + b^{(2)} . s^2 + \text{etc.}, \\ C &= e + e^{(1)} . s + e^{(2)} . s^2 + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

cette équation prendra la forme

$$S = f \phi dx . \left\{ \begin{array}{l} \delta y . [a + b . (c^{-x} - 1) + e . (c^{-x} - 1)^2 + \text{etc.}] \\ - \frac{d . \delta y}{dx} . [a^{(1)} + b^{(1)} . (c^{-x} - 1) + e^{(1)} . (c^{-x} - 1)^2 + \text{etc.}] \\ + \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} . [a^{(2)} + b^{(2)} . (c^{-x} - 1) + e^{(2)} . (c^{-x} - 1)^2 + \text{etc.}] \\ - \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

En représentant généralement y , par $\int \delta y \cdot \phi dx$, les deux formes que l'équation (1) prend dans les suppositions de $\delta y = x^s$ et de $\delta y = c^{-sx}$, seront comprises dans la suivante

$$S = \int \phi dx \cdot \left(M \cdot \delta y + N \cdot \frac{d \cdot \delta y}{dx} + P \cdot \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2} + Q \cdot \frac{d^3 \cdot \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right),$$

M, N, P, Q , etc. étant des fonctions de x indépendantes de la variable s , qui n'entre dans le second membre de cette équation, qu'autant que δy et ses différences en sont fonctions.

Maintenant, pour y satisfaire, on intégrera par parties, ses différents termes; or on a

$$\begin{aligned} \int \frac{d \cdot \delta y}{dx} \cdot N \phi \cdot dx &= \delta y \cdot N \phi - \int \delta y \cdot d(N \phi), \\ \int \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2} \cdot P \phi \cdot dx &= \frac{d \cdot \delta y}{dx} \cdot P \phi - \delta y \cdot \frac{d(P \phi)}{dx} + \int \delta y \cdot \frac{d^2(P \phi)}{dx^2}, \\ &\text{etc.;} \end{aligned}$$

L'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} S &= \int \delta y \cdot dx \cdot \left(M \phi - \frac{d(N \phi)}{dx} + \frac{d^2(P \phi)}{dx^2} - \frac{d^3(Q \phi)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ C + \delta y \cdot \left(N \phi - \frac{d(P \phi)}{dx} + \frac{d^2(Q \phi)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d \cdot \delta y}{dx} \cdot \left(P \phi - \frac{d(Q \phi)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2} \cdot (Q \phi - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.}, \end{aligned}$$

C étant une constante arbitraire.

Puisque la fonction ϕ doit être indépendante de s , et par conséquent de δy , on doit évaluer séparément à zéro, la partie de cette équation, affectée du signe $\int$; ce qui partage l'équation précédente dans les deux suivantes,

$$0 = M \phi - \frac{d(N \phi)}{dx} + \frac{d^2(P \phi)}{dx^2} - \frac{d^3(Q \phi)}{dx^3} + \text{etc.}, \quad (2)$$

$S =$

$$\begin{aligned}
 S = & C + \delta y \cdot \left(N\phi - \frac{d \cdot (P\phi)}{dx} + \frac{d^2 \cdot (Q\phi)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
 & + \frac{d \cdot \delta y}{dx} \cdot \left(P\phi - \frac{d \cdot (Q\phi)}{dx} + \text{etc.} \right); \quad (3) \\
 & + \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2} \cdot (Q\phi - \text{etc.}) \\
 & + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

La première de ces équations sert à déterminer la fonction ϕ ; et la seconde détermine les limites dans lesquelles l'intégrale $\int \delta y \cdot \phi dx$ est comprise.

On peut observer que l'équation (2) est l'équation de condition qui doit avoir lieu, pour que la fonction différentielle

$$\left(M \cdot \delta y + N \cdot \frac{d \cdot \delta y}{dx} + P \cdot \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \cdot \phi dx$$

soit une différentielle exacte, quel que soit δy ; et dans ce cas, l'intégrale de cette fonction est égale au second membre de l'équation (3) ; ϕ est donc le facteur en x seul qui doit multiplier l'équation

$$0 = M \cdot \delta y + N \cdot \frac{d \cdot \delta y}{dx} + P \cdot \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2} + \text{etc.},$$

pour la rendre intégrable. Si ϕ était connu, on pourrait abaisser cette équation d'un degré ; et réciproquement, si cette équation était abaissée d'un degré, le coefficient de δy , dans sa différentielle divisée par $M dx$, donnerait une valeur de ϕ ; cette équation et l'équation (2) sont conséquemment liées entre elles, de manière qu'une intégrale de l'une donne une intégrale de l'autre.

La valeur de ϕ étant supposée connue, on aura celle de y , au moyen d'une intégrale définie. L'intégration de l'équation (1) aux différences finies, est donc ainsi ramenée à l'intégration de l'équation (2) aux différences infiniment petites, et à une intégrale définie.

Considérons présentement l'équation (3), et faisons d'abord $S=0$. Si l'on suppose que δy , $\frac{d \cdot \delta y}{dx}$, $\frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2}$, etc. deviennent nuls, au moyen d'une même valeur de x , que nous désignerons par h , et qui soit indépendante de s ; il est clair qu'en supposant C nul,

cette valeur satisfera à l'équation (3), et qu'ainsi elle sera une des limites entre lesquelles on doit prendre l'intégrale $\int \delta y \cdot \phi dx$. La supposition précédente a lieu visiblement, dans les deux cas de $\delta y = x^r$ et de $\delta y = c^{-ix}$; dans le premier cas, l'équation $x = 0$, et dans le second cas, l'équation $x = \infty$, rendent nulles les quantités δy , $\frac{d.\delta y}{dx}$, $\frac{d^2.\delta y}{dx^2}$, etc. Pour avoir d'autres limites de l'intégrale $\int \delta y \cdot \phi dx$, on observera que ces limites devant être indépendantes de s , il faut dans l'équation (3), égalier séparément à zéro, les coefficients de δy , $\frac{d.\delta y}{dx}$, etc.; ce qui donne les équations suivantes,

$$0 = N\phi - \frac{d.(P\phi)}{dx} + \frac{d^2.(Q\phi)}{dx^2} - \text{etc.},$$

$$0 = P\phi - \frac{d.(Q\phi)}{dx} + \text{etc.},$$

$$0 = Q\phi - \text{etc.},$$

etc.

Ces équations sont au nombre i , si i est l'ordre de l'équation différentielle (2); on pourra donc éliminer, à leur moyen, toutes les constantes arbitraires de la valeur de ϕ , moins une; et l'on aura une équation finale en x , dont les racines seront autant de limites de l'intégrale $\int \delta y \cdot \phi dx$. On cherchera par cette équation, un nombre de valeurs différentes de x , égal au degré de l'équation différentielle (1). Soient q , $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, etc. ces valeurs; elles donneront autant de valeurs différentes de ϕ , puisque les constantes arbitraires de ϕ , moins une, sont déterminées en fonctions de ces valeurs. On pourra ainsi représenter les valeurs de ϕ , correspondantes aux limites q , $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, etc., par $B.\lambda$, $B^{(1)}.\lambda^{(1)}$, $B^{(2)}.\lambda^{(2)}$, etc.; B , $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, etc. étant des constantes arbitraires; et l'on aura pour la valeur complète de y ,

$$y = B.\int \delta y \cdot \lambda .dx + B^{(1)}.\int \delta y \cdot \lambda^{(1)} .dx + B^{(2)}.\int \delta y \cdot \lambda^{(2)} .dx + \text{etc.};$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q$, celle du second terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q^{(1)}$, et ainsi du reste. On déterminera les constantes B , $B^{(1)}$, etc., au moyen d'autant de valeurs particulières de y .

Supposons maintenant que dans l'équation (3), S ne soit pas nul. Si l'on prend l'intégrale $\int dy \cdot \phi dx$ depuis $x = h$ jusqu'à x égal à une quantité quelconque p ; il est clair que l'on aura $C = 0$, et que S sera ce que devient la fonction

$$\begin{aligned} & dy \cdot \left(N\phi - \frac{d.(P\phi)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ & + \frac{d.dy}{dx} \cdot (P\phi - \text{etc.}) \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

lorsqu'on y change x en p . Ainsi pour le succès de la méthode précédente, il est nécessaire que S ait la forme de cette fonction. Faisons, par exemple, $dy = x^s$, et

$$S = p' \cdot [l + l^{(1)} \cdot s + l^{(2)} \cdot s \cdot (s-1) + l^{(3)} \cdot s \cdot (s-1) \cdot (s-2) + \text{etc.}];$$

en comparant cette valeur de S à la précédente, on aura

$$\begin{aligned} l &= N\phi - \frac{d.(P\phi)}{dx} + \text{etc.}, \\ l^{(1)} \cdot p &= P\phi - \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

x devant être changé en p dans les seconds membres de ces équations dont le nombre est égal au degré de l'équation différentielle (2). On pourra donc, à leur moyen, déterminer les constantes arbitraires de la valeur de ϕ ; et si l'on désigne par $\downarrow$, ce que devient ϕ , lorsqu'on a ainsi déterminé ses arbitraires, on aura

$$y_i = \int x^i \cdot \downarrow dx.$$

De là et de ce que l'équation (1) est linéaire, il est facile de conclure que si S est égal à

$$\begin{aligned} & p' \cdot [l + l^{(1)} \cdot s + l^{(2)} \cdot s \cdot (s-1) + \text{etc.}] \\ & + p'_1 \cdot [l_1 + l_1^{(1)} \cdot s + l_1^{(2)} \cdot s \cdot (s-1) + \text{etc.}] \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

En nommant $\downarrow'$, etc., ce que devient $\downarrow$ lorsqu'on y change succes-

sivement $p, l, l^{(1)}, \text{ etc.}$, en $p_1, l_1, l_1^{(1)}, \text{ etc.}$, en $p_2, \text{ etc.}$; on aura

$$y_i = f x' \cdot \psi dx + f x' \cdot \psi' dx + \text{etc.};$$

la première intégrale étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = p$, la seconde étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = p_1$, etc. Cette valeur de y_i ne renferme aucune constante arbitraire; mais en la joignant à celle que nous avons trouvée précédemment pour le cas de S nul, on aura l'expression complète de y_i .

30. Supposons maintenant que l'on ait un nombre quelconque d'équations linéaires aux différences finies entre un pareil nombre de variables $y_i, y_i', y_i'', \text{ etc.}$, et dont les coefficients soient des fonctions rationnelles et entières de s . Faisons alors

$$y_i = f x' \cdot \phi dx, \quad y_i' = f x' \cdot \phi' dx, \quad y_i'' = f x' \cdot \phi'' dx, \quad \text{etc.};$$

ces diverses intégrales étant prises entre les mêmes limites déterminées et indépendantes de s . Nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= f x' \cdot (x-1) \cdot \phi dx, & \Delta^2 y_i &= f x' \cdot (x-1)^2 \cdot \phi dx, & \text{etc.}; \\ \Delta y_i' &= f x' \cdot (x-1) \cdot \phi' dx, & \Delta^2 y_i' &= f x' \cdot (x-1)^2 \cdot \phi' dx, & \text{etc.}; \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Les équations dont il s'agit, pourront ainsi être mises sous les formes suivantes,

$$S = f x' \cdot z dx, \quad S' = f x' \cdot z' dx, \quad S'' = f x' \cdot z'' dx, \quad \text{etc.},$$

$S, S', S'', \text{ etc.}$ étant des fonctions de s seul, et $z, z', z'', \text{ etc.}$, étant des fonctions rationnelles et entières de la même variable, et de $x, \phi, \phi', \phi'', \text{ etc.}$, dans lesquelles $\phi, \phi', \text{ etc.}$, sont sous une forme linéaire.

Considérons d'abord l'équation

$$S = f x' \cdot z dx,$$

on a

$$z = Z + s \cdot \Delta \cdot Z + \frac{s \cdot (s-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot Z + \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot Z + \text{etc.};$$

la caractéristique Δ des différences finies étant relative à la variable s , et Z , $\Delta.Z$, etc. étant ce que deviennent z , $\Delta.z$, etc., lorsqu'on y suppose $s=0$. On aura donc

$$S = f x^s . dx . \left(Z + s . \Delta . Z + \frac{s . (s-1)}{1 . 2} . \Delta^2 . Z + \text{etc.} \right).$$

Si l'on fait $x^s = \delta y$, on aura

$$s x^s = x . \frac{d . \delta y}{dx}, \quad s . (s-1) . x^s = x^2 . \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}, \quad \text{etc.};$$

l'équation précédente devient ainsi

$$S = f dx . \left(Z . \delta y + x . \Delta . Z . \frac{d . \delta y}{dx} + \frac{x^2 . \Delta^2 . Z}{1 . 2} . \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right);$$

d'où l'on tire en intégrant par parties, comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes,

$$0 = Z - \frac{d . (x . \Delta . Z)}{dx} + \frac{d^2 . (x^2 . \Delta^2 . Z)}{1 . 2 . dx^2} - \text{etc.}, \quad (a)$$

$$\begin{aligned} S = C + \delta y . \left(x . \Delta . Z - \frac{d . (x^2 . \Delta^2 . Z)}{1 . 2 . dx} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{d . \delta y}{dx} . \left(\frac{x^2 . \Delta^2 . Z}{1 . 2} - \text{etc.} \right) \\ + \text{etc.} \end{aligned} \quad (b)$$

C étant une constante arbitraire. L'équation

$$S' = f x^s . z' dx ,$$

traitée de la même manière, donnera

$$0 = Z' - \frac{d . (x . \Delta . Z')}{dx} + \frac{d^2 . (x^2 . \Delta^2 . Z')}{1 . 2 . dx^2} - \text{etc.}, \quad (a')$$

$$\begin{aligned} S' = C' + \delta y . \left(x . \Delta . Z' - \frac{d . (x^2 . \Delta^2 . Z')}{1 . 2 . dx} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{d . \delta y}{dx} . \left(\frac{x^2 . \Delta^2 . Z'}{1 . 2} - \text{etc.} \right) \\ + \text{etc.} \end{aligned} \quad (b')$$

les équations $S'' = f x^s . z'' dx$; $S''' = f x^s . z''' dx$, etc., produiront des équations semblables, que nous désignerons par (a'') , (b'') ; (a''') , (b''') ; etc.

Les équations (a) , (a') , (a'') , etc. détermineront les variables ϕ , ϕ' , ϕ'' , etc. en fonction de x ; et les équations (b) , (b') , (b'') , etc. détermineront les limites dans lesquelles on doit prendre les intégrales $\int x' . z dx$, $\int x' . z' dx$, etc. L'une de ces limites est $x=0$. Pour avoir les autres, on supposera d'abord S , S' , S'' , etc. nuls; les constantes C , C' , C'' , etc. seront par conséquent nulles dans les équations (b) , (b') , etc., puisque la supposition de $x=0$ rend nuls les autres termes de ces équations. En égalant ensuite séparément à zéro, les coefficients de δy , $\frac{d \cdot \delta y}{dx}$, etc. dans ces mêmes équations, on aura les suivantes,

$$\begin{aligned} 0 &= x . \Delta . Z - \frac{d . (x^2 . \Delta^2 . Z)}{1 . 2 . dx} + \text{etc.}, \\ 0 &= \frac{x^2 . \Delta^2 . Z}{1 . 2} - \text{etc.}, \\ &\text{etc.}; \\ 0 &= x . \Delta . Z' - \frac{d . (x^2 . \Delta^2 . Z')}{1 . 2 . dx} + \text{etc.}, \\ 0 &= \frac{x^2 . \Delta^2 . Z'}{1 . 2} - \text{etc.}, \\ &\text{etc.}; \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On éliminera, au moyen de ces équations, toutes les constantes arbitraires, moins une, des valeurs de ϕ , ϕ' , ϕ'' , etc., et l'on arrivera à une équation finale en x , dont les racines seront les limites des intégrales $\int x' . \phi dx$, $\int x' . \phi' dx$, etc. On déterminera autant de ces limites qu'il est nécessaire, pour que les valeurs de y , y' , etc. soient complètes.

Supposons maintenant que S ne soit pas nul, et qu'il soit égal à

$$p' . [l + l^{(1)} . s + l^{(2)} . s . (s-1) + \text{etc.}].$$

En faisant $C=0$ dans l'équation (b) , et en y mettant x' au lieu de δy , on aura

$$\begin{aligned} p' . [l + l^{(1)} . s + l^{(2)} . s . (s-1) + \text{etc.}] &= x' . \left(x . \Delta . Z - \frac{d . (x^2 . \Delta^2 . Z)}{1 . 2 . dx} + \text{etc.} \right) \\ &\quad + s . x' . \left(\frac{x . \Delta^2 . Z}{1 . 2} - \text{etc.} \right) \\ &\quad + \text{etc} \end{aligned}$$

d'où l'on conclut d'abord $x = p$, ensorte que les intégrales $fx' \cdot \phi dx$, $fx' \cdot \phi' dx$, etc., doivent être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p$. La comparaison des coefficients de s , $s \cdot (s-1)$, etc., donnera ensuite autant d'équations entre l , $l^{(1)}$, etc., et les constantes arbitraires des expressions de ϕ , ϕ' , etc. L'égalité à zéro de ces mêmes coefficients, dans les équations (b') , (b'') , etc., donnera de nouvelles équations entre ces arbitraires que l'on pourra ainsi déterminer au moyen de toutes ces équations. On aura, par ce procédé, les valeurs particulières de y_i , qui satisfont au cas où S' , S'' , etc. étant nuls, S a la forme que nous venons de lui supposer, ou, plus généralement, est égal à un nombre quelconque de fonctions de la même forme.

Pareillement, si l'on suppose que S , S'' , etc. étant nuls, S' est la somme d'un nombre quelconque de fonctions semblables, on déterminera les valeurs particulières de y_i , y'_i , etc., qui satisfont à ce cas, et ainsi du reste. En réunissant ensuite toutes ces valeurs, à celles que l'on aura déterminées dans le cas où S , S' , etc. sont nuls; on aura les expressions complètes de y_i , y'_i , etc., correspondantes au cas où S , S' , etc. ont les formes précédentes.

Il est facile d'étendre cette méthode aux équations aux différences infiniment petites, ou en partie finies, et en partie infiniment petites, et dans lesquelles les coefficients des variables principales et de leurs différences, sont des fonctions rationnelles de s , que l'on peut toujours rendre entières, en faisant disparaître les dénominateurs. Si l'on désigne, comme ci-dessus, par y_i , y'_i , etc., les variables principales de ces équations, et si l'on fait

$$y_i = fx' \cdot \phi dx, \quad y'_i = fx' \cdot \phi' dx, \quad \text{etc.};$$

on aura

$$\frac{dy_i}{ds} = fx' \cdot \phi dx \cdot \log x, \quad \frac{d^2 y_i}{ds^2} = fx' \cdot \phi dx \cdot (\log x)^2, \quad \text{etc.};$$

$$\Delta y_i = fx' \cdot (x-1) \cdot \phi dx, \quad \Delta^2 y_i = fx' \cdot (x-1)^2 \cdot \phi dx, \quad \text{etc.};$$

etc.;

$$\frac{dy'_i}{ds} = fx' \cdot \phi' dx \cdot \log x, \quad \text{etc.};$$

etc.

Les équations proposées prendrent ainsi les formes suivantes ,

$$S = f x^s . z dx, \quad S' = f x^s . z' dx, \quad \text{etc.}$$

En les traitant par la méthode précédente, on déterminera les valeurs de φ , φ' , etc. en fonctions de x , et les limites des intégrales $\int x^s . \varphi dx$, $\int x^s . \varphi' dx$, etc.

En faisant

$$y_s = f c^{-sx} . \varphi dx, \quad y'_s = f c^{-sx} . \varphi' dx, \quad \text{etc. ;}$$

on parviendrait à des équations semblables. Dans plusieurs circonstances, ces formes de y_s , y'_s , etc. seront plus commodes que les précédentes.

51. La principale difficulté que présente l'application de la méthode précédente, consiste dans l'intégration des équations différentielles linéaires qui déterminent φ , φ' , φ'' , etc. en x . Les degrés de ces équations ne dépendent point de ceux des équations aux différences en y_s , y'_s , etc. ; ils dépendent uniquement des puissances les plus élevées de s , dans leurs coefficients. En ne considérant donc qu'une seule variable y_s , l'équation différentielle en φ sera d'un degré égal au plus haut exposant de s , dans les coefficients de l'équation aux différences en y_s . L'équation différentielle en φ ne sera ainsi résoluble généralement que dans le cas où ce plus haut exposant est l'unité. Développons ce cas fort étendu.

Représentons l'équation différentielle en y_s par la suivante,

$$0 = V + s . T,$$

V et T étant des fonctions linéaires de la variable principale y_s , et de ses différences, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on fait

$$y_s = f \delta y . \varphi dx,$$

δy étant égal à x' , ou à c^{-sx} ; elle deviendra

$$0 = f \varphi dx . \left(M . \delta y + N . \frac{d . \delta y}{dx} \right);$$

M et N étant des fonctions de x ; on aura donc, en intégrant
par

par parties comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes,

$$0 = M \cdot \phi - \frac{d.(N\phi)}{dx},$$

$$0 = C + N\phi \cdot \delta y.$$

La première donne en l'intégrant,

$$\phi = \frac{H}{N} \cdot c^{\int \frac{M}{N} \cdot dx},$$

H étant une constante arbitraire. Supposons C nul dans la seconde équation; $x=0$ ou $x=\infty$ sera l'une des limites de l'intégrale $\int \delta y \cdot \phi dx$, suivant que l'on prend x^i ou c^{-ix} pour δy . On déterminera les autres limites, en résolvant l'équation $0 = N\phi \cdot \delta y$.

Appliquons à cette intégrale, la méthode d'approximation du n° 23. Si l'on désigne par a , la valeur de x , donnée par l'équation

$$0 = d.(N\phi \cdot \delta y),$$

et par Q , ce que devient la fonction $N\phi \cdot \delta y$, lorsqu'on y change x en a ; on fera

$$N\phi \cdot \delta y = Q \cdot c^{-t},$$

ce qui donne

$$t = \sqrt{\log Q - \log (N\phi) - \log \delta y}.$$

$\log \delta y$ est de l'ordre s ; si l'on suppose s très-grand, et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α sera un très-petit coefficient. La quantité sous le radical prendra cette forme $\frac{(x-a)^2}{\alpha} \cdot X$, X étant une fonction de $x - a$ et de α ; on aura donc, par le retour des suites, la valeur de x en t , par une série de cette forme,

$$x = a + \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot h t + \alpha \cdot h^{(1)} \cdot t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} \cdot h^{(2)} \cdot t^3 + \text{etc.}$$

Maintenant, y , étant égal à $\int \delta y \cdot \phi dx$, si l'on substitue dans cette intégrale, au lieu de $\phi \cdot \delta y$, sa valeur $\frac{Q \cdot c^{-t}}{N}$, elle deviendra $Q \cdot \int \frac{dx}{N} \cdot c^{-t}$; et si dans $\frac{dx}{N}$, on substitue pour x , sa valeur pré-

cédente en t , on aura y , par une suite de cette forme,

$$y = \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot Q \cdot \int dt \cdot c^{-t^2} \cdot [1 + \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot l^{(1)} \cdot t + \alpha \cdot l^{(2)} \cdot t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} \cdot l^{(3)} \cdot t^3 + \text{etc.}],$$

les limites de l'intégrale relative à t devant se déterminer par la condition qu'à ces limites, la quantité $N\phi \cdot \delta y$, ou son équivalente $Q \cdot c^{-t^2}$, soit nulle; d'où il suit que ces limites sont $t = -\infty$ et $t = \infty$; on aura donc par le n° 24,

$$y = \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot Q \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot l^{(2)} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \alpha^2 \cdot l^{(4)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \cdot \alpha^3 \cdot l^{(6)} + \text{etc.} \right).$$

Cette expression a l'avantage d'être indépendante de la détermination des limites en x , qui rendent nulle la fonction $N\phi \cdot \delta y$; ensorte qu'elle subsiste dans le cas même où cette fonction, égale à zéro, n'a point de racines réelles; elle subsiste encore dans le cas de s négatif. Cette remarque analogue à celle que nous avons faite dans le n° 25, et qui tient, comme elle, à la généralité de l'analyse, est très-remarquable en ce qu'elle donne le moyen d'étendre la formule précédente, à un grand nombre de cas auxquels la méthode qui nous y a conduits, semble d'abord se refuser.

Cette formule ne renferme que la constante arbitraire H , et par conséquent, elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée en y , si cette équation est d'un ordre supérieur à l'unité. Pour avoir dans ce cas, l'intégrale complète, il faudra chercher dans l'équation $0 = d(N\phi \cdot \delta y)$, autant de valeurs différentes de x , qu'il y a d'unités dans cet ordre. Soient $a, a', a'', \text{etc.}$ ces valeurs; on changera successivement dans l'expression précédente de y , a en $a', a'', \text{etc.}$, et H en $H', H'', \text{etc.}$; on aura autant de valeurs particulières qui renferment chacune une arbitraire, et dont la somme sera l'expression complète de y .

Quand les coefficients de la proposée en y , renferment des puissances de s supérieures à l'unité; on peut quelquefois décomposer cette équation en plusieurs autres qui ne renferment que cette première puissance. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$y_{i+1} = M \cdot y_i,$$

M étant une fonction rationnelle et entière de s ; on mettra cette fonction sous la forme

$$\frac{q.(s+b).(s+b').(s+b'').\text{etc.}}{(s+f).(s+f').(s+f'').\text{etc.}};$$

on fera ensuite

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= q.(s+b).z_i, & z'_{i+1} &= (s+b').z'_i, & \text{etc.}; \\ t_{i+1} &= (s+f).t_i, & t'_{i+1} &= (s+f').t'_i, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Il est facile, par ce qui précède, de déterminer z_i , t_i , etc. en intégrales définies, et de réduire ces intégrales en séries convergentes, lorsque s est un grand nombre. On aura ensuite

$$\mathcal{Y}_i = \frac{z_i.z'_i.\text{etc.}}{t_i.t'_i.\text{etc.}}.$$

Dans plusieurs cas où l'équation différentielle en ϕ étant d'un ordre supérieur au premier, ne peut être intégrée rigoureusement, on peut déterminer ϕ par une approximation très-convergente; en substituant ensuite cette valeur de ϕ dans l'intégrale $\int x'.\phi dx$, on peut obtenir d'une manière fort approchée la valeur de cette intégrale.

32. L'analyse exposée dans les numéros précédens, s'étend encore aux équations à différences partielles, finies et infiniment petites. Pour cela, considérons d'abord l'équation linéaire aux différentielles partielles dont les coefficients sont constans. En désignant par $\mathcal{Y}_{s,s'}$ la variable principale, s et s' étant les deux variables dont elle est fonction; et représentant cette équation par celle-ci, $V=0$, V étant une fonction linéaire de $\mathcal{Y}_{s,s'}$ et de ses différences partielles; on y supposera

$$\mathcal{Y}_{s,s'} = \int x'.x'^{s'}.\phi dx,$$

ϕ étant une fonction de x ; alors l'équation $V=0$ prend cette forme

$$0 = \int M.x'.x'^{s'}.\phi dx,$$

M étant une fonction de x et de x' , sans s ni s' . En égalant donc

M à zéro, on aura la valeur de x' en x , et cette valeur substituée dans l'intégrale $\int x'.x'^{s'}. \phi dx$, donnera l'expression générale de $y_{i,s'}$, dans laquelle ϕ est une fonction arbitraire de x ; les limites de l'intégrale étant indépendantes de x , mais d'ailleurs arbitraires. Si l'équation proposée $0 = V$, est de l'ordre n , il faudra, au moyen de l'équation $M=0$, déterminer un nombre n de valeurs de x' en x . La somme des n valeurs de $\int x'.x'^{s'}. \phi dx$ qui en résulteront, et dans lesquelles on pourra mettre pour ϕ des fonctions arbitraires différentes de x , sera l'expression complète de $y_{i,s'}$.

Il résulte de ce que nous avons dit dans la première partie de ce Livre, que l'équation $M=0$ est l'équation génératrice de l'équation proposée $V=0$.

Considérons présentement l'équation aux différences partielles

$$0 = V + s.T + s'.R,$$

dans laquelle V , T , et R sont des fonctions quelconques linéaires de $y_{i,s'}$ et de ses différences partielles, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on y suppose, comme ci-dessus,

$$y_{i,s'} = \int x'.x'^{s'}. \phi dx,$$

x' étant une fonction de x qu'il s'agit de déterminer. On aura une équation de cette forme

$$0 = \int x'.x'^{s'}. \phi dx. (M + N.s + P.s'),$$

M , N et P étant des fonctions de x et de x' , sans s ni s' ; or on a

$$\frac{d.(x'.x'^{s'})}{dx} = x'.x'^{s'}. \left(\frac{s}{x} + \frac{s' dx'}{x' dx} \right);$$

donc si l'on détermine x' par cette équation

$$\frac{dx'}{x} = \frac{P. dx}{Nx},$$

on aura

$$x'.x'^{s'}. (N.s + P.s') = Nx. \frac{d.(x'.x'^{s'})}{dx};$$

par conséquent, si l'on désigne $x'.x'^{s'}$ par δy , et si l'on suppose que l'on a substitué dans M et N pour x' sa valeur en x ,

on aura

$$0 = \int \phi dx \cdot (M \cdot \delta y + Nx \cdot \frac{d \cdot \delta y}{dx}).$$

Cette équation intégrée par parties, comme dans les numéros précédens, donne les deux suivantes,

$$0 = M\phi - \frac{d \cdot (Nx \cdot \phi)}{dx};$$

$$0 = Nx \cdot \phi \cdot \delta y.$$

La première détermine ϕ en x , et la seconde donne les limites de l'intégrale $\int \delta y \cdot \phi dx$.

Cette valeur de $y_{i,i'}$ ne renfermant point de fonction arbitraire, elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation proposée aux différences partielles. Pour la rendre complète, on observera que l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{Pdx}{Nx},$$

qui détermine x' en x , est $x' = Q$, Q étant une fonction de x , et d'une constante arbitraire que nous désignerons par u ; en représentant donc par ψ , une fonction arbitraire de u , l'équation proposée aux différences partielles sera satisfaite par cette valeur de $y_{i,i'}$,

$$y_{i,i'} = \iint x' \cdot Q' \cdot \psi dx \cdot du;$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites déterminées par l'équation $0 = N\phi \cdot \delta y$, et l'intégrale relative à u étant prise entre des limites quelconques. Cette valeur de $y_{i,i'}$ sera donc l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences partielles, si celle-ci est du premier ordre; mais si elle est d'un ordre supérieur, il faudra, au moyen de l'équation $0 = N\phi \cdot \delta y$, déterminer autant de valeurs de x en u , qu'il y a d'unités dans cet ordre. La réunion des valeurs de $y_{i,i'}$ auxquelles on parviendra, sera l'expression complète de $y_{i,i'}$.

CHAPITRE III.

Application des méthodes précédentes, à l'approximation de diverses fonctions de très-grands nombres.

PARMI les diverses fonctions auxquelles ces méthodes peuvent s'appliquer, je vais considérer les produits des nombres, les développemens des polynomes, et les différences infiniment petites et finies des fonctions, ces diverses quantités étant celles qui se présentent le plus souvent dans l'analyse des hasards.

De l'approximation des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et des termes des polynomes élevés à de grandes puissances.

33. Proposons-nous d'intégrer l'équation aux différences finies

$$0 = (s + 1) \cdot y_s - y_{s+1}.$$

Si l'on y suppose

$$y_s = \int x' \cdot \phi dx;$$

on aura, en désignant x' par δy ,

$$0 = \phi dx \cdot \left[(1 - x) \cdot \delta y + x \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right];$$

d'où l'on tire en intégrant par parties, suivant la méthode précédente, les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned} 0 &= \phi \cdot (1 - x) - \frac{d(\phi x)}{dx}, \\ 0 &= x^{s+1} \cdot \phi. \end{aligned}$$

La première équation donne, en l'intégrant,

$$\phi = A \cdot c^{-x};$$

et la seconde donne, pour déterminer les deux limites de l'intégrale $\int x'.\phi dx$,

$$0 = x'^{s+1}.c^{-x};$$

ces limites sont par conséquent $x = 0$ et $x = \infty$. Ainsi l'on a

$$y' = A.\int x'dx.c^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à x infini, et A étant une constante arbitraire.

Pour avoir cette intégrale en série, on déterminera, conformément à la méthode exposée dans le n° 23, la valeur de x , qui rend $x'.c^{-x}$ un *maximum*; cette valeur est s . On fera donc, suivant la méthode citée,

$$x'.c^{-x} = s'.c^{-s}.c^{-t'}.$$

En supposant $x = s + \theta$, cette équation devient

$$\left(1 + \frac{\theta}{s}\right)^s.c^{-\theta} = c^{-t'};$$

partant

$$t' = -s.\log\left(1 + \frac{\theta}{s}\right) + \theta = \frac{\theta^2}{2s} - \frac{\theta^3}{3s^2} + \frac{\theta^4}{4s^3} - \text{etc.};$$

ce qui donne par le retour des suites

$$\theta = t.\sqrt{2s} + \frac{2}{3}.t^3 + \frac{t^5}{9.\sqrt{2s}} + \text{etc.};$$

par conséquent

$$dx = d\theta = dt.\sqrt{2s}.\left(1 + \frac{4t}{3.\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6.s} + \text{etc.}\right);$$

la fonction $\int x'.\phi dx.c^{-x}$ deviendra donc

$$s'.c^{-s}.\int dt.c^{-t'}.\sqrt{2s}.\left(1 + \frac{4t}{3.\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6.s} + \text{etc.}\right).$$

L'intégrale relative à x devant être prise depuis x nul jusqu'à x infini, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. En intégrant comme dans le n° 30, on aura

$$y' = A.s^{s+\frac{1}{2}}.c^{-s}.\sqrt{2\pi}.\left(1 + \frac{1}{12.s} + \text{etc.}\right).$$

On peut déterminer fort simplement le facteur $1 + \frac{1}{12s} + \text{etc.}$ de cette manière. Désignons-le par

$$1 + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \text{etc.};$$

ce qui donne

$$y_s = A \cdot s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-s} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \text{etc.}\right).$$

En substituant cette valeur de y_s dans l'équation proposée

$$y_{s+1} = (s+1) \cdot y_s;$$

on aura

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-1} \cdot \left(1 + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \text{etc.}\right) = 1 + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \text{etc.},$$

ou

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \text{etc.}\right) \cdot \left[c^{1-(s+\frac{1}{2}) \cdot \log\left(1 + \frac{1}{s}\right)} - 1\right] \\ = -\frac{B}{s^2} + \frac{(B-2C)}{s^3} - \text{etc.}; \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned} 1 - \left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \log\left(1 + \frac{1}{s}\right) &= 1 - \left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3s^3} - \frac{1}{4s^4} + \text{etc.}\right) \\ &= -\frac{1}{12 \cdot s^2} + \frac{1}{12 \cdot s^3} - \text{etc.} \end{aligned}$$

On aura donc, en observant que $c^{-\frac{1}{12 \cdot s^2} + \text{etc.}} = 1 - \frac{1}{12 \cdot s^2} + \text{etc.},$

$$\left(1 + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \text{etc.}\right) \cdot \left(-\frac{1}{12 \cdot s^2} + \frac{1}{12 \cdot s^3} - \text{etc.}\right) = -\frac{B}{s^2} + \frac{B-2C}{s^3} - \text{etc.};$$

ce qui donne, en comparant les puissances semblables de $\frac{1}{s},$

$$B = \frac{1}{12}, \quad C = \frac{1}{288}, \quad \text{etc.};$$

donc

$$y_s = A \cdot s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-s} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} + \text{etc.}\right).$$

Ce

On déterminera la constante arbitraire A , au moyen d'une valeur particulière de y_i ; en supposant, par exemple, que s étant égal à μ , on ait $y_i = Y$; on aura

$$Y = A \cdot x f' dx \cdot c^{-x};$$

ce qui donne

$$A = \frac{Y}{\int x'' dx \cdot c^{-x}};$$

par conséquent,

$$y_i = \frac{Y \cdot s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-s} \cdot \sqrt{2\pi}}{\int x'' dx \cdot c^{-x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} + \text{etc.}\right). \quad (q)$$

Voyons maintenant de quelle nature est la fonction y_i . Pour cela, il faut intégrer l'équation aux différences finies

$$y_{i+1} = (s+1) \cdot y_i.$$

On trouve facilement que son intégrale est

$$y_i = Y \cdot (\mu+1) \cdot (\mu+2) \cdot (\mu+3) \cdot \dots \cdot s;$$

on aura donc, en comparant cette expression à la formule (q),

$$\begin{aligned} & (\mu+1) \cdot (\mu+2) \cdot (\mu+3) \cdot \dots \cdot s \\ &= \frac{s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-s} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} + \text{etc.}\right)}{\int x'' dx \cdot c^{-x}}. \end{aligned} \quad (q')$$

Si l'on fait $\mu = 0$, on aura $\int x'' dx \cdot c^{-x} = 1$; partant

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot s = s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-s} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} + \text{etc.}\right).$$

Si l'on fait $\mu = \frac{m}{n}$, m étant moindre que n ; on aura

$$s = s' + \frac{m}{n},$$

s' étant un nombre entier; ainsi

$$s^{s+\frac{1}{2}} = \left(s' + \frac{m}{n}\right)^{s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}} = s'^{s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}} \cdot c^{\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right) \cdot \log\left(1+\frac{m}{ns'}\right)};$$

or on a

$$\begin{aligned} \left(s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right) \cdot \log \left(1 + \frac{m}{ns'}\right) &= \left(s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{ns'} - \frac{m^2}{2n^2s'^2} + \text{etc.}\right) \\ &= \frac{m}{n} + \frac{(m^2 + mn)}{2n^2s'} + \text{etc.} \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en faisant $x = t^n$,

$$f x^{\frac{m}{n}} \cdot dx \cdot c^{-x} = \frac{m}{n} \cdot f x^{\frac{m}{n} - 1} \cdot dx \cdot c^{-x} = m \cdot f t^{m-1} dt \cdot c^{-t^n},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à t infini. En substituant ces valeurs dans la formule (q') , elle donnera

$$\begin{aligned} &m \cdot (m + n) \cdot (m + 2n) \cdot \dots \cdot (m + s'n) \\ &= \frac{n^{s'} \cdot s'^{s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}} \cdot c^{-s'} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{n^2 + 6mn + 6m^2}{12 \cdot n^2 s'} + \text{etc.}\right)}{f t^{m-1} dt \cdot c^{-t^n}}; \quad (q'') \end{aligned}$$

ensorte que la valeur approchée du produit des termes de la progression arithmétique $m, m + n, m + 2n$, etc. dépend des trois transcendentes c, π et $f t^{m-1} dt \cdot c^{-t^n}$.

Si dans cette équation on fait pour plus de simplicité $n = 1$, ce qui change m en μ , et si l'on observe que $f t^{\mu-1} dt \cdot c^{-t} = \frac{1}{\mu} \cdot f t^{\mu} dt \cdot c^{-t}$; on aura

$$\begin{aligned} &(1 + \mu) \cdot (2 + \mu) \cdot \dots \cdot (s' + \mu) \\ &= s'^{s' + \mu + \frac{1}{2}} \cdot c^{-s'} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1 + 6\mu + 6\mu^2}{12 \cdot s'} + \text{etc.}\right)}{f t^{\mu} dt \cdot c^{-t}}. \end{aligned}$$

En changeant μ dans $-\mu$, on aura

$$\begin{aligned} &(1 - \mu) \cdot (2 - \mu) \cdot \dots \cdot (s' - \mu) \\ &= s'^{s' - \mu + \frac{1}{2}} \cdot c^{-s'} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1 - 6\mu + 6\mu^2}{12 \cdot s'} + \text{etc.}\right)}{f t^{-\mu} dt \cdot c^{-t}}. \end{aligned}$$

En multipliant ces deux équations, l'une par l'autre, on aura

$$(1 - \mu^2) \cdot (2 - \mu^2) \cdot \dots \cdot (s'^2 - \mu^2) = \frac{s'^{2s' + 1} \cdot c^{-2s'} \cdot 2\pi \cdot \left(1 + \frac{1 + 6\mu^2}{6 \cdot s'} + \text{etc.}\right)}{f t^{-\mu} dt \cdot c^{-t} \cdot f t^{\mu} dt \cdot c^{-t}}.$$

L'équation (T) du n° 24 donne

$$n^3 \cdot \int t^{n+r-2} dt \cdot c^{-t^n} \cdot \int t^{n-r} dt \cdot c^{-t^n} = \frac{(r-1) \cdot \pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right) \cdot \pi}.$$

En faisant $n=1$ et $\mu=r-1$, on a

$$\int t^\mu dt \cdot c^{-t} \cdot \int t^{-\mu} dt \cdot c^{-t} = \frac{\mu\pi}{\sin \mu\pi};$$

on a donc

$$\sin \mu\pi = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1-\mu^2) \cdot (4-\mu^2) \dots (s'^2-\mu^2) \cdot \left(1 - \frac{(1+6\mu^2)}{6s'} + \text{etc.}\right) \cdot s'^{-2s'-1} \cdot c^{2s'}.$$

Si l'on fait μ infiniment petit, cette équation donne

$$2\pi = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots s'^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6s'} + \text{etc.}\right) \cdot s'^{-2s'-1} \cdot c^{2s'};$$

divisant donc l'équation précédente par celle-ci, on aura

$$\sin \mu\pi = \mu\pi \cdot (1-\mu^2) \cdot \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu^2}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu^2}{s'^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu^2}{s'} + \text{etc.}\right).$$

Si l'on fait s' infini, on a pour l'expression de $\sin \phi$, ϕ étant égal à $\mu\pi$, le produit infini

$$\phi \cdot \left(1 - \frac{\phi^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\phi^2}{2^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\phi^2}{3^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\phi^2}{4^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \text{etc.};$$

l'expression de $\sin \phi$ est ainsi décomposable dans une infinité de facteurs; ce que l'on sait d'ailleurs.

En supposant ϕ imaginaire et égal à $\phi' \cdot \sqrt{-1}$, $\sin \phi$ devient $\frac{c^{-\phi'} - c^{\phi'}}{2\sqrt{-1}}$; on a donc

$$c^{\phi'} - c^{-\phi'} = 2\phi' \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{2^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{3^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{s'^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{s' \cdot \pi^2} + \text{etc.}\right);$$

et en faisant s' infini, on voit que $c^{\phi'} - c^{-\phi'}$ est égal au produit infini

$$2\phi' \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\phi'^2}{2^2 \cdot \pi^2}\right) \cdot \text{etc.}$$

On aura, par un procédé semblable, le produit continu de facteurs dont le terme général est une fonction rationnelle entière ou fractionnaire de s . Mais l'expression à laquelle on parviendra, pourra contenir d'autres transcendentes dépendantes d'intégrales définies de la forme $\int x^\mu dx \cdot c^{-x}$.

On peut observer ici que ces produits étant mis sous la forme $\int x^i \cdot \varphi dx$; leur différentiation par rapport à la variable s , présente une idée claire, et alors on a pour cette différentielle, $\int x^i \cdot \varphi dx \cdot \log x$.

Les expressions de y , données par les formules (q) et (q') du numéro précédent, ont encore lieu suivant la remarque du n° 50, dans le cas où s et μ sont négatifs, quoique dans ce cas, l'équation

$$0 = x^{s+1} \cdot c^{-x},$$

qui détermine les limites de l'intégrale définie qui représente la valeur de y , n'ait pas plusieurs racines réelles. Si dans la formule (q) du numéro précédent, on change s dans $-s$, et μ dans $-\mu$, elle devient

$$y_{-} = \frac{Y \cdot \sqrt{-1} \cdot c^s \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} - \text{etc.}\right)}{(-1)^i \cdot s^{s-\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^\mu}},$$

Y étant la valeur de y , qui répond à $s = -\mu$. Toute la difficulté se réduit à intégrer $\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^\mu}$. Pour y parvenir, il faut suivre le même procédé dont on a fait usage pour réduire en série, l'intégrale $\int \frac{c^{-x} \cdot dx}{x^i}$. On fera donc

$$x = -\mu + \omega \cdot \sqrt{-1},$$

$-\mu$ étant la valeur de x donnée par l'équation

$$0 = \frac{c^{-x}}{x^\mu};$$

on aura ainsi

$$\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^\mu} = \frac{c^\mu \cdot \sqrt{-1}}{(-1)^\mu} \cdot \int \frac{d\omega \cdot c^{-\omega} \cdot \sqrt{-1}}{(\mu - \omega \cdot \sqrt{-1})^\mu}.$$

L'intégrale relative à x devant s'étendre entre les deux limites qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^\mu}$, il est clair que l'intégrale relative à ϖ doit s'étendre depuis $\varpi = -\infty$ jusqu'à $\varpi = \infty$; en réunissant donc les deux quantités $\frac{c^{-\varpi} \cdot \sqrt{-1}}{(\mu - \varpi \cdot \sqrt{-1})^\mu}$ et $\frac{c^{\varpi} \cdot \sqrt{-1}}{(\mu + \varpi \cdot \sqrt{-1})^\mu}$, qui répondent aux mêmes valeurs de ϖ , affectées de signes contraires, on aura

$$\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^\mu} = \frac{c^\mu \cdot \sqrt{-1}}{(-1)^\mu} \cdot f d\varpi \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos \varpi \cdot \frac{(\mu + \varpi \cdot \sqrt{-1})^\mu + (\mu - \varpi \cdot \sqrt{-1})^\mu}{(\mu^2 + \varpi^2)^\mu} \\ + \sqrt{-1} \cdot \sin \varpi \cdot \frac{(\mu - \varpi \cdot \sqrt{-1})^\mu - (\mu + \varpi \cdot \sqrt{-1})^\mu}{(\mu^2 + \varpi^2)^\mu} \end{array} \right\},$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \infty$. Si l'on développe les quantités sous le signe f , les imaginaires disparaissent, et il ne reste qu'une fonction réelle que nous désignerons par $Qd\varpi$; on aura ainsi

$$\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^\mu} = \frac{c^\mu \cdot \sqrt{-1}}{(-1)^\mu} \cdot f Q d\varpi;$$

partant

$$y_{-s} = \frac{Y \cdot c^{s-\mu} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} - \text{etc.}\right)}{(-1)^{s-\mu} \cdot s^{s-1} \cdot f Q d\pi}.$$

Voyons présentement quelle fonction de s est y_{-s} . Pour cela, reprenons l'équation primitive

$$0 = (s+1) \cdot y_s - y_{s+1};$$

en y changeant s dans $-s$, et faisant $y_{-s} = u_s$, elle devient

$$0 = (s-1) \cdot u_s + u_{s-1};$$

équation dont l'intégrale est

$$u_s = \frac{(-1)^{s-\mu} \cdot Y}{\mu \cdot (1+\mu) \cdot (2+\mu) \cdot \dots \cdot (s-1)} = y_{-s},$$

Y étant comme ci-dessus, égal à $y_{-\mu}$. Si l'on compare cette ex-

pression de y_- , à la précédente, et si l'on observe que $s - \mu$ est un nombre entier, et qu'ainsi l'on a $(-1)^{2s-2\mu} = 1$; on aura

$$\frac{1}{(\mu+1).(\mu+2)\dots(s-1)} = \frac{\mu \cdot \sqrt{2\pi} \cdot c^{s-\mu} \cdot \left(1 - \frac{1}{12 \cdot s} + \frac{1}{288 \cdot s^2} - \text{etc.}\right)}{s^{s-\frac{1}{2}} \cdot \int Q d\varpi}.$$

En divisant les deux membres de cette équation par s , et les renversant ensuite, on aura

$$(\mu+1).(\mu+2).(\mu+3)\dots s = \frac{s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{\mu-s}}{\mu \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot s} + \text{etc.}\right) \cdot \int Q d\varpi.$$

Si l'on compare cette équation à la formule (q') du numéro précédent, on a ce résultat remarquable,

$$\int Q d\varpi = \frac{2\mu \cdot \pi \cdot c^{-\mu}}{\int x^{\mu} dx \cdot c^{-x}}; \quad (O)$$

Je suis parvenu à cette équation générale, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1782, par l'analyse précédente, fondée, comme on voit, sur le passage du réel à l'imaginaire. En faisant successivement dans Q , $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, etc., on aura les valeurs d'un nombre infini d'intégrales définies; ainsi dans le cas de $\mu=1$, l'équation (O) donne

$$\int \frac{d\varpi \cdot (\cos \varpi + \varpi \cdot \sin \varpi)}{1 + \varpi^2} = \frac{\pi}{c},$$

formule que j'ai donnée pareillement dans les Mémoires cités. Cette formule et toutes celles du même genre, peuvent se vérifier par les formules du n° 26; car on a par ce numéro,

$$\int \frac{d\varpi \cdot \cos \varpi}{1 + \varpi^2} = \frac{\pi}{2c} = \int \frac{\varpi \cdot d\varpi \cdot \sin \varpi}{1 + \varpi^2}.$$

Nous observerons ici, comme dans les Mémoires cités, que $\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^{\mu}}$ étant égal à $\frac{c^{\mu} \cdot \sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \cdot \int Q d\varpi$; on a, en substituant au lieu de $\int Q d\varpi$, sa valeur donnée par l'équation (O),

$$\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{2\mu \cdot \pi \cdot (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu} dx \cdot c^{-x}} = \frac{2\pi \cdot (-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu-1} dx \cdot c^{-x}},$$

la première intégrale étant prise entre les deux valeurs imaginaires de x qui rendent nulle la quantité $\frac{e^{-x}}{x^\mu}$, et les deux autres intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini; ce qui donne un moyen facile de transformer dans celles-ci, les intégrales $\int \frac{dx \cdot \sin x}{x^\mu}$ et $\int \frac{dx \cdot \cos x}{x^\mu}$.

34. Considérons maintenant l'équation générale

$$0 = (a' + b's) \cdot y_{s+1} - (a + bs) \cdot y_s.$$

Si l'on fait

$$\frac{a}{b} = n, \quad \frac{a'}{b'} = n' + 1, \quad \frac{b}{b'} = p;$$

elle prend cette forme

$$0 = (n' + s + 1) \cdot y_{s+1} - (n + s) \cdot p \cdot y_s.$$

Supposons

$$y_s = f x^{s-1} \cdot \phi dx;$$

nous aurons, en intégrant par parties,

$$0 = x^s \cdot \phi \cdot (x - p) + f x^{s-1} \cdot [\phi dx \cdot (n'x - np) + (p - x) \cdot d\phi].$$

Cette équation donne pour déterminer ϕ , la suivante,

$$0 = (n'x - np) \cdot \phi dx + (p - x) \cdot d\phi;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\phi = A \cdot x^n \cdot (p - x)^{n' - n},$$

A étant une constante arbitraire. On aura ensuite pour déterminer les limites de l'intégrale, l'équation

$$0 = x^s \cdot \phi \cdot (p - x),$$

ou

$$0 = x^{n+s} \cdot (p - x)^{n'+1-n}.$$

Ces limites sont donc $x = 0$ et $x = p$, si $n + s$ et $n' + 1 - n$ sont des quantités positives. Ainsi l'on aura, en prenant l'intégrale dans ces limites,

$$y_s = A \cdot f x^{n+s-1} dx \cdot (p - x)^{n' - n}.$$

On déterminera la constante A , au moyen d'une valeur particulière de y . Soit y_μ cette valeur; on aura

$$A = \frac{y_\mu}{f x^{n+\mu-1} \cdot dx \cdot (p-x)^{n'-n}};$$

par conséquent,

$$y = \frac{y_\mu \cdot f x^{n+s-1} \cdot dx \cdot (p-x)^{n'-n}}{f x^{n+\mu-1} \cdot dx \cdot (p-x)^{n'-n}}.$$

Intégrons présentement l'équation proposée aux différences en y . Son intégrale est

$$y = \frac{(n+\mu) \cdot (n+\mu+1) \dots (n+s-1)}{(n'+\mu+1) \cdot (n'+\mu+2) \dots (n'+s)} \cdot y_\mu \cdot p^{s-\mu}$$

Dans cette expression, comme dans toutes celles formées de produits, les facteurs du numérateur ne commencent que pour la valeur de s qui rend le dernier facteur égal au premier, ce qui a lieu ici lorsque s est égal à $\mu + 1$; il en est de même des facteurs du dénominateur. Pour la valeur de s égale à μ , le numérateur et le dénominateur se réduisent à l'unité qui est censée les multiplier l'un et l'autre. Si l'on compare les deux expressions précédentes de y , on aura

$$\frac{(n+\mu) \cdot (n+\mu+1) \dots (n+s-1)}{(n'+\mu+1) \cdot (n'+\mu+2) \dots (n'+s)} \cdot p^{s-\mu} = \frac{f x^{n+s-1} \cdot dx \cdot (p-x)^{n'-n}}{f x^{n+\mu-1} \cdot dx \cdot (p-x)^{n'-n}}.$$

Faisons $p-x=pu^2$; le second membre de cette équation deviendra

$$p^{s-\mu} \cdot \frac{f u^{2n-2n'+1} \cdot du \cdot (1-u^2)^{n+s-1}}{f u^{2n-2n'+1} \cdot du \cdot (1-u^2)^{n+\mu-1}},$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, parce que ces limites répondent aux limites $x=p$ et $x=0$. On a donc

$$\frac{(n+\mu) \cdot (n+\mu+1) \dots (n+s-1)}{(n'+\mu+1) \cdot (n'+\mu+2) \dots (n'+s)} = \frac{f u^{2n'-2n+1} \cdot du \cdot (1-u^2)^{n+s-1}}{f u^{2n'-2n+1} \cdot du \cdot (1-u^2)^{n+\mu-1}}.$$

Supposons $n = \frac{1}{2}$, $n' = 0$ et $\mu = 1$; si l'on observe que

$$f du \cdot \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{4} \pi;$$

on

on aura

$$\frac{(s+1).(s+2).\dots.2s}{1.2.3.\dots.s} = \frac{2^{2s+1}}{\pi} \cdot fdu \cdot (1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}.$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient du terme moyen ou indépendant de α , du binome $\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)^{2s}$; on aura donc au moyen des méthodes précédentes, ce coefficient, par une approximation rapide, lorsque s est un grand nombre. Pour cela, nous ferons

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}} = \alpha, \quad 1-u^2 = c^{-\alpha t^2};$$

ce qui donne

$$u = \sqrt{1 - c^{-\alpha t^2}}$$

et

$$fdu \cdot (1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = fdu \cdot c^{-t^2}.$$

Supposons

$$\sqrt{1 - c^{-\alpha t^2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot t \cdot [1 + \alpha \cdot q^{(1)} \cdot t^2 + \alpha^2 \cdot q^{(2)} \cdot t^4 + \alpha^3 \cdot q^{(3)} \cdot t^6 + \text{etc.}].$$

En prenant les différences logarithmiques des deux membres de cette équation, on aura

$$\frac{1+3\alpha \cdot q^{(1)} \cdot t^2 + 5\alpha^2 \cdot q^{(2)} \cdot t^4 + 7\alpha^3 \cdot q^{(3)} \cdot t^6 + \text{etc.}}{t + \alpha \cdot q^{(1)} \cdot t^3 + \alpha^2 \cdot q^{(2)} \cdot t^5 + \alpha^3 \cdot q^{(3)} \cdot t^7 + \text{etc.}} = \frac{\alpha t \cdot c^{-\alpha t^2}}{1 - c^{-\alpha t^2}};$$

et ce dernier membre est égal à

$$\frac{1 - \alpha \cdot t^2 + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot t^4 - \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot t^6 + \text{etc.}}{t \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot t^2}{1.2} + \frac{\alpha^2 \cdot t^4}{1.2.3} - \frac{\alpha^3 \cdot t^6}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right)}.$$

On aura donc en comparant cette quantité au premier membre, et réduisant au même dénominateur; l'équation générale

$$0 = 2i \cdot q^{(i)} - \frac{(2i-3)}{1.2} \cdot q^{(i-1)} + \frac{(2i-6)}{1.2.3} \cdot q^{(i-2)} - \frac{(2i-9)}{1.2.3.4} \cdot q^{(i-3)} \\ + \frac{(2i-12)}{1.2.3.4.5} \cdot q^{(i-4)} - \text{etc.},$$

$q^{(0)}$ étant égal à l'unité. Si l'on fait successivement dans cette équation, $i=1, i=2, i=3$, etc.; on aura les valeurs successives $q^{(1)}$,

$q^{(2)}, q^{(3)}, \text{ etc.}$; et l'on trouvera

$$q^{(1)} = -\frac{1}{4}, \quad q^{(2)} = \frac{5}{96}, \quad \text{etc.}$$

On aura ensuite

$$fdu.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}}.f dt.c^{-t^2} [1 + 3\alpha.q^{(1)}.t^2 + 5\alpha^2.q^{(2)}.t^4 + 7\alpha^3.q^{(3)}.t^6 + \text{etc.}].$$

L'intégrale relative à u devant être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; on aura donc par le n° 27

$$fdu.(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \sqrt{\alpha\pi}. \left\{ 1 + \frac{1.3}{2}.\alpha.q^{(1)} + \frac{1.3.5}{2^2}.\alpha^2.q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3}.\alpha^3.q^{(3)} + \text{etc.} \right\};$$

partant

$$\frac{(s+1).(s+2).(s+3) \dots 2s}{1.2.3 \dots s} = \frac{2^{2s}}{\sqrt{(s-\frac{1}{2}).\pi}}. \left\{ 1 + \frac{1.3}{2}.\alpha.q^{(1)} + \frac{1.3.5}{2^2}.\alpha^2.q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3}.\alpha^3.q^{(3)} + \text{etc.} \right\}.$$

Ainsi l'on aura par une suite très-convergente, le terme moyen ou indépendant de α , du binôme $\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)^{2s}$.

On parviendra plus simplement à ce résultat, par la méthode suivante, qui peut s'étendre à un polynome quelconque.

55. Nommons y , le terme moyen ou indépendant de α , du binôme $\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)^{2s}$, ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de $c^{\pm\varpi}\sqrt{-1}$, dans le développement du binôme $(c^{\varpi}\sqrt{-1} + c^{-\varpi}\sqrt{-1})^{2s}$. Si l'on multiplie ce développement par $d\varpi$, et qu'on l'intègre depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \frac{1}{2}\pi$; il est facile de voir que cette intégrale sera $\frac{1}{2}\pi.y$, et qu'ainsi on a

$$y = \frac{2}{\pi}.f d\varpi. (c^{\varpi}\sqrt{-1} + c^{-\varpi}\sqrt{-1})^{2s}.$$

En effet, en développant le binome renfermé sous le signe f , et substituant au lieu de $c^{\pm 2r\varpi}\sqrt{-1}$, sa valeur $\cos 2r\varpi \pm \sqrt{-1}.\sin 2r\varpi$,

on aura le terme moyen du binome, plus une suite de cosinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples; en les multipliant par $d\varpi$, et les intégrant, cette suite se transformera dans une suite de sinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples, sinus qui sont nuls aux deux limites $\varpi=0$ et $\varpi=\frac{1}{2}\pi$. Il ne restera ainsi dans l'intégrale que le terme moyen du binome, multiplié par $\frac{1}{2}\pi$. Cela posé, si l'on substitue au lieu du binome $c^{\varpi}\sqrt{-1} + c^{-\varpi}\sqrt{-1}$, sa valeur $2.\cos\varpi$, on aura

$$y_1 = \frac{2^{2s+1}}{\pi} \cdot f d\varpi \cdot (\cos\varpi)^{2s};$$

en supposant $\sin\varpi = u$, on aura

$$y_1 = \frac{2^{2s+1}}{\pi} \cdot f du \cdot (1-u^2)^{s-\frac{1}{2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$; ce qui coïncide avec ce que l'on a trouvé dans le numéro précédent.

Considérons maintenant le trinome $(\frac{1}{a} + 1 + a)^s$, et nommons y_1 le terme moyen ou indépendant de a , dans le développement de ce trinome. Ce terme sera le terme indépendant de $c^{\pm\varpi}\sqrt{-1}$, dans le développement du trinome $(c^{\varpi}\sqrt{-1} + 1 + c^{-\varpi}\sqrt{-1})^s$; on aura conséquemment, en appliquant ici le raisonnement qui précède,

$$y_1 = \frac{1}{\pi} \cdot f d\varpi \cdot (1 + 2.\cos\varpi)^s;$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$. La condition du *maximum* de la fonction $(1 + 2.\cos\varpi)^s$ donne $\sin\varpi=0$; ensorte que les deux limites de l'intégrale, $\varpi=0$ et $\varpi=\pi$, répondent à des *maxima* de cette fonction; on partagera donc l'intégrale précédente dans les deux suivantes,

$$f d\varpi \cdot (1 + 2.\cos\varpi)^s, \quad (-1)^s \cdot f d\varpi \cdot (2.\cos\varpi - 1)^s;$$

la première de ces intégrales étant prise depuis ϖ nul jusqu'à la valeur de ϖ , qui rend nulle la quantité $2.\cos\varpi + 1$; et la seconde intégrale étant prise depuis $\varpi=0$, jusqu'à sa valeur qui rend nulle la quantité $2.\cos\varpi - 1$.

Pour obtenir la première intégrale en série convergente, on fera

$$(1 + 2 \cos \varpi)^s = 3^s \cdot e^{-t^2};$$

en supposant $\alpha = \frac{1}{s}$, extrayant la racine s de chaque membre, et développant $\cos \varpi$ et $e^{-\alpha t^2}$, on aura

$$3 - \varpi^2 + \frac{\varpi^4}{12} - \text{etc.} = 3 - 3\alpha t^2 + \frac{3\alpha^2 t^4}{2} - \text{etc.};$$

d'où l'on tire par le retour des suites,

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}} t \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{\alpha t^2}{8} + \text{etc.}\right);$$

partant,

$$fd\varpi \cdot (1 + 2 \cos \varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}} \cdot fdt \cdot e^{-t^2} \cdot \left(1 - \frac{3t^2}{8 \cdot s} + \text{etc.}\right).$$

L'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; on aura donc

$$fd\varpi \cdot (1 + 2 \cos \varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{s}} \cdot \left(1 - \frac{3}{16 \cdot s} + \text{etc.}\right).$$

On trouvera de la même manière

$$fd\varpi \cdot (2 \cos \varpi - 1)^s = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{s}} \cdot \left(1 - \frac{5}{16 \cdot s} + \text{etc.}\right);$$

on aura donc

$$y_s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \sqrt{s\pi}} \cdot \left(1 - \frac{3}{16 \cdot s} + \text{etc.}\right) + \frac{(-1)^s}{2 \cdot \sqrt{s\pi}} \cdot \left(1 - \frac{5}{16 \cdot s} + \text{etc.}\right).$$

s étant supposé un très grand nombre, cette quantité se réduit à très-peu près à $\frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2 \cdot \sqrt{s\pi}}$. C'est l'expression fort approchée du terme moyen ou indépendant de α , du binôme $\left(\frac{1}{\alpha} + 1 + \alpha\right)^s$.

On déterminera de la même manière, le terme moyen d'un polynome quelconque, élevé à une très-haute puissance. Supposons d'abord le nombre des termes du polynome, impair et égal à $2n+1$;

et représentons ce polynome par

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} \dots + \frac{1}{a} + 1 + a \dots + a^{n-1} + a^n.$$

En substituant $e^{i\varpi} \sqrt{-1}$ pour a , ce polynome devient

$$1 + 2 \cos \varpi + 2 \cos 2\varpi \dots + 2 \cos n\varpi;$$

or cette fonction est égale à $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}$; la puissance s du polynome est donc

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s.$$

Le terme moyen de cette puissance, est le terme indépendant de ϖ , dans son développement en cosinus de l'angle ϖ et de ses multiples. On aura évidemment ce terme, en multipliant la puissance par $d\varpi$; en prenant ensuite l'intégrale depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$, et en la divisant par π . Ce terme est donc égal à

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int d\varpi \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s.$$

La condition du *maximum* de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}$ donne l'équation

$$\text{tang} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi = (2n+1) \cdot \text{tang} \frac{1}{2} \varpi.$$

Il y a depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\pi$, plusieurs *maxima* alternativement positifs et négatifs. Le premier répond à ϖ nul et donne

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s = (2n+1)^s.$$

Pour avoir l'intégrale précédente, depuis ce *maximum* jusqu'au point où $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}$ est nul, ce qui a lieu d'abord lorsque

$\varpi = \frac{2\pi}{2n+1}$, on fera

$$\left(\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \varpi \right)}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s = (2n+1)^s \cdot c^{-t^s}.$$

En prenant les logarithmes, et réduisant en série relativement aux puissances de ϖ , la fonction

$$s \cdot \log \left(\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \varpi \right)}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right);$$

on aura

$$\frac{n \cdot (n+1)}{6} \cdot s \varpi^2 + \text{etc.} = t^2;$$

ce qui donne

$$d\varpi = \frac{dt \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{n \cdot (n+1)} \cdot s} + \text{etc.};$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi} \cdot \int \frac{dt \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{n \cdot (n+1)} \cdot s} \cdot c^{-t^s} + \text{etc.}$$

Elle doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; car à l'origine, ou lorsque ϖ est nul, t est nul; et à la limite, où $\varpi = \frac{2\pi}{2n+1}$, t est infini; cette intégrale devient donc, en ne considérant que le premier terme, et négligeant les suivans qui sont, par rapport à lui, de l'ordre $\frac{1}{s}$,

$$\frac{(2n+1)^s \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{n \cdot (n+1)} \cdot 2s\pi};$$

Le second *maximum* est négatif, et répond à une valeur de $\left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi$, comprise entre $\frac{5}{4} \pi$ et $\frac{3}{2} \pi$. En effet, l'équation du *maximum*

$$\text{tang} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi = (2n+1) \cdot \text{tang} \frac{1}{2} \varpi,$$

donne

$$\text{tang} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi > \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi.$$

Ainsi $\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega$ étant compris dans le second *maximum* entre π et 2π , $\text{tang} \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega$ surpasse π ; par conséquent $\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega$ surpasse $\pi + \frac{1}{4}\pi$; il est donc compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. L'équation précédente du *maximum* donne

$$\frac{-\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega}{\sin \frac{1}{2} \omega} = \frac{2n+1}{\sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} \omega + (2n+1)^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \omega}}.$$

Ce dernier membre est plus petit que

$$\frac{2n+1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega}}$$

$\frac{1}{2}\omega$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}\pi$, il est facile de s'assurer que $\frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega}$ n'est jamais moindre que sa valeur qui répond à $\omega = \pi$, et qui est égale à $\frac{2}{\pi}$; le second membre dont il s'agit, est donc généralement plus petit que

$$\frac{2n+1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Relativement au second *maximum*, $\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega$ étant compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$, ce membre sera plus petit que $(2n+1) \cdot \frac{2}{5}$; ainsi la puissance s de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega}{\sin \frac{1}{2} \omega}$, ne surpassera point $(2n+1)^s \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^s$; elle sera donc, lorsque s est un très-grand nombre, incomparablement plus petite que la même puissance correspondante au premier *maximum*, et qui est égal à $(2n+1)^s$.

On verra de la même manière, que le troisième *maximum* est compris entre $\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega = \frac{3}{4}\pi$, et $\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega = \frac{5}{2}\pi$, et qu'à ce

maximum, la puissance s de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \omega}{\sin \frac{1}{2} \omega}$ ne surpasse pas $(2n+1)^s \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^s$; que le quatrième *maximum* est compris entre

$\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi = \frac{13}{4} \pi$, et $\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi = \frac{7}{2} \pi$, et qu'à ce *maximum*,

la puissance s de $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}$ ne surpasse point $(2n+1) \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^s$, et ainsi de suite.

Maintenant, si à partir de l'un quelconque de ces *maxima*, on fait

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}\right)^s = \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \Pi}{\sin \frac{1}{2} \Pi}\right)^s \cdot e^{-t^2},$$

Π étant la valeur de ϖ qui correspond à ce *maximum*; et si l'on fait

$$\varpi = \Pi + \varpi';$$

on aura en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation précédente entre ϖ et t ,

$$\begin{aligned} s \cdot \log \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot (\Pi + \varpi') - s \cdot \log \sin \frac{1}{2} (\Pi + \varpi') \\ = s \cdot \left[\log \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \Pi - \log \sin \frac{1}{2} \Pi \right] - t^2. \end{aligned}$$

En développant le premier membre de cette équation suivant les puissances de ϖ' , la comparaison de la première puissance donnera d'abord l'équation du *maximum*

$$\tan\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \Pi = (2n+1) \cdot \tan \frac{1}{2} \Pi.$$

En ne considérant ensuite que la seconde puissance de ϖ' , on aura

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \cdot s \varpi'^2 = t^2;$$

ce qui donne

$$d\varpi' = \frac{2dt}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot 2s}};$$

l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int d\varpi \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}\right)^s$$

prise entre les deux limites entre lesquelles $\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi}$ est nul
de

de part et d'autre du *maximum* de cette fonction, est donc à très-peu près

$$\frac{2}{\sqrt{2n \cdot (n+1) \cdot s\pi}} \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \Pi}{\sin \frac{1}{2} \Pi} \right)^s.$$

Cette expression a généralement lieu pour les intégrales relatives à tous les *maxima* qui suivent le premier; seulement il faut n'en prendre que la moitié relativement au dernier qui correspond à $\Pi = \pi$. Il résulte de ce qui précède, que cette expression par rapport au second *maximum* est moindre, abstraction faite du signe, que

$$\frac{2}{\sqrt{2n \cdot (n+1) \cdot s\pi}} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^s;$$

que relativement au troisième *maximum*, elle est moindre que

$$\frac{2}{\sqrt{2n \cdot (n+1) \cdot s\pi}} \cdot \left(\frac{2}{9} \right)^s;$$

et ainsi de suite. Lorsque s est un très-grand nombre, ces quantités décroissent avec une extrême rapidité, et elles sont incomparablement plus petites que la quantité relative au premier *maximum*, et qui, comme on l'a vu, est

$$\frac{(2n+1)^s \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2n \cdot (n+1) \cdot s\pi}};$$

on peut donc n'avoir égard qu'à cette dernière intégrale, et l'on voit que cela est rigoureux dans le cas de n infini; car l'équation de condition du *maximum*, donne alors $\left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \Pi = \left(\frac{2r+1}{2} \right) \cdot \pi$,

r étant un nombre entier, ce qui rend $\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \Pi}{\sin \frac{1}{2} \Pi}$ fini, excepté lorsque Π est zéro, ce qui répond au premier *maximum*.

Si le polynome est composé d'un nombre de termes, pair et égal à $2n$, tel que

$$\frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a^{n-\frac{3}{2}}} \dots + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{1}{2}} \dots + a^{n-\frac{3}{2}} + a^{n-\frac{1}{2}};$$

en y substituant $c^{\omega} \sqrt{-1}$ au lieu de α , il devient

$$2 \cdot \cos \frac{1}{2} \omega + 2 \cdot \cos \frac{3}{2} \omega \dots + 2 \cdot \cos \left(\frac{2n-1}{2} \right) \cdot \omega,$$

ou $\frac{\sin n\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$. Ce polynome élevé à une puissance entière et positive, ne peut avoir de terme moyen ou indépendant des cosinus de $\frac{1}{2} \omega$ et de ses multiples, qu'autant que cette puissance est paire; représentons-la par $2s$: alors le terme moyen sera

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int d\omega \cdot \left(\frac{\sin n\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega} \right)^{2s},$$

l'intégrale étant prise depuis ω nul jusqu'à $\omega = \pi$. Cette intégrale se compose de diverses intégrales partielles relatives aux divers *maxima* de la fonction $\frac{\sin n\omega}{\sin \frac{1}{2}\omega}$; mais on s'assurera facilement, par l'analyse précédente, que toutes ces intégrales, lorsque $2s$ est un très-grand nombre, et lorsque n est plus grand que l'unité, sont incomparablement plus petites que celle qui est relative au premier *maximum* qui correspond à ω nul; et alors on trouve à très-peu près le terme moyen de la puissance $2s$ du polynome, égal à

$$\frac{(2n)^{2s} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot s\pi}}.$$

En rapprochant ce résultat, du précédent, on voit que si l'on nomme généralement n' le nombre des termes du polynome, et s' la puissance à laquelle il est élevé; le terme moyen du développement sera, lorsqu'il y en a un,

$$\frac{n'^{s'} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{n'^2-1}{2} \right) \cdot s'\pi}};$$

et pour qu'il y ait un terme moyen, $(n'-1) \cdot s'$ doit être un nombre pair; c'est-à-dire que l'un ou l'autre au moins, des nombres $n'-1$ et s' , doit être pair.

56. L'analyse précédente donne encore le coefficient de $\alpha^{\pm l}$ dans le développement du polynome

$$(\alpha^{-n} + \alpha^{-n+1} \dots + \alpha^{-1} + 1 + \alpha \dots + \alpha^{n-1} + \alpha^n)^s;$$

car en faisant $a = c^{\varpi} \sqrt{-1}$, ce coefficient est égal à

$$\frac{1}{\pi} \cdot f(l\varpi) \cdot (\cos l\varpi \mp \sqrt{-1} \cdot \sin l\varpi) \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$. En effet, si l'on multiplie le polynôme par $a^{\mp l}$ ou $c^{\mp l\varpi} \sqrt{-1}$, le seul terme qui a pour facteur $c^{\pm l\varpi} \sqrt{-1}$, devient indépendant de ϖ , et subsiste dans l'intégrale précédente, où par l'intégration il se trouve multiplié par π . Il est clair que l'intégration fait disparaître la partie imaginaire de l'intégrale précédente; car cette partie donne dans son développement, des sinus de l'angle ϖ et de ses multiples, sinus qui deviennent nuls aux limites de l'intégrale qui se réduit ainsi à

$$\frac{1}{\pi} \cdot f(l\varpi) \cdot \cos l\varpi \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s.$$

Pour intégrer cette fonction, on fera comme ci-dessus,

$$\left(\frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} \right) \cdot \varpi}{\sin \frac{1}{2} \varpi} \right)^s = (2n+1)^i \cdot c^{-l^2}.$$

En prenant les logarithmes et développant par rapport aux puissances de ϖ , on aura par le retour des suites pour ϖ , une expression de cette forme,

$$\varpi = \frac{t \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot s}} \cdot (1 + At^2 + \text{etc.});$$

ce qui transforme l'intégrale précédente, dans celle-ci

$$\frac{(2n+1)^i}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot s}} \cdot fdt \cdot \cos \left\{ \frac{lt \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot s}} \right\} \cdot c^{-l^2} (1 + 5At^2 + \text{etc.}),$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. On peut facilement l'obtenir par le n° 26, et l'on trouve, en n'ayant égard qu'à son premier terme, pour sa valeur,

$$\frac{(2n+1)^i \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot 2s\pi}} \cdot c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n \cdot (n+1) \cdot s}}.$$

C'est la valeur cherchée du coefficient de $a^{\pm l}$ dans le développement du polynome, lorsque sa puissance s est très-élevée.

Cherchons maintenant la somme de tous ces coefficients, depuis celui de a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui de a^l inclusivement, l étant un grand nombre, mais d'un ordre inférieur à s . Pour cela, nous observerons que l'on a par le n° 10,

$$\begin{aligned}\Sigma y_l &= \frac{1}{c \frac{dy_l}{dl} - 1} = \frac{1}{\frac{dy_l}{dl} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dy_l}{dl} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{dy_l}{dl} \right)^2 + \text{etc.} \right\}} \\ &= \left(\frac{dy_l}{dl} \right)^{-1} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy_l}{dl} \right)^{-2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{dy_l}{dl} + \text{etc.}\end{aligned}$$

d'où l'on tire par le numéro cité,

$$\Sigma y_l = \int y_l \cdot dl - \frac{1}{2} \cdot y_l + \frac{1}{12} \cdot \frac{dy_l}{dl} + \text{etc.} + \text{constante.}$$

En prenant l'intégrale depuis le terme correspondant à l nul inclusivement, on aura la somme des valeurs de y_l depuis cette origine jusqu'au terme y_l exclusivement. La constante arbitraire sera égale alors à $\frac{1}{2} \cdot y_0 - \frac{1}{12} \cdot \frac{dy_0}{dl} - \text{etc.}$; ainsi la somme des valeurs de y_l depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement, sera

$$\int y_l \cdot dl + \frac{1}{2} \cdot y_0 + \frac{1}{2} \cdot y_l + \frac{1}{12} \cdot \frac{dy_l}{dl} - \frac{1}{12} \cdot \frac{dy_0}{dl} + \text{etc.}$$

Supposons maintenant

$$y_l = \frac{(2n+1)^l \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{n \cdot (n+1)} \cdot 2s\pi} \cdot c^{-\frac{\frac{3}{2} l^2}{n \cdot (n+1) \cdot s}};$$

alors les différences de y_l seront successivement d'un ordre inférieur les unes aux autres; en ne considérant donc que les trois premiers termes de la série précédente, on aura

$$\int y \cdot dl + \frac{1}{2} \cdot y_0 + \frac{1}{2} \cdot y_l$$

pour la somme des coefficients des termes du développement de la puissance s du polynome, depuis l nul inclusivement jusqu'à l inclusivement. En doublant cette somme, et en retranchant de ce double, le terme y_0 , on aura pour la somme des coefficients, depuis

celui du terme correspondant à a^{-1} inclusivement, jusqu'à celui du terme correspondant à a^1 inclusivement,

$$\frac{(2n+1)'. \sqrt{6}}{\sqrt{n.(n+1).s\pi}} \cdot \left(fdl. e^{-\frac{\frac{3}{2} l^2}{n.(n+1).s}} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\frac{3}{2} l^2}{n.(n+1).s}} \right).$$

37. Nous avons supposé dans les exemples précédens, que les équations aux différences en y , n'avaient point de dernier terme; donnons un exemple d'une équation jouissant d'un dernier terme, et pour cela, considérons l'équation aux différences

$$p' = s.y_i + (s-i).y_{i+1}.$$

En faisant

$$y_i = f x^{i-1} \cdot \phi dx,$$

on aura

$$p' = x^i \cdot \phi \cdot (1+x) - f x^i \cdot [(x+1) \cdot d\phi + (i+1) \cdot \phi dx];$$

ce qui donne d'abord pour déterminer ϕ , l'équation

$$(1+x) \cdot d\phi + (i+1) \cdot \phi dx = 0;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\phi = \frac{A}{(1+x)^{i+1}},$$

A étant une constante arbitraire. Ensuite on a

$$p' = x^i \cdot \phi \cdot (1+x),$$

ou

$$p' = \frac{A \cdot x^i}{(1+x)^{i+1}};$$

d'où l'on tire

$$x = p, \quad A = (1+p)^i;$$

ensorte que

$$y_i = (1+p)^i \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=p$. En ajoutant à cette valeur de y , celle-ci

$$B \cdot (1+p)^i \cdot \int \frac{x^{i-1} dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et B étant une arbitraire; on aura pour l'intégrale complète de la proposée

$$y_i = B \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}} + (1+p)^i \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}},$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$y_i = B' \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}},$$

la première intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et la seconde étant prise depuis $x=p$ jusqu'à x infini.

Maintenant, l'intégrale de la proposée

$$p' = s \cdot y_i + (s-i) \cdot y_{i+1}$$

est

$$y_i = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1)}{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \dots (i-s+1)} \cdot \left(Q - \Sigma \cdot \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \dots (i-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} \cdot p' \right),$$

Q étant une arbitraire, et Σ étant la caractéristique des différences finies; ensorte que la fonction $\Sigma \cdot \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \dots (i-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} \cdot p'$ est égale à

$$1 + ip + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 \dots + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \dots (i-s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1)} \cdot p^{s-1},$$

c'est-à-dire, à la somme des s premiers termes du binome $(1+p)^i$. Si l'on compare cette expression de y_i à la précédente, on aura

$$\begin{aligned} B' \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}} \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1)}{i \cdot (i-1) \dots (i-s+1)} \cdot \left(Q - \Sigma \cdot \frac{i \cdot (i-1) \dots (i-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} \cdot p' \right). \end{aligned}$$

Si l'on fait $s=1$ dans cette équation, et si l'on observe que le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1)$ se réduit alors à l'unité, comme on l'a vu dans le n° 54; on trouve après les intégrations $B'=Q$: ainsi B' étant une arbitraire, cette équation se partage dans les deux suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1)}{i \cdot (i-1) \dots (i-s+1)} &= \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}}, \\ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1)}{i \cdot (i-1) \dots (i-s+1)} \cdot \Sigma \cdot \frac{i \cdot (i-1) \dots (i-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} \cdot p' &= (1+p)^i \cdot \int \frac{x^{i-1} \cdot dx}{(1+x)^{i+1}}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$1 + ip + \frac{i.(i-1)}{1.2} . p^2 \dots + \frac{i.(i-1) \dots (i-s+2)}{1.2.3 \dots (s-1)} . p^{s-1} = (1+p)^i . \frac{\int \frac{x^{i-1} . dx}{(1+x)^{i+1}}}{\int \frac{x^{i-1} . dx}{(1+x)^{i+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = p$ jusqu'à x infini; et celle du dénominateur étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Lorsque s et i sont de grands nombres, il sera facile de réduire ces deux intégrales en séries convergentes, par les formules des nos 22 et 23. On aura ainsi la somme de s premiers termes du binome élevé à une grande puissance, par une approximation d'autant plus rapide, que cette puissance sera plus haute.

Si l'on effectue les intégrations, l'équation précédente devient

$$1 + ip + \frac{i.(i-1)}{1.2} . p^2 \dots + \frac{i.(i-1).(i-2) \dots (i-s+2)}{1.2.3 \dots (s-1)} . p^{s-1} \\ = (1+p)^{i-1} . \left\{ 1 + \frac{(i-s+1)}{1} . \frac{p}{1+p} + \frac{(i-s+1).(i-s+2)}{1.2} . \frac{p^2}{(1+p)^2} \right. \\ \left. \dots + \frac{(i-s+1) \dots (i-1)}{1.2.3 \dots (s-1)} . \frac{p^{s-1}}{(1+p)^{s-1}} \right\}.$$

Le second membre de cette équation est une transformation de la somme partielle des termes du binome $(1+p)^i$, transformation qui peut être utile.

De l'approximation des différences infiniment petites et finies, très-élevées, des fonctions.

58. Considérons une fonction quelconque de z , que nous représenterons par $\phi(z)$. En y changeant z en $z+t$, désignons par γ , le coefficient de t^s dans le développement de cette fonction; nous aurons

$$\frac{d^s \phi(z+t)}{dt^s} = 1.2.3 \dots s . \gamma,$$

t étant supposé nul après les différentiations; et comme on a

$$\frac{d \phi(z+t)}{dt} = \frac{d \phi(z)}{dz}, \text{ en supposant } t \text{ nul; on aura}$$

$$\frac{d^s \phi(z)}{dz^s} = 1.2.3 \dots s . \gamma.$$

Ainsi la recherche de la différence *s^{ième}* de $\varphi(z)$, se réduit à développer la fonction $\varphi(z+t)$ en série.

Supposons que cette fonction de t soit une puissance d'un polynôme de t , que nous représenterons par

$$(a + bt + ct^2 + \text{etc.})^\mu.$$

En exprimant par

$$y_0 + y_1.t + y_2.t^2 + \dots + y_s.t^s + \text{etc.},$$

son développement en série; on aura, en prenant les différences logarithmiques,

$$\frac{\mu.(b + 2ct + \text{etc.})}{a + bt + ct^2 + \text{etc.}} = \frac{y_1 + 2y_2.t + \dots + sy_s.t^{s-1} + \text{etc.}}{y_0 + y_1.t + y_2.t^2 + \dots + y_s.t^s + \text{etc.}}.$$

Multipliant en croix, et comparant les termes multipliés par t^{s-1} , on aura

$$\begin{aligned} a.s.y_s + b.(s-1).y_{s-1} + c.(s-2).y_{s-2} + \text{etc.} \\ = \mu.b.y_{s-1} + 2\mu.c.y_{s-2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Représentons par $\int x^{s-1} \varphi . dx$, l'expression de y_s ; cette équation devient

$$0 = x^s . \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.} \right) . \varphi - \int x^s . \left\{ \begin{aligned} & d\varphi . \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.} \right) \\ & + \mu \varphi dx . \left(\frac{b}{x^2} + \frac{2c}{x^3} + \text{etc.} \right) \end{aligned} \right\}.$$

En égalant séparément à zéro, la partie de cette équation, affectée du signe intégral, on a

$$0 = d\varphi . \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.} \right) + \mu \varphi dx . \left(\frac{b}{x^2} + \frac{2c}{x^3} + \text{etc.} \right);$$

ce qui donne en intégrant,

$$\varphi = A . \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.} \right)^\mu,$$

A étant une constante arbitraire. La partie de l'équation précédente, hors du signe intégral, donnera ensuite pour déterminer les limites de l'intégrale,

$$0 = x^s . \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.} \right)^{\mu+1};$$

ces limites sont donc $x=0$, et x égal aux diverses racines de l'équation

$$0 = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.}$$

On aura donc par les méthodes précédentes, et par une approximation très-prompte, les coefficients des puissances très-élevées de t , dans le développement en série de la puissance

$$(a + bt + ct^2 + \text{etc.})^u,$$

et par conséquent on aura les différentielles très-élevées de la puissance

$$(a' + b'z + c'z^2 + \text{etc.})^u,$$

qui se change dans la précédente, en changeant z dans $z + t$, et faisant

$$a = a' + b'z + c'z^2 + \text{etc.},$$

$$b = b' + 2c'z + \text{etc.},$$

$$c = c' + \text{etc.},$$

etc.

Appliquons cette analyse à un exemple.

z étant le sinus d'un angle θ , on aura

$$\frac{d^{s+1} \theta}{dz^{s+1}} = \frac{d^s}{dz^s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pour avoir l'expression du second membre de cette équation, nous observerons que l'on a, par ce qu'on vient de voir,

$$\frac{d^s}{dz^s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1.2.3 \dots s.y_s,$$

y_s étant le coefficient de t^s dans le développement de $[1 - (z+t)^2]^{-\frac{1}{2}}$.

On aura ensuite

$$y_s = A.f x^{s-1}.dx. \left[1 - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

les limites de l'intégrale étant données par l'équation

$$x'. \left[1 - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ces limites sont

$$x = -\frac{1}{1+z}, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{1-z}.$$

Comme x a trois valeurs, l'expression de y , prend cette forme, par le n° 29,

$$y = A \cdot f x^{s-1} \cdot dx \cdot \left[1 - \left(z + \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + A' \cdot f x^{s-1} \cdot dx \cdot \left[1 - \left(z + \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

A et A' étant des constantes arbitraires, et la première intégrale étant prise depuis $x = -\frac{1}{1+z}$ jusqu'à $x = 0$, et la seconde étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{1-z}$. Si l'on fait

$$x = \frac{z + \cos \varpi}{1 - z^2}.$$

L'expression précédente de y , devient

$$y = B \cdot \int \frac{d\varpi \cdot (z + \cos \varpi)^s}{(1 - z^2)^{s + \frac{1}{2}}} + B' \cdot \int \frac{d\tau \cdot (z + \cos \varpi)^s}{(1 - z^2)^{s + \frac{1}{2}}},$$

la première intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde étant prise depuis ce dernier angle jusqu'à $\varpi = \pi$. Pour déterminer les arbitraires B et B' , on observera que

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad y_1 = \frac{z}{(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où il est facile de conclure

$$B = B' = \frac{1}{\pi};$$

partant

$$y = \frac{1}{\pi \cdot (1 - z^2)^{s + \frac{1}{2}}} \cdot f d\varpi \cdot (z + \cos \varpi)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$. En prenant cette intégrale, et observant que

$$\begin{aligned} f d\varpi \cdot \cos^{2r} \varpi &= \frac{1}{2^{2r}} \cdot f d\varpi \cdot (e^{\varpi} \sqrt{-1} + e^{-\varpi} \sqrt{-1})^{2r} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2r}{2^{2r} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r)^2} \cdot \pi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r} \cdot \pi; \end{aligned}$$

on aura

$$y_s = \frac{1}{(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ z^s + \frac{1}{2} \cdot \frac{s \cdot (s-1)}{1 \cdot 2} \cdot z^{s-2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot z^{s-4} \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3) \cdot (s-4) \cdot (s-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot z^{s-6} + \text{etc.} \right\}; \quad (a)$$

cette expression est fort composée, lorsque s est un grand nombre; mais alors on peut obtenir sa valeur d'une manière fort approchée, en appliquant à l'expression de y_s sous forme d'intégrale définie, les méthodes exposées ci-dessus. La fonction sous le signe intégral ayant deux *maxima*, l'un à l'origine de l'intégrale, et l'autre à son extrémité, nous la décomposerons dans les deux suivantes,

$$y_s = \frac{1}{\pi (1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}} \cdot [f d\varpi \cdot (z + \cos \varpi)^s + (-1)^s \cdot f d\varpi \cdot (\cos \varpi - z)^s];$$

la première intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont z est le cosinus. Soit $\frac{1}{s} = \alpha$, et faisons

$$(z + \cos \varpi)^s = (1 + z)^s \cdot c^{-t^2};$$

on aura en prenant les logarithmes et réduisant $\cos \varpi$ en série,

$$\log \left(1 - \frac{\varpi^2}{2 \cdot (1+z)} + \frac{\varpi^4}{24 \cdot (1+z)} - \text{etc.} \right) = -\alpha t^2;$$

d'où il est facile de conclure

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}} t \cdot \sqrt{2 \cdot (1+z)} \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot (2-z)}{12} \cdot t^2 + \text{etc.} \right);$$

on aura ainsi, en observant que l'intégrale doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini,

$$f d\varpi \cdot (z + \cos \varpi)^s = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot (1+z)^{s+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot (2-z)}{8} + \text{etc.} \right).$$

En changeant z dans $-z$, on aura

$$f d\varpi \cdot (\cos \varpi - z)^s = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot (1-z)^{s+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot (2+z)}{8} + \text{etc.} \right);$$

partant

$$y_s = \frac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2s\pi}} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot (2-z)}{8} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{(-1)^s}{(1+z)^{s+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2s\pi}} \cdot \left(1 - \frac{a \cdot (2+z)}{8} + \text{etc.}\right); \quad (b)$$

dans le cas de s très-grand, cette expression se réduit à fort peu près à ce terme très-simple,

$$\frac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2s\pi}}.$$

Si l'on multiplie l'expression (b) de y_s par le produit $1.2.3\dots s$, produit qui par le n° 33, est égal à

$$s^{s+\frac{1}{2}} \cdot e^{-s} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{a}{12} + \text{etc.}\right);$$

on aura à très-peu près

$$\frac{d^{s+1} \theta}{dz^{s+1}} = \frac{d^s \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{dz^s} = \frac{s^s \cdot e^{-s}}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}}.$$

39. Lorsqu'une fonction y_s de s peut être exprimée par une intégrale définie de la forme $\int x^s \cdot \phi dx$, les différences infiniment petites et finies d'un ordre quelconque n , seront par le n° 21,

$$\frac{d^n y_s}{ds^n} = \int x^s \cdot \phi dx \cdot (\log x)^n,$$

$$\Delta^n y_s = \int x^s \cdot \phi dx \cdot (x-1)^n.$$

Si au lieu d'exprimer la fonction de s , par l'intégrale $\int x^s \cdot \phi dx$, on l'exprime par l'intégrale $\int e^{-sx} \cdot \phi dx$, alors on a

$$\frac{d^n y_s}{ds^n} = (-1)^n \cdot \int x^n \cdot \phi dx \cdot e^{-sx},$$

$$\Delta^n y_s = \int \phi dx \cdot e^{-sx} \cdot (e^{-x} - 1)^n.$$

Pour avoir les intégrales $n^{\text{ièmes}}$, soit finies, soit infiniment petites, il suffira de faire n négatif dans ces expressions. On peut observer qu'elles sont généralement vraies, quel que soit n , en le supposant

même fractionnaire ; ce qui donne le moyen d'avoir les différences et les intégrales correspondantes à des indices fractionnaires. Toute la difficulté se réduit à mettre sous la forme d'intégrales définies, une fonction de s ; ce que l'on peut faire par les nos 29 et 30, lorsque cette fonction est donnée par une équation linéaire aux différences infiniment petites ou finies. Comme on est principalement conduit dans l'analyse des hasards, à des expressions qui ne sont que les différences finies des fonctions, ou une partie de ces différences ; nous allons y appliquer les méthodes précédentes, et déterminer leurs valeurs en séries convergentes.

40. Considérons d'abord la fonction $\frac{1}{s}$. En la désignant par y , elle sera déterminée par l'équation aux différences infiniment petites

$$0 = s \cdot \frac{dy}{ds} + i \cdot y,$$

Si l'on suppose dans cette équation,

$$y = \int e^{-ix} \cdot \phi dx, \quad e^{-ix} = \delta y,$$

elle deviendra

$$0 = \int \phi dx \cdot \left(i \cdot \delta y + x \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right);$$

d'où l'on tire en intégrant par parties, conformément à la méthode du n° 29, les deux équations

$$0 = i\phi - \frac{d \cdot (x\phi)}{dx},$$

$$0 = x\phi \cdot \delta y.$$

La première donne en l'intégrant,

$$\phi = A \cdot x^{i-1},$$

A étant une arbitraire. La seconde équation donne pour les limites de l'intégrale $\int e^{-ix} \cdot \phi dx$, $x = 0$ et $x = \infty$. On aura donc dans ces limites,

$$\frac{1}{s} = A \cdot \int x^{i-1} dx \cdot e^{-ix}.$$

Pour déterminer la constante A , nous observerons que s étant 1, le premier membre de cette équation se réduit à l'unité; ce qui donne

$$A = \frac{1}{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x}};$$

partant

$$\frac{1}{s^i} = \frac{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-sx}}{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x}};$$

on aura donc par le numéro précédent

$$\Delta^n \cdot \frac{1}{s^i} = \frac{\int x^{i-1} \cdot dx \cdot c^{-sx} \cdot (c^{-x} - 1)^n}{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x}}, \quad (\mu)$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Pour développer cette expression en série, supposons

$$x^{i-1} \cdot c^{-sx} \cdot (c^{-x} - 1)^n = \alpha^{i-1} \cdot c^{-sx} \cdot (c^{-a} - 1)^n \cdot c^{-t^2},$$

α étant la valeur de x qui répond au *maximum* du premier membre de cette équation. Si l'on fait $x = a + \theta$, on aura, en prenant les logarithmes de chaque membre, et en développant le logarithme du premier, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de θ ,

$$h \cdot \theta^2 + h' \cdot \theta^3 + h'' \cdot \theta^4 + \text{etc.} = t^2;$$

les quantités α , h , h' , h'' , etc. étant données par les équations suivantes :

$$0 = \frac{i-1}{a} - s - \frac{n \cdot c^{-a}}{c^{-a}-1},$$

$$h = \frac{i-1}{2a^2} - \frac{n}{2} \cdot \frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} \right)^2,$$

$$h' = -\frac{i-1}{3a^3} + \frac{n}{6} \cdot \frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} \right)^2 + \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} \right)^3,$$

$$h'' = \frac{i-1}{4a^4} - \frac{n}{24} \cdot \frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} + \frac{7n}{24} \cdot \left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} \right)^2 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} \right)^3 + \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1} \right)^4,$$

etc.;

on aura donc par le retour des suites,

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{h}} \cdot \left(1 - \frac{h't}{2h \cdot \sqrt{h}} + \frac{(5h' - 4hh'')}{8h^3} \cdot t^2 + \text{etc.} \right);$$

et cette suite sera d'autant plus convergente, que le nombre n sera plus considérable. En substituant cette valeur de θ dans la fonction $f(\theta) \cdot c^{-t}$, et prenant l'intégrale dans les limites $t = -\infty$ et $t = \infty$, limites qui correspondent aux limites $x = 0$ et $x = \infty$, on aura

$$\begin{aligned} & \int x^{i-1} dx \cdot c^{-ix} \cdot (c^{-x} - 1)^n \\ &= a'^{-1} \cdot c^{-ia} \cdot (c^{-a} - 1)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} \cdot \left(1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x} = \frac{1}{i} \int x^i dx \cdot c^{-x};$$

et lorsque i est très-grand, on a par le n° 32,

$$\int x^i dx \cdot c^{-x} = i^{i+\frac{1}{2}} \cdot c^{-i} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{12i} + \text{etc.} \right);$$

en divisant donc l'une par l'autre, les deux valeurs de

$$\int x^{i-1} dx \cdot c^{-ix} \cdot (c^{-x} - 1)^n \quad \text{et} \quad \int x^{i-1} dx \cdot c^{-x};$$

on aura

$$\Delta^n \cdot \frac{1}{s^i} = \frac{\left(\frac{a}{i} \right)^{i-1} \cdot c^{i-ia} \cdot (c^{-a} - 1)^n}{\sqrt{2hi}} \cdot \left\{ 1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} + \text{etc.} \right\}.$$

Pour avoir la différence finie n^{ieme} de la puissance positive s^i ; il suffit, par le n° 30, de changer dans cette équation i dans $-i$, et l'on aura

$$\begin{aligned} \Delta^n \cdot s^i &= (s+n)^i - n \cdot (s+n-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (s+n-2)^i - \text{etc.} \\ &= \frac{\left(\frac{i}{a} \right)^{i+1} \cdot c^{ia-1} \cdot (c^a - 1)^n}{\sqrt{\frac{i \cdot (i+1)}{a^2} - ni \cdot \frac{c^a}{(c^a - 1)^2}}} \cdot \left(1 + \frac{15l'^2 - 12ll''}{16l^3} + \frac{1}{12i} + \text{etc.} \right); (\mu') \end{aligned}$$

$a, l, l', l'', \text{etc.}$ étant données par les équations

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n \cdot c^a}{c^a - 1},$$

$$l = -\frac{i+1}{2a^2} - \frac{n}{2} \cdot \frac{c^a}{c^a - 1} + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^2,$$

$$l' = -\frac{i+1}{3a^3} + \frac{n}{6} \cdot \frac{c^a}{c^a - 1} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^2 + \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^3,$$

$$l'' = -\frac{i+1}{4a^4} - \frac{n}{24} \cdot \frac{c^a}{c^a - 1} + \frac{7n}{24} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^2 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^3 + \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{c^a}{c^a - 1}\right)^4,$$

etc.

La série (μ') cesse d'être convergente, lorsque a est une très-petite fraction de l'ordre $\frac{1}{n}$; car il est visible que les quantités $l, l', l'',$ etc., formant alors une progression croissante, chaque terme de la série est du même ordre que celui qui le précède. Pour déterminer dans quel cas a est très-petit, reprenons l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n \cdot c^a}{c^a - 1}.$$

On peut la transformer dans la suivante, lorsque a est très-petit,

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n}{a} \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \text{etc.}\right);$$

d'où l'on tire à très-peu près, dans la supposition de a très-petit,

$$a = \frac{i+1-n}{s + \frac{n}{2}};$$

ainsi a sera fort petit toutes les fois que $i-n$ sera peu considérable relativement à $s + \frac{n}{2}$. Dans ce cas, on déterminera $\Delta^n \cdot s^i$ par la méthode suivante.

Reprenons l'équation

$$\Delta^n \cdot s^i = \frac{\int \frac{dx}{x^{i+1}} \cdot c^{-sx} \cdot (c^{-x} - 1)^n}{\int \frac{dx}{x^{i+1}} \cdot c^{-x}},$$

dans laquelle se change la formul (μ) , lorsqu'on y fait i négatif et

et égal à $-i$. On peut mettre la fonction $(c^{-x} - 1)^n$ sous cette forme

$$\begin{aligned} & c^{-\frac{nx}{2}} \cdot \left(c^{-\frac{x}{2}} - c^{\frac{x}{2}} \right)^n \\ &= (-1)^n \cdot c^{-\frac{nx}{2}} \cdot x^n \cdot \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^2}{2^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{x^4}{2^4} + \text{etc.} \right)^n \\ &= (-1)^n \cdot c^{-\frac{nx}{2}} \cdot x^n \cdot \left(1 + \frac{n \cdot x^2}{24} + \frac{n \cdot (5n-2)}{15 \cdot 16 \cdot 24} \cdot x^4 + \text{etc.} \right); \end{aligned}$$

on aura donc

$$\int \frac{dx}{x^{i+1}} \cdot c^{-ix} \cdot (c^{-x} - 1)^n = (-1)^n \cdot \int \frac{dx}{x^{i+1-n}} \cdot c^{-\left(s + \frac{n}{2}\right)x} \cdot \left(1 + \frac{n \cdot x^2}{24} + \text{etc.} \right).$$

Si l'on fait

$$\left(s + \frac{n}{2} \right) \cdot x = x',$$

on aura généralement

$$\int \frac{dx}{x'} \cdot c^{-\left(s + \frac{n}{2}\right)x} = \left(s + \frac{n}{2} \right)^{r-1} \cdot \int \frac{dx' \cdot c^{-x'}}{x'^r};$$

or on a trouvé dans le n° 53, par le passage du réel à l'imaginaire,

$$\int \frac{dx' \cdot c^{-x'}}{x'^r} = \frac{2\pi \cdot (-1)^{r-\frac{1}{2}}}{\int x'^{r-1} dx' \cdot c^{-x'}} = \frac{2\pi \cdot (-1)^{r-\frac{1}{2}}}{(r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3) \cdot \text{etc.}};$$

partant on aura

$$\begin{aligned} \Delta^n \cdot s^i &= (i-n+1) \cdot (i-n+2) \dots i \cdot \left(s + \frac{n}{2} \right)^{i-n} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} & 1 + (i-n) \cdot (i-n-1) \cdot \frac{n}{24 \cdot \left(s + \frac{n}{2} \right)^2} \\ & + (i-n) \cdot (i-n-1) \cdot (i-n-2) \cdot (i-n-3) \cdot \frac{n \cdot (5n-2)}{15 \cdot 16 \cdot 24 \cdot \left(s + \frac{n}{2} \right)^4} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\}. \quad (\mu') \end{aligned}$$

Cette série sera très-convergente, si $i-n$ est peu considérable relativement à $s + \frac{n}{2}$; elle peut d'ailleurs être employée dans le cas où i est fractionnaire, comme il est facile de s'en convaincre. Quant au produit $(i-n+1) \cdot (i-n+2) \dots i$, il est facile de l'obtenir en série convergente, par le n° 52.

La formule précédente est une application très-simple de l'équation

$$\Delta^n . y_i = \left(c^{\frac{dy}{ds} + \frac{n}{2}} - c^{-\frac{dy}{ds} + \frac{n}{2}} \right)^n$$

que nous avons donnée dans le n° 10 ; car en développant le second membre de cette équation, et faisant $y_i = s^i$, on obtient directement cette formule que nous avons conclue des passages du réel à l'imaginaire ; ce qui confirme la justesse de ces passages.

41. Les formules (μ') et (μ'') des numéros précédens, supposent n égal ou moindre que i . En effet, si l'on considère l'expression

$$\Delta^n . s^i = \frac{\int \frac{dx \cdot c^{-ix}}{x^{i+1}} \cdot (c^{-x} - 1)^n}{\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^{i+1}}},$$

dont le développement a produit ces formules ; on voit que les limites des intégrales du numérateur et du dénominateur étant déterminées par le numéro précédent, en égalant à zéro le produit des quantités sous le signe intégral, par x ; ces limites seront toutes imaginaires, lorsque i sera plus grand que n ; au lieu que dans le cas où i sera moindre que n , les limites de l'intégrale du numérateur seront réelles, tandis que celles du dénominateur seront imaginaires ; il faut donc alors ramener ces dernières limites à l'état réel. Pour y parvenir, nous observerons que l'on a généralement

$$\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x} = \frac{\int x^{i+r-1} dx \cdot c^{-x}}{i \cdot (i+1) \cdot (i+2) \cdot \dots \cdot (i+r)}.$$

Si l'on fait dans cette expression, i négatif et égal à $-r - \frac{m}{n}$; m étant moindre que n ; on aura

$$\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1} \cdot \int x^{-\frac{m}{n}} dx \cdot c^{-x}}{\frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \cdot \dots \cdot i} ;$$

or on a par le n° 32, les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à

x infini,

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i = \frac{\int x^i dx \cdot c^{-x}}{\frac{m}{\int x^n dx \cdot c^{-x}}},$$

i étant ici positif : c'est l'expression de $\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^{i+1}}$ dont on doit faire usage dans le cas que nous examinons ici. Si l'on fait $x = t^n$, on aura

$$\frac{n}{m} \cdot \int x^{-\frac{m}{n}} dx \cdot c^{-x} \cdot \int x^{\frac{m}{n}} dx \cdot c^{-x} = n^2 \int t^{n-m-1} dt \cdot c^{-t^n} \cdot \int t^{m-1} dt \cdot c^{-t^n};$$

et l'équation (T) du n° 24 donne, en y changeant r dans $m+1$,

$$n^2 \cdot \int t^{n-m-1} dt \cdot c^{-t^n} \cdot \int t^{m-1} dt \cdot c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin \frac{m}{n} \cdot \pi};$$

on aura donc

$$\int \frac{dx \cdot c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1} \cdot \pi}{\sin \frac{m}{n} \cdot \pi \cdot \int x^i dx \cdot c^{-x}};$$

d'où l'on tire, en substituant cette valeur dans l'expression précédente de $\Delta^n \cdot s^i$,

$$\Delta^n \cdot s^i = \frac{(-1)^{r+1} \cdot \sin \frac{m\pi}{n}}{\pi} \cdot \int x^i dx \cdot c^{-x} \cdot \int \frac{dx}{x^{i+1}} \cdot c^{-x} \cdot (c^{-x} - 1)^n; \quad (\mu''')$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Le procédé qui vient de nous conduire à cette équation, est fondé sur les passages réciproques du réel à l'imaginaire; mais on peut y parvenir directement par l'analyse suivante qui confirmera ainsi la justesse de ces passages.

Si l'on prend l'intégrale $\int \frac{dx \cdot c^{-ix}}{x^{i+1}}$ depuis $x = \alpha$ jusqu'à x infini; on aura, en faisant $i = r + \frac{m}{n}$, la fonction

$$\frac{(-1)^r \cdot c^{-s\alpha}}{\frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i \cdot \alpha^{\frac{m}{n}}} \cdot \left\{ s^r - \frac{m}{n} \cdot \frac{s^{r-1}}{\alpha} + \frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{s^{r-2}}{\alpha^2} - \text{etc.} \right\} \\ \dots + (-1)^r \cdot \frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i \cdot \frac{1}{\alpha^r} \left\{ \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{r+1} \cdot s^{r+1}}{\frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i} \cdot \int \frac{dx \cdot c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}} \right\};$$

or on a généralement, lorsque α est infiniment petit,

$$\frac{\Delta \cdot c^{-s\alpha} \cdot s^{r-f}}{\alpha^f} = 0,$$

f étant zéro ou un nombre entier positif; car si l'on développe $c^{-s\alpha}$ en série, et que l'on désigne par $k \cdot \alpha^q \cdot s^q$ un terme quelconque de cette série, on aura

$$k \cdot \alpha^{q-f} \cdot \Delta^n \cdot s^{q+r-f} = 0.$$

En effet, si q surpasse f , ce terme devient nul par la supposition de α infiniment petit. Si q est égal ou moindre que f , $q + r - f$ sera égal ou moindre que r , et par conséquent, il sera plus petit que n ; et alors, par la propriété connue des différences finies, $\Delta^n \cdot s^{q+r-f}$ sera nul. Il suit de là que $\Delta^n \cdot \int \frac{dx \cdot c^{-sx}}{x^{i+1}}$, ou $\int \frac{dx \cdot c^{-sx} \cdot (c^{-x} - 1)^n}{x^{i+1}}$ se réduit à

$$\frac{(-1)^{r+1} \cdot \Delta^n \cdot s^{r+1} \cdot \int \frac{dx \cdot c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}}}{\frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Si l'on fait $x = \frac{x'}{s}$, on aura

$$\int \frac{dx \cdot c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}} = s^{\frac{m}{n} - 1} \cdot \int \frac{dx' \cdot c^{-sx'}}{x'^{\frac{m}{n}}};$$

les intégrales étant prises depuis x et x' nuls jusqu'à x et x' infinis;

on aura donc

$$\int \frac{dx \cdot c^{-ix} \cdot (c^{-x} - 1)^n}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{i+1} \cdot \int \frac{dx' \cdot c^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}} \cdot \Delta^n \cdot s^i}{\frac{m}{n} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i}.$$

En substituant pour $\left(1 + \frac{m}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n}\right) \dots i$, sa valeur $\frac{f x^i dx \cdot c^{-x}}{f x^{\frac{m}{n}} dx \cdot c^{-x}}$;

et observant que l'on a par ce qui précède,

$$\frac{n}{m} f x'^{-\frac{m}{n}} dx' \cdot c^{-x'} \cdot f x^{\frac{m}{n}} dx \cdot c^{-x} = \frac{\pi}{\sin \frac{m}{n} \cdot \pi},$$

on aura la formule (μ''').

Si i est un très-grand nombre, on aura par le n° 32, l'intégrale $f x^i dx \cdot c^{-x}$; on aura ensuite par ce qui précède, l'intégrale $\int \frac{dx \cdot c^{-ix} \cdot (c^{-x} - 1)^n}{x^{i+1}}$; ainsi l'on obtiendra, par une série très-convergente, la valeur du second membre de la formule citée.

Supposons i infiniment petit, r sera nul, et $\frac{m}{n}$ sera une fraction infiniment petite, on aura donc

$$\sin \frac{m}{n} \cdot \pi = \frac{m}{n} \cdot \pi = i\pi,$$

$$\Delta^n \cdot \left(\frac{s^i - 1}{i}\right) = \Delta^n \cdot \log s;$$

la formule (μ''') donnera ainsi

$$\Delta^n \cdot \log s = - \int \frac{c^{-ix} dx}{x} \cdot (c^{-x} - 1)^n,$$

expression que l'on réduira facilement en série convergente, lorsque n est un grand nombre.

42. On a souvent besoin, dans l'analyse des hasards, de ne considérer dans l'expression de $\Delta^n \cdot s^i$, que la partie dans laquelle les quantités élevées à la puissance i sont positives. Nous allons déterminer la somme de tous ces termes. Pour cela, reprenons

la formule (μ''') du numéro précédent. Si l'on y substitue au lieu de $\Delta^n \cdot s^i$, sa valeur

$$(s+n)^i - n \cdot (s+n-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (s+n-2)^i - \text{etc.};$$

et si l'on y change ensuite s dans $-s$; on aura, en ne continuant les deux séries du premier membre de l'équation suivante, que jusqu'aux termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i , devient négative, et observant que le signe $+$ a lieu, si n est pair, et le signe $-$, si n est impair,

$$\begin{aligned} & (1)^i \cdot \left[(n-s)^i - n \cdot (n-s-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n-s-2)^i - \text{etc.} \right] \\ & \pm (-1)^i \cdot \left[s^i - n \cdot (s-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (s-2)^i - \text{etc.} \right] \\ & = \frac{(-1)^{r+1}}{\pi} \cdot \sin \frac{m\pi}{n} \cdot f x^i dx \cdot c^{-x} \cdot \int \frac{dx}{x^{i+1}} \cdot c^{x'} \cdot (c^{-x} - 1)^n. \end{aligned}$$

Si l'on change dans la dernière intégrale, x en $-2x' \cdot \sqrt{-1}$, elle devient, après toutes les réductions,

$$2^{n-i} \cdot (-1)^{\frac{n+i}{2}} \cdot f x'^{n-i-1} \cdot dx' \cdot [\cos(2s-n) \cdot x' - \sqrt{-1} \cdot \sin(2s-n) \cdot x'] \cdot \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n;$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis x' nul jusqu'à x' infini. On aura donc

$$\begin{aligned} & (1)^i \cdot \left[(n-s)^i - n \cdot (n-s-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n-s-2)^i - \text{etc.} \right] \\ & \pm (-1)^i \cdot \left[s^i - n \cdot (s-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (s-2)^i - \text{etc.} \right] \quad (o) \\ & = \frac{(-1)^{r+1}}{\pi} \cdot 2^{n-i} \cdot (-1)^{\frac{n+i}{2}} \cdot \sin \frac{m\pi}{n} \cdot f x^i dx \cdot c^{-x} \cdot f x'^{n-i-1} \cdot dx' \\ & \times [\cos(2s-n) \cdot x' - \sqrt{-1} \cdot \sin(2s-n) \cdot x'] \cdot \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n. \end{aligned}$$

Supposons $r = n-1$, ce qui donne $i = n-1 + \frac{m}{n}$, et comparons séparément les parties réelles et les parties imaginaires de l'équation précédente. On a

$$(1)^i = (1)^{n-1} \cdot (1)^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{m}{n}};$$

or on a

$$1 = \cos 2l\pi + \sqrt{-1} \cdot \sin 2l\pi,$$

l étant un nombre entier ; on aura donc

$$(1)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{2lm\pi}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2lm\pi}{n}.$$

Les valeurs correspondantes de $(-1)^{\frac{m}{n}}$ sont

$$\cos (2l+1) \cdot \frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin (2l+1) \cdot \frac{m\pi}{n}.$$

Maintenant $(1)^i$ devant être supposé égal à l'unité, dans l'équation (o), il faut choisir l de manière que $\cos \frac{2lm\pi}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2lm\pi}{n}$ soit 1, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{2lm\pi}{n} = 2f\pi,$$

f étant un nombre entier que nous pouvons supposer nul ; alors on a

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{m\pi}{n};$$

mais on a

$$\pm (-1)^i = \pm (-1)^{n-1+\frac{m}{n}} = -(-1)^{\frac{m}{n}};$$

la partie imaginaire du premier membre de l'équation (o) est donc

$$-\sqrt{-1} \cdot \sin \frac{m\pi}{n} \cdot \left[s^i - n \cdot (s-1)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (s-2)^i - \text{etc.} \right].$$

Déterminons la partie imaginaire du second membre de l'équation (o). On a

$$(-1)^{r+n-1} = (-1)^{2n-2} = 1;$$

on a ensuite

$$(-1)^{\frac{n+i}{2}+r+1} = -\sqrt{-1} \cdot (-1)^{\frac{m}{2n}}$$

à cause de $r = n-1$ et de $i = n-1 + \frac{m}{n}$; or on a par ce qui

précède ,

$$(-1)^{\frac{m}{2n}} = \cos \frac{m\pi}{2n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{m\pi}{2n} ;$$

on aura donc , pour la partie imaginaire du second membre de l'équation (o) ,

$$-2^{n-i} \cdot \sqrt{-1} \cdot \frac{\sin \frac{m\pi}{n}}{\pi} \cdot f dx' \cdot x'^{-\frac{m}{n}} \cdot \cos \left[(2s-n) \cdot x' - \frac{m\pi}{2n} \right] \cdot \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n \cdot f x^i dx \cdot c^{-x}.$$

Si l'on égale cette fonction à la partie imaginaire du premier membre de cette équation ; si l'on observe de plus que

$$\begin{aligned} f x^i dx \cdot c^{-x} &= \left(1 + \frac{m}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n} \right) \dots i \cdot f x^{\frac{m}{n}} \cdot dx \cdot c^{-x} \\ &= \left(1 + \frac{m}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n} \right) \dots i \cdot n k , \end{aligned}$$

en faisant $k = \int t^{n+m-1} dt \cdot c^{-t^n}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini ; enfin , si l'on suppose $2s - n = z$; on aura

$$\begin{aligned} &\frac{(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n \cdot (n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} - \text{etc.}}{\left(1 + \frac{m}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{m}{n} \right) \dots \left(n-1 + \frac{m}{n} \right)} \\ &= \frac{n k \cdot 2^n}{\pi} \cdot f x'^{-\frac{m}{n}} \cdot dx' \cdot \cos \left(z x' - \frac{m}{2n} \right) \cdot \left(\frac{\sin x'}{x'} \right)^n . \quad (p) \end{aligned}$$

Dans le premier membre de cette formule , la série doit être continuée jusqu'à ce que l'on arrive à une quantité négative élevée à la puissance $n - 1 + \frac{m}{n}$, z ne surpassant point n ; dans le second membre , l'intégrale doit être prise depuis x' nul jusqu'à x' infini.

La comparaison des parties réelles des deux membres de l'équation (o) conduit au même résultat ; et d'ailleurs , elle prouve que pour la coïncidence des deux résultats tirés de la comparaison des quantités réelles entre elles et des quantités imaginaires entre elles , il est nécessaire de supposer , comme nous l'avons fait , $f = 0$.

On

On peut encore parvenir à la formule (p), au moyen de l'équation suivante,

$$i. [\varphi(z+2, n) - \varphi(z, n)] = (n+z+2). \varphi'(z+2, n) + (n-z). \varphi'(z, n),$$

$\varphi'(z, n)$ étant le coefficient de dz dans la différentielle de $\varphi(z, n)$, et $\varphi(z, n)$ étant égal à

$$(n+z)^i - n.(n+z-2)^i + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+z-4)^i - \text{etc.};$$

tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i est négative, devant être rejetés, et z ne surpassant point n , ensorte que la quantité élevée à la puissance i , ne dépasse jamais $2n$. En résolvant cette équation aux différences infiniment petites et finies, par la méthode du n° 30, et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on parvient à la formule (p).

Nous allons maintenant donner quelques applications de cette formule, qui vont nous conduire à plusieurs théorèmes curieux d'analyse.

Supposons m nul, alors on a

$$k = \int t^{n+m-1} dt . c^{-t^n} = \frac{1}{n};$$

la formule (p) devient ainsi

$$\frac{(n+z)^{n-1} - n.(n+z-2)^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n+z-4)^{n-1} - \text{etc.}}{1.2.3....(n-1).2^n} \\ = \frac{\int dx' . \cos zx' . \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi},$$

on a

$$\log \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n = n . \log \left(1 - \frac{1}{6} x'^2 + \frac{1}{120} x'^4 - \text{etc.}\right);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n = c^{-\frac{n}{6} x'^2} . \left(1 - \frac{nx'^4}{180} + \text{etc.}\right);$$

on aura donc, par le n° 26, en faisant $z = \pi\sqrt{n}$,

$$\frac{\int dx' \cdot \cos zx' \cdot \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi} = \sqrt{\frac{3}{2n\pi}} \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} \cdot \left[1 - \frac{3}{20 \cdot n} \cdot (1 - 6r^2 + 3r^4) + \text{etc.}\right]$$

$$= \frac{(n+r\sqrt{n})^{n-1} - n \cdot (n+r\sqrt{n-2})^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+r\sqrt{n-4})^{n-1} - \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot 2^n}; \quad (q)$$

la série de ce dernier membre devant être arrêtée aux puissances des quantités négatives.

En différenciant cette équation par rapport à r , on aura, avec la condition de l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$\frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n - 2 \cdot 2^n} \cdot \left[(n+r\sqrt{n})^{n-2} - n \cdot (n+r\sqrt{n-2})^{n-2} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+r\sqrt{n-4})^{n-2} - \text{etc.} \right]$$

$$= -3r \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} \cdot \left[1 - \frac{3}{20 \cdot n} \cdot (5 - 10r^2 + 3r^4) + \text{etc.} \right]$$

En continuant de différencier ainsi, on aura les valeurs des différences inférieures, pourvu cependant que le nombre de ces différenciations soit fort petit relativement au nombre n . On peut observer que ces équations subsistent, en y faisant r négatif; car $\cos zx'$ ou $\cos x'r\sqrt{n}$ est le même dans les deux cas de r positif et de r négatif.

On peut, en intégrant successivement l'équation (q), obtenir des théorèmes analogues sur les différences finies des puissances supérieures à n , en excluant toujours les puissances des quantités négatives. Ainsi l'on a, par une première intégration,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n - n \cdot (n+r\sqrt{n-2})^n + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+r\sqrt{n-4})^n - \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot 2^n}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} \cdot \left[1 - \frac{3}{20 \cdot n} \cdot (1 - 6r^2 + 3r^4) \right] + \text{etc.}$$

$$= C + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \left[\int dr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20 \cdot n} \cdot r \cdot (1 - r^2) \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} + \text{etc.} \right].$$

On déterminera la constante arbitraire C , en faisant commencer avec r , l'intégrale $\int dr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2}$, et en observant qu'alors r étant nul,

le dernier membre de l'équation se réduit à cette constante: Dans ce cas, le premier devient

$$n^n - n.(n-2)^n + \frac{n.(n-1)}{1.2} . (n-4)^n - \text{etc.}$$

Mais on a, comme on sait, sans l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n.(n-2)^n + \text{etc.} \mp n.(2-n)^n \mp (-n)^n = 1.2.3 \dots n.2^n,$$

le signe supérieur ayant lieu si n est pair, et le signe inférieur si n est impair. Dans les deux cas, on voit que la somme des termes dans lesquels les quantités élevées à la puissance n sont négatives, est égale à la somme des autres termes; on a donc, avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n.(n-2)^n + \frac{n.(n-1)}{1.2} . (n-4)^n - \text{etc.} = 1.2.3 \dots n.2^{n-1};$$

ce qui donne $C = \frac{1}{2}$; par conséquent,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n - n.(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n.(n-1)}{1.2} . (n+r\sqrt{n}-4)^n - \text{etc.}}{1.2.3 \dots n.2^n} \\ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \left[\int dr . c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20.n} . r.(1-r^2) . c^{-\frac{3}{2}r^2} + \text{etc.} \right].$$

En intégrant de nouveau cette expression, et déterminant convenablement la constante arbitraire, on trouve

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^{n+1} - n.(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} . (n+r\sqrt{n}-4)^{n+1} - \text{etc.}}{1.2.3 \dots (n+1).2^n . \sqrt{n}} \\ = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \left[r \int dr . c^{-\frac{3}{2}r^2} + c^{-\frac{3}{2}r^2} . \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{60.n} . (1-3r^2) \right\} \right] \\ + \frac{1}{2} r.$$

43. On peut étendre les méthodes précédentes à la détermination de la différence $n^{\text{ième}}$ d'une puissance quelconque d'une fonction rationnelle de s . Il suffit pour cela de réduire par la méthode du n° 29, cette fonction à la forme $\int x^s . \phi dx$. Mais on a vu qu'alors

on parvient pour déterminer ϕ , à une équation différentielle d'un degré égal au plus haut exposant de s dans cette fonction, et qui le plus souvent n'est pas intégrable. On peut obvier à cet inconvénient, au moyen de multiples intégrales, de la manière suivante.

Considérons généralement la fonction

$$\frac{1}{(s+p)^i \cdot (s+p')^{i'} \cdot (s+p'')^{i''} \cdot \text{etc.}}$$

Si dans l'intégrale $\int x^{i-1} dx \cdot c^{-(s+p) \cdot x}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini, on change $(s+p) \cdot x$ en x' , elle devient $\frac{1}{(s+p)^i} \cdot \int x'^{i-1} dx' \cdot c^{-x'}$, la nouvelle intégrale étant prise dans les limites qui la précèdent. La comparaison des deux intégrales donnera

$$\frac{1}{(s+p)^i} = \frac{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-(s+p)x}}{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x}};$$

Il suit de là que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(s+p)^i \cdot (s+p')^{i'} \cdot (s+p'')^{i''} \cdot \text{etc.}} \\ = & \frac{\int x^{i-1} \cdot x'^{i'-1} \cdot x''^{i''-1} \cdot \text{etc.} \cdot dx \cdot dx' \cdot dx'' \cdot \text{etc.} \cdot c^{-px - p'x' - p''x'' - \text{etc.} - i(x+x'+x''+\text{etc.})}}{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x} \cdot \int x'^{i'-1} dx' \cdot c^{-x'} \cdot \int x''^{i''-1} dx'' \cdot c^{-x''} \cdot \text{etc.}}, \end{aligned}$$

toutes les intégrales étant prises depuis $x, x', x'', \text{etc.}$ nuls jusqu'à leurs valeurs infinies; on aura donc

$$\begin{aligned} & \Delta^n \cdot \frac{1}{(s+p)^i \cdot (s+p')^{i'} \cdot \text{etc.}} \\ = & \frac{\int x^{i-1} \cdot x'^{i'-1} \cdot \text{etc.} \cdot dx \cdot dx' \cdot \text{etc.} \cdot c^{-px - p'x' - \text{etc.} - i(x+x'+\text{etc.})} \cdot (c^{-x-x'-\text{etc.}} - 1)^n}{\int x^{i-1} dx \cdot c^{-x} \cdot \int x'^{i'-1} dx' \cdot c^{-x'} \cdot \text{etc.}}; \end{aligned}$$

On réduira facilement en séries convergentes, par la méthode du n° 40, le numérateur et le dénominateur de cette expression; et si l'on change dans ces séries, les signes de $i, i', \text{etc.}$; on aura la valeur très-approchée de

$$\Delta^n \cdot (s+p)^i \cdot (s+p')^{i'} \cdot \text{etc.},$$

$n, i, i', \text{etc.}$ étant supposés de très-grands nombres. On trouvera par le numéro cité,

$$\Delta^n \cdot (s+p)^i \cdot (s+p')^{i'} \cdot \text{etc.}$$

$$= \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} \cdot \left(\frac{i'}{a'}\right)^{i'+1} \cdot \text{etc.} \cdot c^{(s+p) \cdot a + (s+p') \cdot a' + \text{etc.} - i - i' - \text{etc.}} \cdot (c^{a+a'+\text{etc.}} - 1)^n}{\sqrt{\left(\frac{i \cdot (i+1)}{a^2} - \frac{ni \cdot c^{a+a'+\text{etc.}}}{(c^{a+a'+\text{etc.}} - 1)^2}\right) \cdot \left(\frac{i' \cdot (i'+1)}{a'^2} - \frac{ni' \cdot c^{a+a'+\text{etc.}}}{(c^{a+a'+\text{etc.}} - 1)^2}\right) \cdot \text{etc.}}}$$

$a, a', \text{etc.}$ étant déterminés par les équations

$$0 = \frac{i+1}{a} + s - p - \frac{n \cdot c^{a+a'+\text{etc.}}}{c^{a+a'+\text{etc.}} - 1},$$

$$\frac{i'+1}{a'} = \frac{i+1}{a} + p' - p,$$

$$\frac{i''+1}{a''} = \frac{i+1}{a} + p'' - p,$$

etc.

Le cas le plus ordinaire est celui dans lequel les exposans $i, i', i'', \text{etc.}$ sont égaux, et $s+p, s+p', \text{etc.}$ forment une progression arithmétique. On peut obtenir alors, par la méthode suivante, la différence finie de leur produit élevé à une haute puissance.

Considérons la différence $\Delta^n \cdot (s \cdot s - 1)^i$. Si l'on fait $s = s' + \frac{1}{2}$, elle devient

$$\Delta^n \cdot s'^{2i} \cdot \left(1 - \frac{1}{4s'^2}\right)^i.$$

En développant cette fonction en série, on a

$$\Delta^n \cdot s'^{2i} - \frac{i}{4} \cdot \Delta^n \cdot s'^{2i-2} + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 4^2} \cdot \Delta^n \cdot s'^{2i-4} - \text{etc.}$$

Les formules du n° 40 donneront la valeur approchée de chacun des termes de cette série, et l'on voit, par ces formules, que n et i étant de très-grands nombres, $\Delta^n \cdot s'^{2i-2}$ est d'un ordre moindre de deux unités, que $\Delta^n \cdot s'^{2i}$; d'où il suit que chaque terme de la série précédente est d'un ordre inférieur d'une unité, à celui qui le précède; ce qui montre la convergence de la série.

On arriverait au même résultat en résolvant par approximation, l'équation différentielle du second ordre en ϕ , à laquelle conduit la méthode du n° 29. Lorsqu'on suppose

$$\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = f c^{-i'x} \cdot \phi dx;$$

on a

$$2is \cdot f c^{-s'x} \cdot \phi dx = \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot f c^{-s'x} \cdot x \phi dx.$$

En faisant disparaître s' des coefficients de cette équation, par la méthode citée, dans les termes affectés du signe intégral; égalant ensuite à zéro, la somme de ces termes, et supposant ensuite dans l'équation différentielle que l'on obtient ainsi, ϕ égal à une suite ascendante par rapport aux puissances de x ; on aura une série convergente. On aura ensuite

$$\Delta^n \cdot \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = f c^{-s'x} \cdot (c^{-x} - 1)^n \cdot \phi dx;$$

d'où l'on tirera une valeur en série de $\Delta^n \cdot \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i}$, et dans laquelle il suffira de changer le signe de i , pour avoir la valeur de $\Delta^n \cdot \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^i$.

Cette manière de résoudre par approximation, l'équation différentielle en ϕ , et que nous avons indiquée à la fin du n° 30, peut servir dans un grand nombre de cas où cette équation n'est pas intégrable exactement.

Remarque générale sur la convergence des séries.

44. Nous terminerons cette Introduction, par une observation importante sur la convergence des séries dont nous avons fait un si fréquent usage. Ces séries convergent très-rapidement dans leurs premiers termes; mais souvent cette convergence diminue et finit par se changer en divergence. Elle ne doit pas empêcher l'usage de ces séries, en n'employant que leurs premiers termes, dans lesquels la convergence est rapide; car le reste de la série, que l'on néglige, est le développement d'une fonction algébrique ou intégrale, très-petite par rapport à ce qui précède. Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons le développement en série, de l'intégrale $\int dt \cdot c^{-t}$, prise depuis $t = T$ jusqu'à t infini. On a, par le n° 27,

$$\int dt. c^{-t} = \frac{c^{-T}}{2T} \cdot \left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.5}{2^2.T^4} - \frac{1.3.5}{2^3.T^6} + \text{etc.} \right).$$

Cette série finit par être divergente, quelque grande que soit la valeur que l'on suppose à T ; mais alors on peut employer sans erreur sensible, ses premiers termes. En effet, si l'on considère, par exemple, ses quatre premiers termes, le reste de la série sera $\frac{1.3.5.7}{2^4} \cdot \int \frac{dt. c^{-t^2}}{t^8}$; or cette quantité, abstraction faite du signe, est plus petite que le terme $-\frac{1.3.5. c^{-T^2}}{2^4.T^7}$ qui précède; c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{c^{-T^2}}{T^7} > 7 \cdot \int \frac{dt. c^{-t^2}}{t^8}.$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dt. c^{-t^2}}{t^8} &< \frac{c^{-T^2}}{T^8} \cdot \int_2 dt. c^{T^2-t^2} \\ &< \frac{c^{-T^2}}{T^8} \cdot \int dz. c^{-2Tz-z^2} + \frac{c^{-T^2}}{T^9} \cdot \int_2 dz. c^{-2Tz-z^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T^9}, \end{aligned}$$

t étant égal à $T+z$, et l'intégrale devant être prise depuis z nul jusqu'à z infini. On a donc

$$7 \cdot \int \frac{dt. c^{-t^2}}{t^8} < 7 \cdot \frac{c^{-T^2}}{2T^9};$$

or cette dernière quantité est moindre que $\frac{c^{-T^2}}{T^7}$, lorsque $2T^2$ surpasse 7: par conséquent si T est un grand nombre, on peut employer sans crainte d'erreur sensible, les premiers termes de la série précédente qui exprime l'intégrale $\int dt. c^{-t^2}$.

Ce que nous venons de dire sur cette série, peut s'appliquer à toutes celles que nous avons considérées, et doit ôter toute inquiétude sur les usages que nous en avons faits.

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de cette théorie.

1. **T**ous les événemens, ceux même qui par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions célestes. Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la matière est animée, ainsi que la position et la vitesse de chacune de ses molécules ; si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule, les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome. Pour une semblable intelligence, rien ne serait irrégulier, et la courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs, paraîtrait réglée d'une manière aussi certaine, que l'est pour nous l'orbe du soleil. Mais dans l'ignorance où nous sommes de l'immensité des données nécessaires à la solution de ce grand problème, et dans l'impossibilité, vu notre faiblesse, d'assujétir au calcul la plupart de celles qui nous sont connues, alors même que leur nombre est très-borné ; nous attribuons les phénomènes qui nous paraissent arriver et se succéder sans aucun ordre, à des causes variables et cachées, dont l'action a été désignée par le mot *hasard*, mot qui n'est au fond que l'expression de notre ignorance.

La probabilité est relative, en partie, à cette ignorance, et en

partie, à nos connaissances. Nous savons que sur trois ou un plus grand nombre d'événemens, un seul doit exister ; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision, il est impossible de prononcer avec certitude sur leur existence. Il est cependant probable qu'un de ces événemens, pris à volonté, n'existera pas ; parce que, sur divers cas pour nous également possibles, nous en voyons plusieurs qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des probabilités consiste à réduire tous les événemens qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est donc qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles.

Tous nos jugemens sur les choses qui ne sont que vraisemblables (et c'est le plus grand nombre), sont fondés sur un pareil rapport. La différence des données que chaque homme a sur elles, et la manière souvent erronée dont on apprécie ce rapport, donnent naissance à cette foule d'opinions que l'on voit exister sur les mêmes objets. Pour en donner un exemple, considérons trois urnes *A*, *B*, *C*, dont une ne renferme que des boules noires, tandis que les deux autres ne contiennent que des boules blanches. On tire une boule de l'urne *C*, et l'on demande la probabilité que cette boule sera noire. Pour celui qui ignore laquelle des trois urnes ne renferme que des boules noires, et qui n'a pas de motifs de croire qu'elle est plutôt *C* que *B* ou *A*, ces trois hypothèses sont également possibles, et comme une boule noire ne peut être extraite que dans la première hypothèse, la probabilité de l'extraire est égale à un tiers. Pour celui qui sait d'avance que l'urne *A* ne contient que des boules blanches, l'indécision ne porte que sur les urnes *B* et *C*, et la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne *C*, est $\frac{1}{2}$. Enfin,

cette probabilité se change en certitude pour celui qui sait que les deux urnes A et B ne contiennent que des boules blanches.

Quand tous les cas possibles sont favorables à un événement, sa probabilité devient égale à l'unité, et se change en certitude. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables; quoiqu'il y ait une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, et lorsqu'il aperçoit encore une petite cause d'erreur.

La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans le même rapport, le nombre des cas favorables, et celui des cas possibles, la probabilité reste la même. Pour s'en convaincre, considérons deux urnes A et B dont la première contienne quatre boules blanches et deux noires, et dont la seconde ne renferme que deux boules blanches et une noire. On peut imaginer que dans la première urne, les deux boules noires sont attachées par un lien qui se rompt au moment où l'on saisit l'une d'elles, et que les quatre boules blanches forment deux systèmes semblables. Toutes les chances qui feront saisir l'une des boules du système noir, amèneront une boule noire. Si l'on conçoit, maintenant, que les liens qui unissent les boules, ne puissent se rompre; le nombre des chances possibles ne changera pas, non plus que le nombre des chances favorables à l'extraction des boules noires: seulement, on tirera de l'urne deux boules à la fois; la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne, sera donc la même qu'auparavant. Mais alors on a évidemment le cas de l'urne B , avec la différence que les boules de cette dernière urne seront remplacées par trois systèmes de deux boules invariablement unies. Ici, les cas également possibles ne sont pas les extractions des boules, mais les chances qui les amènent, et dont la somme peut être supposée la même pour chaque urne, et répartie sur six boules dans la première, et sur trois dans la seconde. La juste appréciation des cas également possibles, est un des points les plus délicats de l'analyse des hasards.

Lorsqu'un événement est composé de deux événemens simples, indépendans l'un de l'autre; il est clair que le nombre de tous les cas possibles, est le produit des deux nombres qui expriment tous

les cas possibles relatifs à chaque événement simple ; parce que chacun des cas relatifs à l'un de ces événemens, peut se combiner avec tous les cas relatifs à l'autre événement. Par la même raison, le nombre des cas favorables à l'événement composé, est le produit des deux nombres qui expriment les cas favorables à chaque événement simple ; la probabilité de l'événement composé est donc alors le produit des probabilités de chaque événement simple. Ainsi la probabilité d'amener un as avec un dé, étant un sixième, puisque sur six cas également possibles, un seul est favorable ; la probabilité d'amener deux as en projetant deux dés à la fois, sera $\frac{1}{6^2}$ ou $\frac{1}{36}$. C'est aussi la probabilité d'amener deux fois de suite un as, avec un seul dé, lorsqu'on suppose ses faces parfaitement égales ; et dans ce cas, la probabilité d'amener un as, m fois de suite, est $\frac{1}{6^m}$.

Si les événemens simples sont liés entre eux, de manière que la supposition de l'arrivée du premier, influe sur la probabilité de l'arrivée du second ; on aura la probabilité de l'événement composé, en déterminant, 1° la probabilité du premier événement ; 2° la probabilité que cet événement étant arrivé, le second aura lieu. Le produit de ces deux probabilités sera celle de l'événement composé. Ainsi dans le cas précédent de trois urnes A , B , C , dont deux ne contiennent que des boules blanches, et dont l'autre ne contient que des boules noires, la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne C , et une boule noire de l'urne B , est $\frac{1}{3}$; car la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne C , est $\frac{2}{3}$, puisque sur les trois hypothèses également possibles, et relatives à l'urne qui ne contient que des boules noires, deux favorisent l'extraction d'une boule blanche de l'urne C . Ensuite en supposant que l'on a extrait une boule blanche de l'urne C , l'indécision relative à l'urne qui contient des boules noires, ne porte plus que sur les urnes A et B ; la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne B , est donc $\frac{1}{2}$; par conséquent, la probabilité de l'événement composé, est $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, ou $\frac{1}{3}$.

Pour démontrer d'une manière générale la proposition que nous venons d'énoncer, nommons p le nombre des cas possibles relatifs

au premier événement, et p' celui des cas qui lui sont favorables. Nommons ensuite q le nombre des cas possibles relatifs au second événement, qui correspondent à chacun des cas p ; et q' le nombre des cas qui lui sont favorables. Le nombre de tous les cas possibles relatifs à l'événement composé, sera évidemment pq , et le nombre des cas favorables à cet événement, sera $p'q'$; sa possibilité sera donc $\frac{p'q'}{pq}$. Or $\frac{p'}{p}$ est la probabilité du premier événement; $\frac{p'q'}{p'q}$ est la probabilité que le premier événement étant arrivé, le second aura lieu; puisqu'alors le nombre des cas possibles est réduit de pq à $p'q$, celui des cas favorables à l'événement composé étant toujours $p'q'$. De plus, la probabilité $\frac{p'q'}{pq}$ est le produit des deux fractions $\frac{p'}{p}$ et $\frac{p'q'}{p'q}$; on a donc ce principe :

I^{er} PRINCIPE. *La probabilité d'un événement composé de deux événemens simples, est le produit de la probabilité d'un de ces événemens, par la probabilité que cet événement étant arrivé, l'autre événement aura lieu.*

De ce principe résulte le suivant, relatif à la probabilité des événemens futurs, tirée des événemens observés. En considérant comme événement composé, l'événement observé joint à l'événement futur; la probabilité de ce dernier événement, tirée de l'événement observé, est évidemment la probabilité que l'événement observé ayant lieu, l'événement futur aura lieu pareillement. Or, par le principe que nous venons d'exposer, cette probabilité multipliée par celle de l'événement observé, déterminée *à priori*, ou indépendamment de ce qui est déjà arrivé, est égale à celle de l'événement composé, déterminée *à priori*; on a donc ce second principe :

II^e PRINCIPE. *La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens, et déterminée à priori, par la probabilité de l'événement observé, déterminée pareillement à priori.*

Du même principe découle encore cet autre principe relatif à la probabilité des causes, tirée des événemens observés :

III^e PRINCIPE. *Si un événement observé peut résulter de n causes différentes ; leurs probabilités sont respectivement , comme les probabilités de l'événement , tirées de leur existence ; et la probabilité de chacune d'elles est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement , dans l'hypothèse de l'existence de la cause , et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables , relatives à toutes les causes.*

Considérons en effet , comme événement composé , l'événement observé résultant d'une de ces causes.

La probabilité de cet événement composé , probabilité que nous désignerons par E , sera en vertu du premier principe , égale au produit de la probabilité de l'événement observé , déterminée *à priori* , et que nous nommerons F , par la probabilité que cet événement ayant lieu , la cause dont il s'agit existe , probabilité qui est celle de la cause , tirée de l'événement observé , et que nous nommerons P ; on aura donc

$$P = \frac{E}{F}.$$

La probabilité de l'événement composé , est le produit de la probabilité de la cause , par la probabilité que cette cause ayant lieu , l'événement arrivera , probabilité que nous désignerons par H ; toutes les n causes étant *à priori* également possibles , la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{n}$; on a donc

$$E = \frac{H}{n}.$$

La probabilité de l'événement observé , est la somme de tous les E relatifs à chaque cause ; en désignant donc par $S \cdot \frac{H}{n}$, la somme de toutes les valeurs de $\frac{H}{n}$; on aura

$$F = S \cdot \frac{H}{n} ;$$

l'équation $P = \frac{E}{F}$ deviendra donc

$$P = \frac{H}{S \cdot H} ;$$

ce qui est le principe énoncé ci-dessus.

Pour appliquer les principes précédens à un exemple, supposons qu'une urne renferme trois boules dont chacune ne puisse être que blanche ou noire; qu'après avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage, et qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches. Il est visible que l'on ne peut faire *à priori*, que quatre hypothèses; car les boules peuvent être, ou toutes blanches, ou deux blanches et une noire, ou deux noires et une blanche, ou enfin toutes noires. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'événement observé; les probabilités de l'événement, relatives à ces causes, seront

$$1, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0.$$

Les probabilités respectives de ces hypothèses, tirées de l'événement observé, seront donc, par le troisième principe,

$$\frac{3^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{2^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{1}{3^m + 2^m + 1},$$

On voit, au reste, qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'événement, parce que la probabilité résultante de ces hypothèses, étant nulle, leur omission ne change point les expressions des autres probabilités.

Si l'on veut avoir la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivans; on déterminera *à priori*, les probabilités d'amener d'abord m boules blanches, ensuite m' boules noires. Ces probabilités sont, relativement aux hypothèses précédentes,

$$0, \quad \frac{2^m}{3^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}, \quad 0;$$

et comme *à priori*, les quatre hypothèses sont également possibles, la probabilité de l'événement composé sera le quart de la somme des quatre probabilités précédentes, ou

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m+m'}}.$$

Les probabilités de l'événement observé, déterminées *à priori*, dans les quatre hypothèses précédentes, étant respectivement

$$\frac{3^m}{3^m}, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0,$$

le quart de leur somme , ou

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3^m + 2^m + 1}{3^m} \right),$$

sera la probabilité de l'événement observé , déterminée *à priori* ; en divisant donc la probabilité de l'événement composé , par cette probabilité , on aura par le second principe ,

$$\frac{2^{m'} + 2^{m'}}{3^{m'} \cdot (3^m + 2^m + 1)},$$

pour la probabilité d'amener m' boules noires dans les m' tirages suivans.

On peut encore déterminer cette probabilité , par le principe suivant.

IV^e PRINCIPE. *La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause , tirée de l'événement observé , par la probabilité que cette cause existant , l'événement futur aura lieu.*

Ici les probabilités de chaque cause , tirées de l'événement observé , sont , comme on l'a vu ,

$$\frac{3^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{2^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{1}{3^m + 2^m + 1}, \quad 0;$$

les probabilités de l'événement futur , relatives à ces causes , sont respectivement

$$0, \quad \frac{1}{3^{m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m'}}, \quad 1;$$

la somme de leurs produits respectifs , ou

$$\frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m'} \cdot (3^m + 2^m + 1)},$$

sera la probabilité de l'événement futur , tirée de l'événement observé ; ce qui est conforme à ce qui précède.

Si l'on suppose quatre boules dans l'urne , et qu'ayant amené une
boule

boule blanche au premier tirage, on cherche la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivans; on trouvera, par les principes exposés ci-dessus, cette probabilité égale à

$$\frac{3 + 2^{m'+1} + 3^{m'}}{10 \cdot 4^{m'}}.$$

Si le nombre des boules blanches égale celui des noires; la probabilité de n'amener que des boules noires dans m' tirages, est $\frac{1}{2^{m'}}$. Elle surpasse la précédente, lorsque m' est égal ou moindre que 5; mais elle lui devient inférieure, lorsque m' surpasse 5, quoique la boule blanche extraite d'abord de l'urne, indique une supériorité dans le nombre des boules blanches. L'explication de ce paradoxe, tient à ce que cette indication n'exclut point la supériorité du nombre des boules noires; elle la rend seulement moins probable; au lieu que la supposition d'une égalité parfaite entre le nombre des blanches et celui des noires, exclut cette supériorité; or cette supériorité, quelque petite que soit sa probabilité, doit rendre la probabilité d'amener de suite, m' boules noires, plus grande que dans le cas de l'égalité des couleurs, lorsque m' est considérable.

L'inégalité qui peut exister entre des choses que l'on suppose parfaitement semblables, peut avoir sur les résultats du calcul des probabilités, une influence sensible qui mérite une attention particulière. Considérons le jeu de *croix* et *pile*, et supposons qu'il soit également facile d'amener *croix* que *pile*; alors la probabilité d'amener *croix* au premier coup, est $\frac{1}{2}$, et celle de l'amener deux fois de suite, est $\frac{1}{4}$. Mais s'il existe dans la pièce une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse la face que cette inégalité favorise; la probabilité d'amener *croix* au premier coup, restera toujours $\frac{1}{2}$; parce que dans l'ignorance où l'on est, de la face que cette inégalité favorise; autant la probabilité de l'événement simple est augmentée, si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée, si cette inégalité lui est contraire. Mais la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite, est augmentée, malgré cette ignorance; car cette probabilité est égale à celle d'amener *croix* au premier coup, multipliée par

la probabilité que l'ayant amené au premier coup, on l'amènera au second; or son arrivée au premier coup, est un motif de croire que l'inégalité de la pièce, la favorise; elle augmente donc la probabilité de l'amener au second; ainsi le produit des deux probabilités est accru par cette inégalité. Pour soumettre cet objet au calcul, supposons que l'inégalité de la pente accroisse de la quantité α , la probabilité de l'événement simple qu'elle favorise. Si cet événement est *croix*, la probabilité sera $\frac{1}{2} + \alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2} + \alpha)^2$. Si l'événement favorisé est *pile*, la probabilité de *croix* sera $\frac{1}{2} - \alpha$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $(\frac{1}{2} - \alpha)^2$. Comme on n'a d'avance, aucune raison de croire que l'inégalité favorise plutôt l'un que l'autre des événemens simples, il est clair que pour avoir la probabilité de l'événement composé *croix-croix*, il faut ajouter les deux probabilités précédentes, et prendre la moitié de leur somme, ce qui donne $\frac{1}{4} + \alpha^2$ pour cette probabilité: c'est aussi la probabilité de *pile-pile*. On trouvera par le même raisonnement, que la probabilité de l'événement composé *croix-pile* ou *pile-croix*, est $\frac{1}{4} - \alpha^2$; par conséquent, elle est moindre que celle de la répétition du même événement simple.

Les considérations précédentes peuvent être étendues à des événemens quelconques. p représentant la probabilité d'un événement simple, et $1 - p$ celle de l'autre événement; si l'on désigne par P , la probabilité d'un résultat relatif à ces événemens, et que l'on suppose que p soit réellement $p \pm \alpha$, α étant une quantité inconnue, ainsi que le signe qui l'affecte; la probabilité P du résultat sera

$$P + \frac{1}{1.2} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{d^2 P}{dp^2} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \alpha^4 \cdot \frac{d^4 P}{dp^4} + \text{etc.}$$

En faisant $P = p^n$, c'est-à-dire en supposant que le résultat relatif aux événemens, soit n fois la répétition du premier; la probabilité P deviendra

$$p^n + \frac{n \cdot (n-1)}{1.2} \cdot \alpha^2 \cdot p^{n-2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1.2.3.4} \cdot \alpha^4 \cdot p^{n-4} + \text{etc.}$$

Ainsi l'erreur inconnue que l'on peut supposer dans la probabilité

des événemens simples, accroît toujours la probabilité des événemens composés de la répétition du même événement.

2. La probabilité des événemens sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions ; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition de la somme entière se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette manière de la répartir, est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère ; parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage, *espérance mathématique*, pour le distinguer de l'espérance morale qui dépend, comme lui, du bien espéré et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible de définir, et plus encore, d'assujétir au calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne faisant qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré, on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur, par la probabilité de l'obtenir ; mais on doit alors distinguer dans le bien espéré, sa valeur relative, de sa valeur absolue : celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croît avec ces motifs.

On ne peut donner de règle générale pour apprécier cette valeur relative ; cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite, en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse du bien total de la personne intéressée. En effet, il est clair qu'un franc a très-peu de prix pour celui qui en possède un grand nombre, et que la manière la plus naturelle d'estimer sa valeur relative, est de la supposer en raison inverse de ce nombre.

Tels sont les principes généraux de l'analyse des probabilités.

Nous allons maintenant les appliquer aux questions les plus délicates et les plus difficiles de cette analyse. Mais pour mettre de l'ordre dans cette matière, nous traiterons d'abord les questions dans lesquelles les probabilités des événemens simples, sont données ; nous considérerons ensuite celles dans lesquelles ces possibilités sont inconnues , et doivent être déterminées par les événemens observés.

CHAPITRE II.

De la probabilité des événemens composés d'événemens simples dont les possibilités respectives sont données.

3. **S**I l'on développe le produit $(1+p).(1+p').(1+p'')$ etc. composé de n facteurs; ce développement renfermera toutes les combinaisons possibles des n lettres $p, p', p'', \dots p^{(n-1)}$, prises une à une, deux à deux, trois à trois, etc. jusqu'à n ; et chaque combinaison aura pour coefficient l'unité. Ainsi la combinaison $pp'p''$ résultant du produit $(1+p).(1+p').(1+p'')$, multiplié par le terme 1 du développement des autres facteurs; son coefficient est évidemment l'unité. Maintenant, pour avoir le nombre total des combinaisons de n lettres prises x à x ; on observera que chacune de ces combinaisons devient p^x , lorsqu'on suppose p', p'' , etc. égaux à p . Alors le produit des n facteurs précédens se change dans le binôme $(1+p)^n$; or le coefficient de p^x dans le développement de ce binôme, est

$$\frac{n.(n-1).(n-2).\dots.(n-x+1)}{1.2.3.\dots.x};$$

cette quantité exprime donc le nombre des combinaisons des n lettres prises x à x . On aura le nombre total des combinaisons de ces lettres, prises une à une, deux à deux, etc. jusqu'à n à n , en faisant $p=1$, dans le binôme $(1+p)^n$, et en retranchant l'unité; ce qui donne 2^n-1 pour ce nombre.

Supposons que dans chaque combinaison, on ait égard non-seulement au nombre des lettres, mais encore à leur situation; on déterminera le nombre des combinaisons, en observant que dans la combinaison de deux lettres, pp' , on peut mettre p' à la seconde

place, et ensuite à la première; ce qui donne les deux combinaisons pp' , $p'p$. En introduisant ensuite une nouvelle lettre p'' dans chacune de ces combinaisons, on peut la mettre à la première, à la seconde ou à la troisième place; ce qui donne 2.3 combinaisons. En continuant ainsi, on voit que dans une combinaison de x lettres, on peut leur donner 1.2.3.... x situations différentes; d'où il suit que le nombre total des combinaisons de n lettres, prises x à x , étant par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2)....(n-x+1)}{1.2.3....x};$$

le nombre total des combinaisons, lorsqu'on a égard à la différente situation des lettres, sera cette même fonction, en supprimant son dénominateur.

On peut facilement, au moyen de ces formules, déterminer les bénéfices des loteries. Supposons que le nombre des numéros d'une loterie, soit n , et qu'il en sorte r à chaque tirage; on veut avoir la probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros, sortira au premier tirage.

Le nombre total des combinaisons des numéros, pris r à r , est par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2)....(n-r+1)}{1.2.3....r};$$

Pour avoir parmi ces combinaisons, le nombre de celles dans lesquelles les s numéros sont compris, on observera que si l'on retranche ces numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $r-s$ à $r-s$, le reste $n-s$, le nombre de ces combinaisons sera le nombre cherché; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros à chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons r à r des numéros dans lesquelles sont ces s numéros. Ce nombre est donc

$$\frac{(n-s).(n-s-1)....(n-r+1)}{1.2.3....(r-s)};$$

en le divisant par le nombre total des combinaisons r à r des n numéros, on aura pour la probabilité cherchée,

$$\frac{r.(r-1).(r-2)....(r-s+1)}{n.(n-1).(n-2)....(n-s+1)}.$$

En divisant cette quantité par $1.2.3\dots s$, on aura par ce qui précède, la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entre eux. On aura la probabilité que les s premiers numéros du tirage, seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s numéros à chaque tirage ; ce qui revient à faire $r = s$ dans la fonction précédente qui devient ainsi

$$\frac{1.2.3\dots s}{n.(n-1)\dots(n-s+1)}.$$

Enfin, on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront les premiers dans un ordre déterminé, en réduisant le numérateur de cette fraction, à l'unité.

Les quotiens des mises divisées par ces probabilités, sont ce que la loterie doit rendre aux joueurs : l'excédant de ces quotiens sur ce qu'elle donne, est son bénéfice. En effet, si l'on nomme p la probabilité du joueur, m sa mise, et x ce que la loterie doit lui rendre, pour l'égalité du jeu ; $x - m$ sera la mise de la loterie ; car ayant reçu la mise m , et rendant x au joueur ; elle ne met au jeu que $x - m$. Or pour l'égalité du jeu, l'espérance mathématique de chaque joueur doit être égale à sa crainte : son espérance est le produit de la mise $x - m$ de son adversaire, par la probabilité p de l'obtenir : sa crainte est le produit de sa mise m , par la probabilité $1 - p$ de la perte. On a donc

$$p.(x - m) = (1 - p).m;$$

c'est-à-dire que pour l'égalité du jeu, les mises doivent être réciproques aux probabilités de gagner. Cette équation donne

$$x = \frac{m}{p};$$

ainsi ce que la loterie doit rendre, est le quotient de la mise divisée par la probabilité du joueur pour gagner.

4. Une loterie étant composée de n numéros dont r sortent à chaque tirage, on demande la probabilité qu'après i tirages, tous les numéros seront sortis.

Nommons $z_{n,i}$ le nombre des cas dans lesquels après i tirages,

la totalité des n° 1, 2, 3, . . . q sera sortie. Il est clair que ce nombre est égal au nombre $z_{n,q-1}$, de cas dans lesquels les n° 1, 2, 3, . . . $q-1$ sont sortis, moins le nombre de cas dans lesquels ces numéros étant sortis, le n° q n'est pas sorti; or ce dernier nombre est évidemment le même que celui des cas dans lesquels les n° 1, 2, 3, . . . $q-1$ seraient sortis, si l'on ôtait le n° q des n numéros de la loterie, et ce nombre est $z_{n-1,q-1}$; on a donc

$$z_{n,q} = z_{n,q-1} - z_{n-1,q-1} \quad (i)$$

Maintenant le nombre de tous les cas possibles dans un seul tirage, étant $\frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-r+1)}{1.2.3 \dots r}$, celui de tous les cas possibles dans i tirages, est

$$\left(\frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-r+1)}{1.2.3 \dots r} \right)^i.$$

Le nombre de tous les cas dans lesquels le n° 1 ne sortira pas dans ces i tirages, est le nombre de tous les cas possibles, lorsqu'on retranche ce numéro des n numéros de la loterie; et ce nombre est

$$\left(\frac{(n-1).(n-2) \dots (n-r)}{1.2.3 \dots r} \right)^i;$$

le nombre des cas dans lesquels le n° 1 sera sorti dans i tirages, est donc

$$\left(\frac{n.(n-1) \dots (n-r+1)}{1.2.3 \dots r} \right)^i - \left(\frac{(n-1).(n-2) \dots (n-r)}{1.2.3 \dots r} \right)^i,$$

ou

$$\Delta \cdot \left(\frac{(n-1).(n-2) \dots (n-r)}{1.2.3 \dots r} \right)^i;$$

c'est la valeur de $z_{n,1}$. Cela posé, l'équation (i) donnera, en y faisant successivement $q=2$, $q=3$, etc.,

$$z_{n,2} = \Delta^2 \cdot \left(\frac{(n-2).(n-3) \dots (n-r-1)}{1.2.3 \dots r} \right)^i,$$

$$z_{n,3} = \Delta^3 \cdot \left(\frac{(n-3).(n-4) \dots (n-r-2)}{1.2.3 \dots r} \right)^i,$$

etc.;

et généralement,

$$z_{n,q} = \Delta^q \cdot \left(\frac{(n-q) \cdot (n-q-1) \cdot \dots \cdot (n-r-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} \right)^i.$$

Ainsi la probabilité que les n^{os} 1, 2, 3, ... q sortiront dans i tirages, étant égale à $z_{n,q}$ divisé par le nombre de tous les cas possibles, elle sera

$$\frac{\Delta^q \cdot [(n-q) \cdot (n-q-1) \cdot \dots \cdot (n-r-q+1)]^i}{[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)]^i}.$$

Si l'on fait dans cette expression $q = n$, on aura, s étant ici la variable qui doit être supposée nulle dans le résultat,

$$\frac{\Delta^n \cdot [s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-r+1)]^i}{[n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)]^i}$$

pour l'expression de la probabilité que tous les numéros de la loterie sortiront dans i tirages.

Si n et i sont de très-grands nombres, on aura par les formules du n^o 40 du premier Livre, la valeur de cette probabilité, au moyen d'une série très-convergente. Supposons, par exemple, qu'il ne sort qu'un numéro à chaque tirage, la probabilité précédente devient

$$\frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i}.$$

Proposons-nous de déterminer le nombre i de tirages dans lesquels cette probabilité est $\frac{1}{k}$, n et i étant de très-grands nombres. En suivant l'analyse du numéro cité, on déterminera d'abord a par l'équation

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n \cdot c^a}{c^a - 1};$$

ce qui donne

$$a = \frac{i+1}{n+s} \cdot \left\{ \frac{1 - c^{-a}}{1 - \frac{s \cdot c^{-a}}{n+s}} \right\}.$$

On a ensuite par le n^o 40 du premier Livre, lorsque c^{-a} est une quantité très-petite de l'ordre $\frac{1}{i}$, comme cela a lieu dans la question présente; on a, dis-je, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, s étant

supposé nul dans le résultat du calcul,

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = \frac{\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} \cdot c^{na-i} \cdot (1-c^{-a})^{n-i}}{\sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{n}\right) \cdot c^{-a}}}$$

or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} = c^{-i};$$

en supposant ensuite $c^{-a} = z$, on a

$$(1-c^{-a})^{n-i} = c^{(i-n) \cdot z} \cdot \left[1 + \left(\frac{i-n}{2}\right) \cdot z^2\right];$$

de plus, l'équation qui détermine a , donne

$$i+1-na = (i+1) \cdot z;$$

d'où l'on tire

$$c^{na-i-1} = c^{-iz} \cdot (1-z);$$

on aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = c^{-nz} \cdot \left[1 + \left(\frac{i-2n+1}{2n}\right) \cdot z + \left(\frac{i-n}{2}\right) \cdot z^2\right].$$

Pour déterminer z , reprenons l'équation

$$a = \frac{i+1}{n} - \left(\frac{i+1}{n}\right) \cdot c^{-a};$$

on aura par la formule (p) du n° 21 du second Livre de la *Mécanique céleste*,

$$z = c^{-a} = q + \left(\frac{i+1}{n}\right) \cdot q^2 + \frac{3 \cdot \left(\frac{i+1}{n}\right)^2}{1 \cdot 2} \cdot q^3 + \frac{4^2 \cdot \left(\frac{i+1}{n}\right)^3}{2 \cdot 3} \cdot q^4 + \text{etc.};$$

z étant supposé égal à $c^{-\left(\frac{i+1}{n}\right)}$. Cette valeur de z donne

$$c^{-nz} = c^{-nq} \cdot [1 - (i+1) \cdot q^2];$$

par conséquent,

$$\frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i} = c^{-n} \cdot \left[1 + \left(\frac{i+1-2n}{2n} \right) \cdot q - \left(\frac{n+i+2}{2} \right) \cdot q^2 \right].$$

En égalant cette quantité à la fraction $\frac{1}{k}$, on aura

$$q = \frac{\log k}{n} \cdot \left[1 + \left(\frac{i+1-2n}{2n^2} \right) - \left(\frac{n+i+2}{2n^2} \right) \cdot \log k \right];$$

or on a

$$i+1 = -n \cdot \log q;$$

on aura donc à très-peu près pour l'expression du nombre i de tirages, après lesquels la probabilité que tous les numéros seront sortis est $\frac{1}{k}$,

$$i = (\log n - \log \log k) \cdot (n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log k) + \frac{1}{2} \log k;$$

on doit observer que tous ces logarithmes sont hyperboliques.

Supposons la loterie composée de dix mille numéros, ou $n=10000$, et $k=2$, cette formule donne

$$i = 95767,4$$

pour l'expression du nombre de tirages, dans lesquels on peut parier un contre un, que les dix mille billets de la loterie sortiront; il y a donc un peu moins d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95767 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95768 tirages.

On déterminera par une analyse semblable, le nombre des tirages dans lesquels on peut parier un contre un, que tous les numéros de la loterie de France sortiront. Cette loterie est, comme on sait, composée de 90 numéros dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité que tous les numéros sortiront dans i tirages, est alors par ce qui précède,

$$\frac{\Delta^n \cdot [s'(s'-1) \cdot (s'-2) \cdot (s'-3) \cdot (s'-4)]^i}{[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)]^i},$$

n étant ici égal à 90, et s' devant être supposé nul dans le résultat

du calcul. Si l'on fait $s = s' - 2$, cette fonction devient

$$\frac{\Delta^n \cdot [s \cdot (s^2 - 1) \cdot (s^2 - 4)]^i}{[(n-2) \cdot (n-2-1) \cdot (n-2-4)]^i};$$

ou en développant en série,

$$\frac{(\Delta^n \cdot s^{5i} - 5i \Delta^n \cdot s^{5i-2} + \text{etc.})}{(n-2)^{5i}} \cdot \left(1 + \frac{5i}{(n-2)^2} + \text{etc.}\right),$$

s devant être supposé égal à -2 dans le résultat du calcul.

On a par le n° 40 du premier Livre, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, et supposant c^{-a} très-petit de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\frac{\Delta^n \cdot s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = \frac{\left(\frac{5i+1}{a}\right)^{5i} \cdot \left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i} \cdot c^{(n-2)a-5i} \cdot (1-c^{-a})^n}{(n-2)^{5i} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{5i} - \frac{na^2 \cdot c^{-a}}{5i \cdot (1-c^{-a})^2}}},$$

a étant donné par l'équation

$$a = \frac{(5i+1) \cdot (1-c^{-a})}{(n-2) \cdot \left(1 + \frac{2c^{-a}}{n-2}\right)}.$$

On a ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^n \cdot s^{5i}}{(n-2)^{5i}} &= \frac{\left(1 + \frac{2c^{-a}}{n-2}\right)^{5i}}{(1-c^{-a})^{5i}} \cdot (1-c^{-a})^n \cdot c^{1-(5i+1)c^{-a}-\frac{10ic^{-a}}{n-2}} \\ &\times \left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i} \cdot \left(1 - \frac{1}{10 \cdot i} + \frac{na^2 \cdot c^{-a}}{10 \cdot i}\right); \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2c^{-a}}{n-2}\right)^{5i} &= c^{\frac{10ic^{-a}}{n-2}}, \\ (1-c^{-a})^{-5i} &= c^{5i \cdot c^{-a}} \cdot \left(1 + \frac{5i}{2} \cdot c^{-1a}\right), \\ \left(\frac{5i}{5i+1}\right)^{5i} &= c^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{10 \cdot i}\right); \end{aligned}$$

on aura donc aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n \cdot s^i}{(n-2)^{5i}} = (1-c^{-a})^n \cdot \left(1 - c^{-a} + \frac{5i}{2} \cdot c^{-2a} + \frac{na^2 \cdot c^{-a}}{10 \cdot i}\right).$$

En substituant pour α sa valeur, et observant que i est fort peu différent de $n-2$, dans le cas présent, comme on le verra ci-après; on a à très-peu près,

$$\frac{na^2 \cdot c^{-a}}{10 \cdot i} = \frac{(5i+12)}{2 \cdot (n-2)} \cdot c^{-a}.$$

Je conserve pour plus d'exactitude, le terme $\frac{12 \cdot c^{-a}}{2 \cdot (n-2)}$, quoique de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, à cause de la grandeur de son facteur 12; on aura donc

$$\frac{\Delta^n \cdot s^{5i}}{(n-2)^{5i}} = (1-c^{-a})^n \cdot \left(1 + \frac{(5i-2n+16)}{2 \cdot (n-2)} \cdot c^{-a} + \frac{5i}{2} \cdot c^{-2a}\right).$$

Si l'on change dans cette expression $5i$ dans $5i-2$, on aura celle de $\frac{\Delta^n \cdot s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}}$; mais la valeur de α ne sera plus la même. Soit α' cette nouvelle valeur, on aura

$$\alpha' = \frac{(5i-1) \cdot (1-c^{-a'})}{(n-2) \cdot \left(1 + \frac{2c^{-a'}}{n-2}\right)},$$

ce qui donne à très-peu près,

$$\alpha' = \alpha - \frac{2}{n-2}.$$

Alors on a

$$1 - c^{-\alpha'} = 1 - c^{-a} - \frac{2c^{-a}}{n-2};$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$(1 - c^{-\alpha'})^n = (1 - c^{-a})^n;$$

par conséquent on a, en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\frac{\Delta^n \cdot s^{5i-2}}{(n-2)^{5i-2}} = (1 - c^{-a})^n.$$

On aura donc, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^n \cdot [s \cdot (s^2-1) \cdot (s^2-4)]^i}{[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)]^i} \\ &= (1 - c^{-a})^n \cdot \left[1 + \frac{(5i-2n+16)}{2 \cdot (n-2)} \cdot c^{-a} + \frac{5i}{2} \cdot c^{-2a}\right]. \end{aligned}$$

Cette quantité doit, par la condition du problème, être égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$1 - c^{-a} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{(5i-2n+16)}{2n \cdot (n-2)} \cdot c^{-a} - \frac{5i}{2n} \cdot c^{-2a} \right];$$

d'où l'on tire

$$c^{-a} = \left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left[1 + \frac{(5i-2n+16)}{2n \cdot (n-2)} + \frac{5i}{2n} \cdot c^{-a} \right];$$

par conséquent on a en logarithmes hyperboliques ,

$$a = \log \left(\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[n]{\frac{1}{2}} - 1} \right) - \frac{(5i-2n+16)}{2n \cdot (n-2)} - \frac{5i}{2n} \cdot c^{-a};$$

or on a, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i^2}$,

$$a = \frac{5i+1}{(n-2) \cdot \sqrt[n]{2}};$$

on aura donc

$$i = \frac{(n-2)}{5} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} - \frac{16}{10 \cdot 1n} - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt[n]{2} - 1) \right] \cdot \log \left(\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[n]{\frac{1}{2}} - 1} \right).$$

En substituant pour n sa valeur 90, on trouve

$$i = 85,53;$$

ensorte qu'il y a un peu moins d'un contre un à parier, que tous les numéros sortiront dans 85 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 86 tirages.

Un moyen fort simple et très-approché d'obtenir la valeur de i , est de supposer $\frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i}$, ou la série

$$1 - n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{n-2}{n} \right)^i - \text{etc.}$$

égale au développement

$$1 - n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^i + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{n-2}{n} \right)^i - \text{etc.}$$

du binome $\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$. En effet, les deux séries ont les deux premiers termes égaux respectivement. Leurs troisièmes termes sont aussi, à très-peu près, égaux entre eux; car on a à fort peu près $\left(\frac{n-2}{n}\right)^i$ égal à $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i}$. En effet, leurs logarithmes hyperboliques sont, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{i}{n^2}$, égaux l'un et l'autre à $-\frac{i}{n}$. On verra de la même manière, que les quatrièmes termes, les cinquièmes, etc., sont très-peu différens, lorsque n et i sont de très-grands nombres; mais la différence s'accroît sans cesse, à mesure que les termes s'éloignent du premier, ce qui doit à la fin, en produire une sensible entre les séries elles-mêmes. Pour l'apprécier, déterminons la valeur de i conclue de l'égalité des deux séries. En égalant à $\frac{1}{k}$, le binome $\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n$, on aura

$$i = \frac{\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

ces logarithmes pouvant être à volonté, hyperboliques ou tabulaires. Soit $\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z$. Nous aurons en prenant les logarithmes hyperboliques de chaque membre de cette équation,

$$\frac{1}{n} \cdot \log k = -\log(1 - z) = z + \frac{z^2}{2} + \text{etc.}$$

ce qui donne à très-peu près,

$$z = \frac{\log k}{n} \cdot \left(1 - \frac{\log k}{2n}\right);$$

on aura donc en logarithmes hyperboliques,

$$\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = \log z = \log \log k - \log n - \frac{\log k}{2n}.$$

On a ensuite

$$\log \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \text{etc.}$$

L'expression précédente de i devient ainsi à très-peu près,

$$i = n.(\log n - \log \log k). \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log k;$$

L'excès de la valeur trouvée précédemment pour i , sur celle-ci, est

$$\frac{\log k}{2} \cdot (\log n - \log \log k);$$

cet excès devient infini, lorsque n est infini; mais il faut un très-grand nombre pour le rendre bien sensible; et dans le cas de $n = 10000$ et de $k = 2$, il n'est encore que de trois unités.

Si l'on considère pareillement le développement

$$1 - n. \left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \text{etc.}$$

de l'expression $\frac{\Delta^n. [s'.(s'-1).(s'-2).(s'-3).(s'-4)]^i}{[n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)]^i}$, comme celui du binôme $\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$; on aura pour déterminer le nombre i de coups dans lesquels on peut parier un contre un, que tous les numéros sortiront, l'équation

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = \frac{1}{2};$$

ce qui donne

$$i = \frac{\left(\frac{\frac{n}{\sqrt{2}}}{\frac{n}{\sqrt{2}-1}}\right)}{\log \left(\frac{n}{n-5}\right)},$$

Ces logarithmes peuvent être tabulaires. En faisant $n = 90$, on trouve

$$i = 85,204,$$

ce qui diffère très-peu de la valeur $i = 85,53$ que nous avons trouvée ci-dessus.

5. Une urne étant supposée renfermer le nombre x de boules, on en tire une partie ou la totalité, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair.

La somme des cas dans lesquels ce nombre est l'unité, égale évidemment x ; puisque chacune des boules peut également être extraite. La somme des cas dans lesquels ce nombre égale 2, est la somme des combinaisons des x boules prises deux à deux, et cette somme est, par le n° 3, égale à $\frac{x.(x-1)}{1.2}$. La somme des cas dans lesquels le même nombre égale 3, est la somme des combinaisons des boules prises trois à trois, et cette somme est $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}$; et ainsi de suite. Ainsi les termes successifs du développement de la fonction $(1+1)^x - 1$, représenteront tous les cas dans lesquels le nombre des boules extraites, est successivement 1, 2, 3, etc. jusqu'à x ; d'où il est facile de conclure que la somme de tous les cas relatifs aux nombres impairs, est $\frac{1}{2} \cdot (1+1)^x - \frac{1}{2} \cdot (1-1)^x$, ou 2^{x-1} ; et que la somme de tous les cas relatifs aux nombres pairs, est $\frac{1}{2} \cdot (1+1)^x + \frac{1}{2} \cdot (1-1)^x - 1$, ou $2^{x-1} - 1$. La réunion de ces deux sommes est le nombre de tous les cas possibles; ce nombre est donc $2^x - 1$; ainsi la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair, est $\frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$, et la probabilité que ce nombre sera impair, est $\frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$; il y a donc de l'avantage à parier avec égalité, pour un nombre impair.

Si le nombre x est inconnu, et si l'on sait seulement qu'il ne peut excéder n , et que ce nombre et tous les inférieurs sont également possibles; on aura le nombre de tous les cas possibles relatifs aux nombres impairs, en faisant la somme de toutes les valeurs de 2^{x-1} , depuis $x = 1$ jusqu'à $x = n$, et il est facile de voir que cette somme est $2^n - 1$. On aura pareillement la somme de tous les cas possibles relatifs aux nombres pairs, en sommant la fonction $2^{x-1} - 1$, depuis $x = 1$ jusqu'à $x = n$, et l'on trouve cette somme

égale à $2^n - n - 1$; la probabilité d'un nombre pair est donc alors $\frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2}$; et celle d'un nombre impair est $\frac{2^n - 1}{2^{n+1} - n - 2}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme le nombre x de boules blanches, et le même nombre de boules noires; on demande la probabilité qu'en tirant un nombre pair quelconque de boules, on amènera autant de boules blanches que de boules noires, tous les nombres pairs pouvant être également amenés.

Le nombre des cas dans lesquels une boule blanche de l'urne peut se combiner avec une boule noire, est évidemment $x \cdot x$. Le nombre des cas dans lesquels deux boules blanches peuvent se combiner avec deux boules noires, est $\frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2}$, et ainsi de suite. Le nombre des cas dans lesquels on amènera autant de boules blanches que de boules noires, est donc la somme des carrés des termes du développement du binome $(1 + 1)^x$, moins l'unité. Pour avoir cette somme, nous observerons qu'elle est égale au terme indépendant de α , dans le développement de $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^x \cdot (1 + \alpha)^x$. Cette fonction est égale à $\frac{(1 + \alpha)^{2x}}{\alpha^x}$. Le terme indépendant de α , dans son développement, est ainsi le coefficient du terme moyen du binome $(1 + \alpha)^{2x}$; ce coefficient est $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2x}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x)^2}$; le nombre des cas dans lesquels on peut tirer de l'urne autant de boules blanches que de boules noires, est donc

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2x}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x)^2} = 1.$$

Le nombre de tous les cas possibles est la somme des termes impairs dans le développement du binome $(1 + 1)^{2x}$, moins le premier, ou l'unité. Cette somme est $\frac{1}{2} \cdot (1 + 1)^{2x} + \frac{1}{2} \cdot (1 - 1)^{2x}$; le nombre des cas possibles est donc $2^{2x-1} - 1$; ce qui donne pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2x}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x)^2} - 1}{2^{2x-1} - 1}.$$

Dans le cas où x est un grand nombre, cette probabilité se réduit

par le n° 32 du premier Livre , à $\frac{2}{\sqrt{x\pi}}$, π étant toujours la demi-circonférence dont 1 est le rayon.

6. Considérons un nombre $x + x'$ d'urnes, dont la première renferme p boules blanches et q boules noires; la seconde, p' boules blanches et q' boules noires; la troisième, p'' boules blanches et q'' boules noires, et ainsi de suite. Supposons que l'on tire successivement une boule de chaque urne. Il est clair que le nombre de tous les cas possibles au premier tirage, est $p + q$; au second tirage, chacun des cas du premier pouvant se combiner avec les $p' + q'$ boules de la seconde urne, on aura $(p + q) \cdot (p' + q')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs aux deux premiers tirages. Au troisième tirage, chacun de ces cas peut se combiner avec les $p'' + q''$ boules de la troisième urne; ce qui donne $(p + q) \cdot (p' + q') \cdot (p'' + q'')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs à trois tirages, et ainsi du reste. Ce produit pour la totalité des urnes, sera composé de $x + x'$ facteurs; et la somme de tous les termes de son développement, dans lesquels la lettre p , avec ou sans accent, est répétée x fois, et par conséquent la lettre q , x' fois, exprimera le nombre des cas dans lesquels on peut tirer des urnes, x boules blanches et x' boules noires.

Si $p', p'',$ etc. sont égaux à p , et si $q', q'',$ etc. sont égaux à q ; le produit précédent devient $(p + q)^{x+x'}$. Le terme multiplié par $p^x \cdot q^{x'}$ dans le développement de ce binome est

$$\frac{(x+x') \cdot (x+x'-1) \dots (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x'} \cdot p^x \cdot q^{x'},$$

ou

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x+x')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x'} \cdot p^x \cdot q^{x'}.$$

Ainsi cette quantité exprime le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches et x' boules noires. Le nombre de tous les cas possibles étant $(p + q)^{x+x'}$, la probabilité d'amener x boules blanches et x' boules noires, est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x+x')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x'} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'}.$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q}$ est la probabilité de tirer une boule blanche de l'une des urnes, et que $\frac{q}{p+q}$ est la probabilité d'en tirer une boule noire.

Il est visible qu'il est parfaitement égal de tirer x boules blanches et x' boules noires, de $x+x'$ urnes qui renferment chacune p boules blanches et q boules noires, ou d'une seule de ces urnes, pourvu que l'on remette dans l'urne la boule extraite à chaque tirage.

Considérons maintenant un nombre $x+x'+x''$ d'urnes dont la première renferme p boules blanches, q boules noires, et r boules rouges; dont la seconde renferme p' boules blanches, q' boules noires, et r' boules rouges; et ainsi de suite. Supposons que l'on tire une boule de chacune de ces urnes. Le nombre de tous les cas possibles sera le produit des $x+x'+x''$ facteurs,

$$(p+q+r).(p'+q'+r').(p''+q''+r'').\text{etc.}$$

Le nombre des cas dans lesquels on amènera x boules blanches, x' boules noires, et x'' boules rouges, sera la somme de tous les termes du développement de ce produit, dans lesquels la lettre p sera répétée x fois; la lettre q , x' fois, et la lettre r , x'' fois. Si toutes les lettres accentuées p' , q' , etc., sont égales à leurs correspondantes non-accentuées, le produit précédent se change dans le trinôme $(p+q+r)^{x+x'+x''}$. Le terme de son développement qui a pour facteur $p^x \cdot q^{x'} \cdot r^{x''}$, est

$$\frac{1.2.3\dots(x+x'+x'')}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots x'.1.2.3\dots x''} \cdot p^x \cdot q^{x'} \cdot r^{x''};$$

ainsi le nombre de tous les cas possibles étant $(p+q+r)^{x+x'+x''}$, la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires, et x'' boules rouges, sera

$$\frac{1.2.3\dots(x+x'+x'')}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots x'.1.2.3\dots x''} \cdot \left(\frac{p}{p+q+r}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'} \cdot \left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''}.$$

où l'on doit observer que $\frac{p}{p+q+r}$, $\frac{q}{p+q+r}$, $\frac{r}{p+q+r}$ sont les probabilités respectives de tirer de chaque urne, une boule blanche, une boule noire, et une boule rouge.

On voit généralement que si les urnes renferment chacune le même nombre de couleurs, p étant le nombre des boules de la première couleur ; q celui des boules de la seconde couleur ; r, s , etc., ceux des boules de la troisième, de la quatrième, etc.; $x+x'+x''+x''' + \text{etc.}$ étant le nombre des urnes ; la probabilité d'amener x boules de la première couleur, x' boules de la seconde, x'' boules de la troisième, x''' boules de la quatrième, etc., sera

$$\frac{1.2.3\dots(x+x'+x''+x''' + \text{etc.})}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots x'.1.2.3\dots x''.1.2.3\dots x''' + \text{etc.}} \cdot \left(\frac{p}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^x \\ \times \left(\frac{q}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x'} \cdot \left(\frac{r}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x''} \cdot \left(\frac{s}{p+q+r+s+\text{etc.}}\right)^{x'''} + \text{etc.}$$

7. Déterminons maintenant la probabilité de tirer des urnes précédentes, x boules blanches, avant d'amener soit x' boules noires, soit x'' boules rouges, etc. Il est clair que n exprimant le nombre des couleurs, cela doit arriver au plus tard après $x+x'+x'' + \text{etc.} - n + 1$ tirages. Car lorsque le nombre des boules blanches extraites est égal ou moindre que x , celui des boules noires extraites, moindre que x' , celui des boules rouges extraites, moindre que x'' , etc.; le nombre total des boules extraites, et par conséquent, le nombre des tirages est égal ou moindre que $x+x'+x'' + \text{etc.} - n + 1$; on peut donc ne considérer ici que $x+x'+x'' + \text{etc.} - n + 1$ urnes.

Pour avoir le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches au $(x+i)^{\text{ième}}$ tirage, il faut déterminer tous les cas dans lesquels $x-1$ boules blanches seront sorties au tirage $x+i-1$. Ce nombre est le terme multiplié par p^{x-1} dans le développement du polynome $(p+q+r+\text{etc.})^{x+i-1}$, et ce terme est

$$\frac{1.2.3\dots(x+i-1)}{1.2.3\dots(x-1).1.2.3\dots i} \cdot p^{x-1} \cdot (q+r+\text{etc.})^i.$$

En le combinant avec les p boules blanches de l'urne $x+i$, on aura un produit qu'il faudra encore multiplier par le nombre de tous les cas possibles relatifs aux $x'+x'' + \text{etc.} - n - i + 1$ tirages suivans, et ce nombre est

$$(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x'' + \text{etc.} - n - i + 1};$$

on aura donc

$$\frac{1.2.3\dots(x+i-1)}{1.2.3\dots(x-1).1.2.3\dots i} \cdot p^x \cdot (q+r+\text{etc.})^i \cdot (p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-n-i+1}; \quad (a)$$

pour le nombre des cas dans lesquels l'événement peut arriver précisément au tirage $x+i$. Il faut cependant en exclure les cas dans lesquels q est élevé à la puissance x' , ceux dans lesquels r est élevé à la puissance x'' , etc.; car dans tous ces cas, il est déjà arrivé au tirage $x+i-1$, ou x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc. Ainsi dans le développement du polynome $(q+r+\text{etc.})^i$, il ne faut avoir égard qu'aux termes multipliés par $q^f \cdot r^{f'} \cdot s^{f''} \cdot \text{etc.}$, dans lesquels f est moindre que x' , f' est moindre que x'' , f'' est moindre que x''' , etc. Le terme multiplié par $q^f \cdot r^{f'} \cdot s^{f''} \cdot \text{etc.}$, dans ce développement, est

$$\frac{1.2.3\dots i}{1.2.3\dots f.1.2.3\dots f'.1.2.3\dots f'' \cdot \text{etc.}} \cdot q^f \cdot r^{f'} \cdot s^{f''} \cdot \text{etc.}$$

Tous les termes que l'on doit considérer dans la fonction (a) sont donc représentés par

$$\frac{1.2.3\dots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\dots x-1.1.2.3\dots f.1.2.3\dots f' \cdot \text{etc.}} \cdot p^x \cdot q^f \cdot r^{f'} \cdot \text{etc.} \\ \times (p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-f-f'-\text{etc.}-n+1}; \quad (b)$$

parce que i est égal à $f+f'+\text{etc.}$. Ainsi en donnant dans cette dernière fonction, à f toutes les valeurs entières, depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$; à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, et ainsi de suite, la somme de tous ces termes exprimera le nombre des cas dans lesquels l'événement proposé peut arriver dans $x+x'+\text{etc.}-n+1$ tirages. Il faut diviser cette somme par le nombre de tous les cas possibles, c'est-à-dire par $(p+q+r+\text{etc.})^{x+x'+x''+\text{etc.}-n+1}$. Si l'on désigne par p' la probabilité de tirer une boule blanche d'une quelconque des urnes; par q' celle d'en tirer une boule noire; par r' celle d'en tirer une boule rouge, etc.; on aura

$$p' = \frac{p}{p+q+r+\text{etc.}}, \quad q' = \frac{q}{p+q+r+\text{etc.}}, \quad r' = \frac{r}{p+q+r+\text{etc.}}, \quad \text{etc.};$$

la fonction (b) divisée par $(p + q + r + \text{etc.})^{x+x'+\text{etc.}-n+1}$, deviendra ainsi,

$$\frac{1.2.3\dots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\dots x-1.1.2.3\dots f.1.2.3\dots f'.\text{etc.}} \cdot p'^x \cdot q'^f \cdot r'^{f'} \cdot \text{etc.}$$

La somme des termes que l'on obtiendra en donnant à f toutes les valeurs depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$; à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, etc., sera la probabilité cherchée d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc.

On peut, d'après cette analyse, déterminer le sort d'un nombre n de joueurs A, B, C , etc., dont p', q', r' , etc. représentent les adresses respectives, c'est-à-dire, leurs probabilités de gagner un coup, lorsque pour gagner la partie, il manque x coups au joueur A , x' coups au joueur B , x'' coups au joueur C , et ainsi de suite; car il est clair que relativement au joueur A , cela revient à déterminer la probabilité d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, etc.; en tirant successivement une boule d'un nombre $x + x' + x'' + \text{etc.} - n + 1$ d'urnes qui renferment chacune p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, etc., p, q, r , etc. étant respectivement égaux aux numérateurs des fractions p', q', r' , etc. réduites au même dénominateur.

8. Le problème précédent peut être résolu d'une manière fort simple, par l'analyse des fonctions génératrices. Nommons $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie. Au coup suivant, cette probabilité se change dans $y_{x-1,x',x'',\text{etc.}}$, si A gagne ce coup, et la probabilité pour cela est p' . La même probabilité se change dans $y_{x,x'-1,x'',\text{etc.}}$, si le coup est gagné par le joueur B , et la probabilité pour cela est q' ; elle se change dans $y_{x,x',x''-1,\text{etc.}}$, si le coup est gagné par le joueur C , et la probabilité pour cela est r' , et ainsi de suite; on a donc l'équation aux différences partielles,

$$y_{x,x',x'',\text{etc.}} = p' \cdot y_{x-1,x',x'',\text{etc.}} + q' \cdot y_{x,x'-1,x'',\text{etc.}} + r' \cdot y_{x,x',x''-1,\text{etc.}} + \text{etc.}$$

Soit u une fonction de t, t', t'' , etc., telle que $y_{x,x',x'',\text{etc.}}$, soit le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'} \cdot t''^{x''}$, etc. dans son développement; l'équation

précédente aux différences partielles donnera , en passant des coefficients aux fonctions génératrices ,

$$u = u.(p't + q't' + r't'' + \text{etc.}) ;$$

d'où l'on tire

$$1 = p't + q't' + r't'' + \text{etc.} ;$$

par conséquent ,

$$\frac{1}{t} = \frac{p'}{1 - q't' - r't'' - \text{etc.}} ;$$

ce qui donne

$$\frac{u}{t^x} = \frac{u.p'^x}{(1 - q't' - r't'' - \text{etc.})^x} = u.p'^x \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + x.(q't' + r't'' + \text{etc.}) \\ + \frac{x.(x+1)}{1.2} . (q't' + r't'' + \text{etc.})^2 \\ + \frac{x.(x+1).(x+2)}{1.2.3} . (q't' + r't'' + \text{etc.})^3 \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Maintenant le coefficient de $t^x . t'^{x'} . t''^{x''}$.etc. dans $\frac{u}{t^x}$ est $y_{x, \bar{x}', \bar{x}'', \text{etc.}}$; et le même coefficient dans un terme quelconque du dernier membre de l'équation précédente, tel que $ku.p'^x . t'^{x'} . t''^{x''}$.etc. , est $kp'^x . y_{0, x' - l', x'' - l'', \text{etc.}}$; la quantité $y_{0, x' - l', x'' - l'', \text{etc.}}$ est égale à l'unité, puisqu'alors il ne manque aucun coup au joueur A . De plus, il faut rejeter toutes les valeurs de $y_{0, x' - l', x'' - l'', \text{etc.}}$, dans lesquelles l' est égal ou plus grand que x' , l'' est égal ou plus grand que x'' , et ainsi de suite ; parce que ces termes ne peuvent être donnés par l'équation aux différences partielles, la partie étant finie, lorsque l'un quelconque des joueurs B, C , etc. n'a plus de coups à jouer ; il ne faut donc considérer dans le dernier membre de l'équation précédente, que les puissances de t' moindres que x' , que les puissances de t'' moindres que x'' , etc. L'expression précédente de $\frac{u}{t^x}$ donnera ainsi, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients ,

$$y_{x, \bar{x}', \bar{x}'', \text{etc.}} = p'^x \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + x.(q' + r' + \text{etc.}) \\ + \frac{x.(x+1)}{1.2} . (q' + r' + \text{etc.})^2 \\ + \frac{x.(x+1).(x+2)}{1.2.3} . (q' + r' + \text{etc.})^3 \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} ,$$

pourvu

pourvu que l'on rejette les termes dans lesquels la puissance de q' surpasse $x' - 1$, ceux dans lesquels la puissance de r' surpasse $x'' - 1$, etc. Le second membre de cette équation se développe dans une suite de termes compris dans la formule générale

$$\frac{1.2.3\dots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\dots(x-1).1.2.3\dots f'.1.2.3\dots f'.\text{etc.}} \cdot p'^x \cdot q'^f \cdot r'^{f'} \cdot \text{etc.}$$

La somme de ces termes relatifs à toutes les valeurs de f , depuis f nul jusqu'à $f = x' - 1$; à toutes les valeurs de f' , depuis f' nul jusqu'à $f' = x'' - 1$, etc., sera la probabilité $\gamma_{x,x',x'',\text{etc.}}$; ce qui est conforme à ce qui précède.

Dans le cas de deux joueurs A et B , on aura pour la probabilité du joueur A ,

$$p'^x \cdot \left\{ 1 + x \cdot q' + \frac{x \cdot (x+1)}{1.2} \cdot q'^2 \dots + \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \dots (x+x'-2)}{1.2.3\dots(x'-1)} \cdot q'^{x'-1} \right\}.$$

En changeant p' en q' , et x en x' , et réciproquement, on aura

$$q'^{x'} \cdot \left\{ 1 + x' \cdot p' + \frac{x' \cdot (x'+1)}{1.2} \cdot p'^2 \dots + \frac{x' \cdot (x'+1) \cdot (x'+2) \dots (x+x'-2)}{1.2.3\dots(x-1)} \cdot p'^{x-1} \right\}$$

pour la probabilité que le joueur B gagnera la partie. La somme de ces deux expressions doit être égale à l'unité; ce que l'on voit évidemment en leur donnant les formes suivantes. La première expression peut, par le n° 37 du premier Livre, être transformée dans celle-ci,

$$p'^{x+x'-1} \cdot \left\{ 1 + \frac{(x+x'-1)}{1} \cdot \frac{q'}{p'} + \frac{(x+x'-1) \cdot (x+x'-2)}{1.2} \cdot \frac{q'^2}{p'^2} \dots + \frac{(x+x'-1) \dots (x+1)}{1.2.3\dots(x'-1)} \cdot \frac{q'^{x'-1}}{p'^{x'-1}} \right\};$$

et la seconde peut être transformée dans celle-ci,

$$q'^{x+x'-1} \cdot \left\{ 1 + \frac{(x+x'-1)}{1} \cdot \frac{p'}{q'} + \frac{(x+x'-1) \cdot (x+x'-2)}{1.2} \cdot \frac{p'^2}{q'^2} \dots + \frac{(x+x'-1) \dots (x+1)}{1.2.3\dots(x-1)} \cdot \frac{p'^{x-1}}{q'^{x-1}} \right\}.$$

La somme de ces expressions est le développement du binôme

$(p' + q')^{x+x'-1}$, et par conséquent elle est égale à l'unité; parce que A ou B devant gagner chaque coup, la somme $p' + q'$ de leurs probabilités pour cela, est l'unité.

Le problème que nous venons de résoudre, est celui que l'on nomme *problème des partis* dans l'analyse des hasards. Le chevalier de Meré le proposa à Pascal, avec quelques-autres problèmes sur le jeu des dés. Deux joueurs dont les adresses sont égales, ont mis au jeu la même somme; ils doivent jouer jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné un nombre de fois donné, son adversaire; mais ils conviennent de quitter le jeu, lorsqu'il manque encore x points au premier joueur pour atteindre ce nombre donné, et lorsqu'il manque x' points au second joueur. On demande de quelle manière ils doivent se partager la somme mise au jeu. Tel est le problème que Pascal résolut au moyen de son triangle arithmétique. Il le proposa à Fermat qui en donna la solution par la voie des combinaisons; ce qui occasionna entre ces deux grands géomètres une discussion, à la suite de laquelle Pascal reconnut la bonté de la méthode de Fermat, pour un nombre quelconque de joueurs. Malheureusement nous n'avons qu'une partie de leur correspondance, dans laquelle on voit les premiers élémens de la théorie des probabilités, et leur application à l'un des problèmes les plus curieux de cette théorie.

Le problème proposé par Pascal à Fermat, revient à déterminer les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie; car il est clair que l'enjeu doit être partagé entre les joueurs, proportionnellement à leurs probabilités. Ces probabilités sont les mêmes que celles de deux joueurs A et B , qui doivent atteindre un nombre donné de points, x étant le nombre de ceux qui manquent au joueur A , et x' étant le nombre de ceux qui manquent au joueur B , en imaginant une urne renfermant deux boules dont l'une est blanche et l'autre est noire, toutes deux portant le n° 1, la boule blanche étant pour le joueur A , et la boule noire pour le joueur B . On tire successivement une de ces boules, et on la remet dans l'urne après chaque tirage. En nommant $\gamma_{x,x'}$ la probabilité que le joueur A atteindra le premier, le nombre donné de points, ou, ce qui revient au même, qu'il aura x points avant que B en ait

x' , on aura

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{x-1,x'} + \frac{1}{2} \cdot y_{x,x'-1};$$

car si la boule que l'on extrait est blanche, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x-1,x'}$, et si la boule extraite est noire, $y_{x,x'}$ se change en $y_{x,x'-1}$, et la probabilité de chacun de ces événemens est $\frac{1}{2}$; on a donc l'équation précédente.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ dans cette équation aux différences partielles, est, par le n° 20 du premier Livre,

$$\frac{M}{1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t'};$$

M étant une fonction arbitraire de t' . Pour la déterminer, nous observerons que $y_{0,0}$ ne peut avoir lieu, puisque la partie cesse, lorsque l'une ou l'autre des variables x et x' est nulle; M doit donc avoir pour facteur t' . De plus $y_{0,x'}$ est l'unité, quel que soit x' ; la probabilité du joueur A se changeant alors en certitude: or la fonction génératrice de l'unité, est généralement $\frac{t'^i}{1-t'}$, car les coefficients des puissances de t' dans le développement de cette fonction, sont tous égaux à l'unité; dans le cas présent, $y_{0,x'}$ pouvant avoir lieu lorsque x' est ou 1, ou 2, ou 3, etc.; i doit être égal à l'unité; la fonction génératrice de $y_{0,x'}$ est donc égale à $\frac{t'}{1-t'}$; c'est le coefficient de t^0 dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, ou dans

$$\frac{M}{1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t'};$$

on a donc

$$\frac{M}{1 - \frac{1}{2}t'} = \frac{t'}{1-t'},$$

ce qui donne

$$M = \frac{t' \cdot (1 - \frac{1}{2}t')}{(1-t')};$$

par conséquent la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t' \cdot (1 - \frac{1}{2}t')}{(1-t') \cdot (1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t')}.$$

En la développant par rapport aux puissances de t , on a

$$\frac{t'}{1-t'} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1-\frac{1}{2}t'} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{t^2}{(1-\frac{1}{2}t')^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{t^3}{(1-\frac{1}{2}t')^3} + \text{etc.} \right).$$

Le coefficient de t^x dans cette série, est

$$\frac{1}{2^x} \cdot \frac{t'}{(1-t') \cdot (1-\frac{1}{2}t')^x};$$

$y_{x,x'}$ est donc le coefficient de $t'^{x'}$ dans cette dernière quantité :
or on a

$$\frac{t'}{(1-t') \cdot (1-\frac{1}{2}t')^x} \\ t' + \frac{1}{2} \cdot x \cdot t'^2 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2} \cdot t'^3 \dots + \frac{1}{2^{x'-1}} \cdot \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \dots (x+x'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x'-1)} \cdot t'^{x'} + \text{etc.} \\ \hline 1-t'$$

En réduisant en série le dénominateur de cette dernière fraction, et multipliant le numérateur par cette série, on voit que le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce produit, est ce que devient ce numérateur lorsqu'on y fait $t' = 1$; on a donc

$$y_{x,x'} = \frac{1}{2^x} \cdot \left\{ 1 + x \cdot \frac{1}{2} + \frac{x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} \right. \\ \left. \dots + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+x'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x'-1)} \cdot \frac{1}{2^{x'-1}} \right\};$$

résultat conforme à ce qui précède.

Concevons présentement qu'il y ait dans l'urne une boule blanche portant le n° 1, et deux boules noires, dont une porte le n° 1, et l'autre porte le n° 2; la boule blanche étant favorable à A , et les boules noires à son adversaire : chaque boule diminuant de son numéro, le nombre de points qui manquent au joueur auquel elle est favorable. $y_{x,x'}$ étant toujours la probabilité que le joueur A atteindra le premier le nombre donné, on aura l'équation aux différences partielles

$$y_{x,x'} = \frac{1}{3} \cdot y_{x-1,x'} + \frac{1}{3} \cdot y_{x,x'-1} + \frac{1}{3} \cdot y_{x,x'-2};$$

car au tirage suivant, si la boule blanche sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x-1,x'}$;

si la boule noire numérotée 1 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-1}$; et si la boule noire numérotée 2 sort, $y_{x,x'}$ devient $y_{x,x'-2}$; et la probabilité de chacun de ces événemens est $\frac{1}{3}$.

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{M}{1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2},$$

M étant une fonction arbitraire de t' , qui doit, par ce qui précède, avoir pour facteur t' , et dans le cas présent, être égale à

$$\frac{t'}{1-t'} \cdot (1 - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2);$$

ensorte que la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est

$$\frac{t' \cdot (1 - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2)}{(1-t') \cdot (1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction, est

$$\frac{1}{3^x} \cdot \frac{t'}{1-t'} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}t' - \frac{1}{3}t'^2)^x};$$

et il résulte de ce que nous venons de dire, que le coefficient de $t'^{x'}$ dans le développement de cette dernière quantité, est égal à

$$\frac{1}{3^x} \cdot \left\{ t' + \frac{x \cdot t'^2 \cdot (1+t')}{3} + \frac{x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{t'^3 \cdot (1+t')^2}{3^2} \right. \\ \left. + \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{t'^4 \cdot (1+t')^3}{3^3} + \text{etc.} \right\};$$

en rejetant du développement de cette série, toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et supposant dans ce que l'on conserve, $t' = 1$, ce sera l'expression de $y_{x,x'}$.

Il est facile de traduire ce procédé en formule. Ainsi en supposant x' pair et égal à $2r+2$, on trouve

$$y_{x,x'} = \frac{1}{3^x} \cdot \left\{ 1 + x \cdot \frac{1}{3} + \frac{x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \right\} \\ + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} \cdot \frac{1}{3^{x+r+1}} \cdot \left\{ 1 + (r+1) + \frac{(r+1) \cdot r}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(r+1) \cdot r \dots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \right\} \\ + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+2)} \cdot \frac{1}{3^{x+r+2}} \cdot \left\{ 1 + (r+2) + \dots + \frac{(r+2) \cdot (r+1) \dots 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} \right\} \\ \dots \dots \dots \\ + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+2r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2r+1)} \cdot \frac{1}{3^{x+2r+1}}.$$

Si l'on suppose x' impair et égal à $2r+1$, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{x,x'} = & \frac{1}{3^x} \cdot \left\{ 1 + x \cdot \frac{1}{3} + \frac{x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^r \right\} \\ & + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1) \cdot 3^{x+r+1}} \cdot \left\{ 1 + (r+1) + \frac{(r+1) \cdot r}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(r+1) \cdot r \dots 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} \right\} \\ & + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+2) \cdot 3^{x+r+2}} \cdot \left\{ 1 + (r+2) + \frac{(r+2) \cdot (r+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(r+2) \cdot (r+1) \dots 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-2)} \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{x \cdot (x+1) \dots (x+2r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2r \cdot 3^{x+2r}}. \end{aligned}$$

Ainsi dans le cas de $x=2$ et $x'=5$, on a

$$\mathcal{Y}_{2,5} = \frac{350}{729}.$$

Concevons encore qu'il y ait dans l'urne deux boules blanches distinguées comme les deux boules noires, par les n° 1 et 2; la probabilité du joueur $\mathcal{A}$ sera donnée par l'équation aux différences partielles

$$\mathcal{Y}_{x,x'} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{Y}_{x-1,x'} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{Y}_{x-2,x'} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{Y}_{x,x'-1} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{Y}_{x,x'-2}.$$

La fonction génératrice de $\mathcal{Y}_{x,x'}$ est alors, par le n° 20 du premier Livre,

$$\frac{M + N \cdot t}{1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2};$$

M et N étant deux fonctions arbitraires de t' . Pour les déterminer, on observera que $\mathcal{Y}_{0,x'}$ est toujours égal à l'unité, et qu'il faut exclure dans M la puissance nulle de t' ; on a donc

$$M = \frac{t'}{1-t'}, (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2).$$

Pour déterminer N , cherchons la fonction génératrice de $\mathcal{Y}_{1,x'}$. Si l'on observe que $\mathcal{Y}_{0,x'}$ est égal à l'unité, et que le joueur $\mathcal{A}$ n'ayant plus besoin que d'un point, il gagne la partie, soit qu'il amène la boule blanche numérotée 1, ou la boule blanche numérotée 2; l'équation précédente aux différences partielles donnera

$$\mathcal{Y}_{1,x'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{Y}_{1,x'-1} + \frac{1}{4} \cdot \mathcal{Y}_{1,x'-2}.$$

Supposons $y_{1,x'} = 1 - y'_{x'}$; on aura

$$y'_{x'} = \frac{1}{4} \cdot y'_{x'-1} + \frac{1}{4} \cdot y'_{x'-3}.$$

La fonction génératrice de cette équation est

$$\frac{m + nt'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2},$$

m et n étant deux constantes. Pour les déterminer, on observera que $y_{1,0} = 0$, et que par conséquent $y'_0 = 1$; ce qui donne $m = 1$. La fonction génératrice de $y'_{x'}$ est donc

$$\frac{1 + nt'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2}.$$

On a ensuite évidemment $y_{1,1} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $y'_1 = \frac{1}{2}$; y'_1 est le coefficient de t' dans le développement de la fonction précédente, et ce coefficient est $n + \frac{1}{4}$; on a donc $n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, ou $n = \frac{1}{4}$. La fonction génératrice de l'unité est $\frac{1}{1-t'}$, parce qu'ici toutes les puissances de t' peuvent être admises; on a ainsi

$$\frac{1}{1-t'} = \frac{1 + \frac{1}{4}t'}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t') \cdot (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2)},$$

pour la fonction génératrice de $y_{1,x'}$. Cette même fonction est le coefficient de t dans le développement de la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, fonction qui, par ce qui précède, est

$$\frac{\frac{t'}{1-t'} \cdot (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2) + N \cdot t}{1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'' - \frac{1}{4}t'^2};$$

ce coefficient est

$$\frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t') \cdot (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2)} + \frac{N}{1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2};$$

en l'égalant à

$$\frac{\frac{1}{2}t'}{(1-t') \cdot (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2)};$$

on aura

$$N = \frac{\frac{1}{4}t'}{1-t'}.$$

La fonction génératrice de $y_{x,x'}$ est ainsi

$$\frac{t' \cdot (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2) + \frac{1}{4}tt'}{(1-t') \cdot (1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2)}$$

Si l'on développe en série la fonction

$$\frac{t' \cdot (1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2) + \frac{1}{4}tt'}{1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2} = t';$$

on aura

$$\frac{(2+t) \cdot tt'}{4} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4} \cdot t' \cdot (1+t') + \frac{1}{4^2} \cdot t'^2 \cdot (1+t')^2 + \frac{1}{4^3} \cdot t'^3 \cdot (1+t')^3 + \text{etc.} \\ + \frac{t \cdot (1+t)}{4} \cdot \left[1 + \frac{2}{4} \cdot t' \cdot (1+t') + \frac{3}{4^2} \cdot t'^2 \cdot (1+t')^2 + \frac{4}{4^3} \cdot t'^3 \cdot (1+t')^3 + \text{etc.} \right] \\ + \frac{t^2 \cdot (1+t)^2}{4^2} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot t' \cdot (1+t') + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 4^2} \cdot t'^2 \cdot (1+t')^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^3} \cdot t'^3 \cdot (1+t')^3 + \text{etc.} \right] \\ + \frac{t^3 \cdot (1+t)^3}{4^3} \cdot \left[1 + \frac{4}{4} \cdot t' \cdot (1+t') + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 4^2} \cdot t'^2 \cdot (1+t')^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^3} \cdot t'^3 \cdot (1+t')^3 + \text{etc.} \right] \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Si l'on rejette de cette série, toutes les puissances de t autres que t^x , et toutes les puissances de t' supérieures à $t'^{x'}$, et si dans ce qui reste, on fait $t=1$, $t'=1$, on aura l'expression de $y_{x,x'}$ lorsque x est égal ou plus grand que l'unité : lorsque x est nul, on a $y_{0,x'} = 1$. Il est facile de traduire ce procédé en formule, comme on l'a fait pour le cas précédent.

Nommons $z_{x,x'}$ la probabilité du joueur B ; la fonction génératrice de $z_{x,x'}$ sera ce que devient la fonction génératrice de $y_{x,x'}$ lorsqu'on y change t en t' , et réciproquement; ce qui donne pour cette fonction,

$$\frac{t \cdot (1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^2) + \frac{1}{4}tt'}{(1-t) \cdot (1 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t'^2)}$$

En ajoutant les deux fonctions génératrices, leur somme se réduit à

$$\frac{t}{1-t} + \frac{t'}{1-t'} + \frac{tt'}{(1-t)(1-t')},$$

dans laquelle le coefficient de $t^x \cdot t'^{x'}$ est l'unité; ainsi l'on a

$$y_{x,x'} + z_{x,x'} = 1;$$

ce

ce qui est visible d'ailleurs, puisque la partie doit être nécessairement gagnée par l'un des joueurs.

9. Concevons dans une urne, r boules marquées du n° 1, r boules marquées du n° 2, r boules marquées du n° 3, et ainsi de suite jusqu'au n° n . Ces boules étant bien mêlées dans l'urne, on les tire toutes successivement; on demande la probabilité qu'il sortira au moins une de ces boules, au rang indiqué par son numéro, ou qu'il en sortira au moins deux, ou au moins trois, etc.

Cherchons d'abord la probabilité qu'il en sortira au moins une. Pour cela, nous observerons qu'aucune boule ne peut sortir à son rang, que dans les n premiers tirages; on peut donc ici faire abstraction des tirages suivans; or le nombre total des boules étant rn , le nombre de leurs combinaisons n à n , en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est par ce qui précède,

$$rn.(rn-1).(rn-2)....(rn-n+1);$$

c'est donc le nombre de tous les cas possibles dans les n premiers tirages.

Considérons une des boules marquées du n° 1, et supposons qu'elle sorte à son rang, ou la première. Le nombre des combinaisons des $rn-1$ autres boules prises $n-1$ à $n-1$, sera

$$(rn-1).(rn-2)....(rn-n+1);$$

c'est le nombre des cas relatifs à la supposition que nous venons de faire; et comme cette supposition peut s'appliquer aux r boules marquées du n° 1, on aura

$$r.(rn-1).(rn-2)....(rn-n+1)$$

pour le nombre des cas relatifs à l'hypothèse qu'une des boules marquées du n° 1, sortira à son rang. Le même résultat a lieu pour l'hypothèse qu'une quelconque des $n-1$ autres espèces de boules sortira au rang indiqué par son numéro: en ajoutant donc tous les résultats relatifs à ces diverses hypothèses, on aura

$$nr.(rn-1).(rn-2)....(rn-n+1), \quad (a)$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule au moins sortira à

son rang, pourvu toutefois que l'on en retranche les cas qui sont répétés.

Pour déterminer ces cas, considérons une des boules du n° 1, sortant la première, et une des boules du n° 2, sortant la seconde. Ce cas est compris deux fois dans le nombre précédent; car il est compris une fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotées 1, sortira à son rang, et une seconde fois, dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotée 2, sortira à son rang; et comme cela s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang, on voit qu'il faut retrancher du nombre des cas précédents, le nombre de tous les cas dans lesquels deux boules sortent à leur rang.

Le nombre des combinaisons de deux boules de numéros différens est $\frac{n.(n-1)}{1.2} . r^2$; car le nombre des numéros étant n , leurs combinaisons deux à deux sont au nombre $\frac{n.(n-1)}{1.2}$; et dans chacune de ces combinaisons, on peut combiner les r boules marquées d'un des numéros, avec les r boules marquées de l'autre numéro. Le nombre des combinaisons des $rn-2$ boules restantes, prises $n-2$ à $n-2$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles, est

$$(rn-2).(rn-3).....(rn-n+1);$$

ainsi le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang, est

$$\frac{n.(n-1)}{1.2} . r^2 . (rn-2).(rn-3)....(rn-n+1);$$

en le retranchant du nombre (a), on aura

$$nr.(rn-1).(rn-2)....(rn-n+1) \\ - \frac{n.(n-1)}{1.2} . r^2 . (rn-2).(rn-3)....(rn-n+1); \quad (a')$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sortira à son rang, pourvu que l'on retranche encore de cette fonction, les cas répétés, et qu'on lui ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang. En nommant k ce nombre, il est répété trois fois dans le premier terme de la fonction (a') ; car il peut résulter dans ce terme, des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang. Le nombre k est pareillement compris trois fois dans le second terme de la fonction; car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang; ainsi ce second terme étant affecté du signe —, le nombre k ne se trouve point dans la fonction (a') ; il faut donc le lui ajouter pour qu'elle contienne tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang. Le nombre des combinaisons des n numéros pris trois à trois, est $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$, et comme on peut combiner les r boules d'un des numéros de chaque combinaison, avec les r boules du second numéro, et avec les r boules du troisième numéro, on aura le nombre total des combinaisons dans lesquelles trois boules sortent à leur rang, en multipliant $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} . r^3$, par $(rn-3).(rn-4) \dots (rn-n+1)$, nombre qui exprime celui des combinaisons des $rn-3$ boules restantes, prises $n-3$ à $n-3$, en ayant égard à l'ordre qu'elles observent entre elles. Si l'on ajoute ce produit à la fonction (a') , on aura

$$\begin{aligned} & n.r.(rn-1).(rn-2) \dots (rn-n+1) \\ & - \frac{n.(n-1)}{1.2} . r^2 . (rn-2).(rn-3) \dots (rn-n+1) \\ & + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} . r^3 . (rn-3).(rn-4) \dots (rn-n+1); \quad (a'') \end{aligned}$$

cette fonction exprime le nombre de tous les cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels quatre boules sortent à leur rang. En y appliquant les raisonnemens précédens, on verra qu'il faut encore retrancher de la fonction (a'') , le terme

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} . r^4 . (rn-4).(rn-5) \dots (rn-n+1).$$

En continuant ainsi, on aura pour l'expression du nombre des cas dans lesquels une boule au moins sort à son rang

$$\begin{aligned}
& n.r.(rn-1).(rn-2) \dots (rn-n+1) \\
& - \frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.(rn-2).(rn-3) \dots (rn-n+1) \\
& + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.r^3.(rn-3).(rn-4) \dots (rn-n+1); \quad (A) \\
& - \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.r^4.(rn-4).(rn-5) \dots (rn-n+1) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

la série étant continuée aussi loin qu'elle peut l'être. Dans cette fonction, chaque combinaison n'est point répétée; ainsi la combinaison de s boules sortant à leur rang, ne s'y trouve qu'une fois; car cette combinaison est comprise s fois dans le premier terme de la fonction, puisqu'elle peut résulter de chacune des s boules sortant à son rang; elle est retranchée $\frac{s.(s-1)}{1.2}$ fois dans le second terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons deux à deux des s boules sortant à leur rang; elle est ajoutée $\frac{s.(s-1).(s-2)}{1.2.3}$ fois dans le troisième terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons de s lettres prises trois à trois, et ainsi de suite; elle est donc dans la fonction (A), comprise un nombre de fois égal à

$$s - \frac{s.(s-1)}{1.2} + \frac{s.(s-1).(s-2)}{1.2.3} - \text{etc.};$$

et par conséquent égal à $1 - (1-1)^s$, ou à l'unité. En divisant la fonction (A) par le nombre $rn.(rn-1).(rn-2) \dots (rn-n+1)$ de tous les cas possibles, on aura pour l'expression de la probabilité qu'une boule au moins sortira à son rang,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(n-1).r}{1.2.(rn-1)} + \frac{(n-1).(n-2).r^2}{1.2.3.(rn-1).(rn-2)} \\
- \frac{(n-1).(n-2).(n-3).r^3}{1.2.3.4.(rn-1).(rn-2).(rn-3)} + \text{etc.} \quad (B)
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang. Le nombre des cas dans lesquels s boules sortent à leur rang, est, par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-s+1)}{1.2.3 \dots s}.r^s.(rn-s).(rn-s-1) \dots (rn-n+1), \quad (b)$$

pourvu que l'on retranche de cette fonction, les cas qui sont répétés. Ces cas sont ceux dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang, car ils peuvent résulter dans la fonction, de $s+1$ boules prises s à s ; ces cas sont donc répétés $s+1$ fois dans cette fonction; par conséquent il faut les retrancher s fois. Or le nombre des cas dans lesquels $s+1$ boules sortent à leur rang, est

$$\frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-s)}{1.2.3 \dots (s+1)}. r^{s+1}.(rn-s-1).(rn-s-2) \dots (rn-n+1).$$

En le multipliant par s , et le retranchant de la fonction (b) , on aura

$$\frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-s+1)}{1.2.3 \dots s}. r^s.(rn-s).(rn-s-1) \dots (rn-n+1) \\ \times \left\{ 1 - \frac{s.(n-s).r}{(s+1).(rn-s)} \right\}. \quad (b')$$

Dans cette fonction, plusieurs cas sont encore répétés, savoir, ceux dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang; car ils résultent dans le premier terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang, et prises s à s ; ils résultent dans le second terme, des $s+2$ boules sortant à leur rang, et prises $s+1$ à $s+1$, et de plus multipliés par le facteur s , par lequel on a multiplié le second terme. Ils sont donc compris dans cette fonction, le nombre de fois $\frac{(s+2).(s+1)}{1.2} - s.(s+2)$; ainsi il faut multiplier par l'unité moins ce nombre de fois, le nombre des cas dans lesquels $s+2$ boules sortent à leur rang. Ce dernier nombre est

$$\frac{n.(n-1).(n-2) \dots (n-s-1)}{1.2.3 \dots (s+2)}. r^{s+2}.(rn-s-2).(rn-s-3) \dots (rn-n+1);$$

le produit dont il s'agit sera donc

$$\frac{n.(n-1) \dots (n-s-1)}{1.2.3 \dots (s+2)}. r^{s+2}.(rn-s-2) \dots (rn-n+1). \frac{s.(s+1)}{1.2}.$$

En l'ajoutant à la fonction (b') , on aura

$$\frac{n.(n-1) \dots (n-s+2)}{1.2.3 \dots s}. r^s.(rn-s).(rn-s-1) \dots (rn-n+1) \\ \times \left\{ 1 - \frac{s}{s+1} \cdot \frac{(n-s).r}{rn-s} \right. \\ \left. + \frac{s}{2+s} \cdot \frac{(n-s).(n-s-1).r^2}{1.2.(rn-s).(rn-s-1)} \right\}; \quad (b'')$$

c'est le nombre de tous les cas possibles dans lesquels s boules sortent à leur rang, pourvu que l'on en retranche encore les cas qui sont répétés. En continuant de raisonner ainsi, et divisant la fonction finale par le nombre de tous les cas possibles; on aura pour l'expression de la probabilité que s boules au moins sortiront à leur rang,

$$\frac{(n-1).(n-2)\dots(n-s+1).r^{s-1}}{1.2.3\dots s.(rn-1).(rn-2)\dots(rn-s+1)} \\ \times \left\{ 1 - \frac{s}{s+1} \cdot \frac{(n-s).r}{rn-s} + \frac{s}{s+2} \cdot \frac{(n-s).(n-s-1).r^2}{1.2.(rn-s).(rn-s-1)} \right. \\ \left. - \frac{s}{s+3} \cdot \frac{(n-s).(n-s-1).(n-s-2).r^3}{1.2.3.(rn-s).(rn-s-1).(rn-s-2)} + \text{etc.} \right\} \quad (C)$$

On aura la probabilité qu'aucune des boules ne sortira à son rang, en retranchant la formule (B) de l'unité; et l'on trouvera pour son expression,

$$\frac{[1.2.3\dots rn] - n.r.[1.2.3\dots(rn-1)] + \frac{n.(n-1)}{1.2}.r^2.[1.2.3\dots(rn-2)] - \text{etc.}}{1.2.3\dots rn}.$$

On a, par le n° 33 du premier Livre, quel que soit i ,

$$1.2.3\dots i = \int x^i dx . c^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. L'expression précédente peut donc être mise sous cette forme,

$$\frac{\int x^{rn-n} dx . (x-r)^n . c^{-x}}{\int x^{rn} dx . c^{-x}}. \quad (o)$$

Supposons le nombre rn de boules de l'urne, très-grand; alors en appliquant aux intégrales précédentes, la méthode du n° 24 du premier Livre, on trouvera à très-peu près, pour l'intégrale du numérateur,

$$\frac{\sqrt{2\pi} . X^{rn+2} . \left(1 - \frac{r}{X}\right)^{n+1} . c^{-X}}{\sqrt{n . X^2 + n . (r-1) . (X-r)}},$$

X étant la valeur de x qui rend un *maximum*, la fonction $x^{rn-n} . (x-r)^n . c^{-x}$. L'équation relative à ce *maximum* donne pour X , les deux valeurs

$$X = \frac{rn+r}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 . (n-1)^2 + 4rn}}{2}.$$

On peut ne considérer ici que la plus grande de ces valeurs qui est, aux quantités près, de l'ordre $\frac{1}{rn}$, égale à $rn + \frac{n}{n-1}$; alors l'intégrale du numérateur de la fonction (o) devient à peu près

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot (rn)^{rn + \frac{1}{2}} \cdot e^{-rn} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{(r-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + 1}}.$$

L'intégrale du dénominateur de la même fonction est, par le n° 32, à fort peu près,

$$\sqrt{2\pi} \cdot (rn)^{rn + \frac{1}{2}} \cdot e^{-rn};$$

la fonction (o) devient ainsi

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{(r-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + 1}}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{2}{rn} - \frac{1}{rn^2}}},$$

rn étant supposé un très-grand nombre, cette fonction se réduit à fort peu près à cette forme très-simple,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

C'est donc l'expression fort approchée de la probabilité qu'aucune des boules de l'urne ne sortira à son rang, lorsqu'il y a un grand nombre de boules. Le logarithme hyperbolique de cette expression, étant

$$-1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \text{etc.};$$

on voit qu'elle va toujours en croissant à mesure que n augmente; qu'elle est nulle, lorsque $n=1$, et qu'elle devient $\frac{1}{e}$, lorsque n

est infini, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Concevons maintenant un nombre i d'urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes; et que l'on tire successivement toutes les boules de chaque urne. On peut, par les raisonnemens précédens, déterminer la probabilité qu'une ou plusieurs boules de la même couleur sortiront au même rang dans les i tirages. En effet, supposons que les rangs des couleurs soient réglés d'après le tirage complet de la première urne, et considérons d'abord la première couleur: supposons qu'elle sorte la première dans les tirages des $i-1$ autres urnes. Le nombre total des combinaisons des $n-1$ autres couleurs dans chaque urne est, en ayant égard à leur situation entre elles, $1.2.3\dots(n-1)$; ainsi le nombre total de ces combinaisons relatives aux $i-1$ urnes, est $[1.2.3\dots(n-1)]^{i-1}$; c'est le nombre des cas dans lesquels la première couleur est tirée la première à la fois de toutes ces urnes; et comme il y a n couleurs, on aura

$$n.[1.2.3\dots(n-1)]^{i-1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels une couleur au moins arrivera à son rang dans les tirages des $i-1$ urnes. Mais il y a dans ce nombre, des cas répétés: ainsi les cas où deux couleurs arrivent à leur rang dans ces tirages, sont compris deux fois dans ce nombre; il faut donc les en retrancher. Le nombre de ces cas est, par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1)}{1.2}.[1.2.3\dots(n-2)]^{i-1}:$$

en le retranchant du nombre précédent, on aura la fonction

$$n.[1.2.3\dots(n-1)]^{i-1} - \frac{n.(n-1)}{1.2}.[1.2.3\dots(n-2)]^{i-1}.$$

Mais cette fonction renferme elle-même des cas répétés. En continuant de les exclure, comme on l'a fait ci-dessus relativement à une seule urne; en divisant ensuite la fonction finale, par le nombre de tous les cas possibles, et qui est ici $[1.2.3\dots n]^{i-1}$; on aura pour la probabilité qu'une des $n-1$ couleurs au moins sortira

à

à son rang dans les $i - 1$ tirages qui suivent le premier ,

$$\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{1.2.[n.(n-1)]^{i-1}} + \frac{1}{1.2.3.[n.(n-1).(n-2)]^{i-1}} - \text{etc.},$$

expression dans laquelle il faut prendre autant de termes qu'il y a d'unités dans n . Cette expression est donc la probabilité qu'au moins une des couleurs sortira au même rang dans les tirages des i urnes.

10. Considérons deux joueurs A et B , dont les adresses soient p et q , et dont le premier ait a jetons, et le second, b jetons. Supposons qu'à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsqu'un des joueurs aura perdu tous ses jetons; on demande la probabilité que l'un des joueurs, A par exemple, gagnera la partie, avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup.

Ce problème peut être résolu avec facilité par le procédé suivant qui est en quelque sorte, mécanique. Supposons b égal ou moindre que a , et considérons le développement du binome $(p+q)^b$. Le premier terme p^b de ce développement sera la probabilité de A pour gagner la partie au coup b . On retranchera ce terme, du développement, et l'on en retranchera pareillement le dernier terme q^b , si $b = a$; parce qu'alors ce terme exprime la probabilité de B pour gagner la partie au coup b . Ensuite on multipliera le reste par $p+q$. Le premier terme de ce produit aura pour facteur $p^b.q$, et comme l'exposant b ne surpasse que de $b - 1$ l'exposant de q , il en résulte que la partie ne peut pas être gagnée par le joueur A , au coup $b + 1$, ce qui est visible d'ailleurs; car si A a perdu un jeton dans les b premiers coups, il doit, pour gagner la partie gagner ce jeton plus les b jetons du joueur B , ce qui exige $b + 2$ coups. Mais si $a = b + 1$, on retranchera du produit, son dernier terme qui exprime la probabilité du joueur B pour gagner la partie au coup $b + 1$.

On multipliera de nouveau ce second reste, par $p+q$. Le premier terme du produit aura pour facteur $p^{b+1}.q$, et comme l'exposant de p y surpasse de b celui de q , ce terme exprimera la probabilité de A pour gagner la partie au coup $b + 2$. On retran-

chera pareillement du produit, le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a celui de p .

On multipliera de nouveau ce troisième reste, par $p + q$, et l'on continuera ces multiplications jusqu'au nombre de fois $n - b$, en retranchant à chaque multiplication, le premier terme, si l'exposant de p y surpasse de b , celui de q , et le dernier terme, si l'exposant de q y surpasse de a , celui de p . Cela posé, la somme des premiers termes ainsi retranchés, sera la probabilité de A pour gagner la partie, avant ou au coup n ; et la somme des derniers termes retranchés sera la probabilité semblable relative au joueur B .

Pour avoir une solution analytique du problème, soit $y_{x,x'}$ la probabilité du joueur A pour gagner la partie, lorsqu'il a x jetons, et lorsqu'il n'a plus que x' coups à jouer pour atteindre les n coups. Cette probabilité devient au coup suivant, ou $y_{x+1,x'-1}$, ou $y_{x-1,x'+1}$, suivant que le joueur A gagne ou perd le coup; or les probabilités respectives de ces deux événemens sont p et q ; on a donc l'équation aux différences partielles,

$$y_{x,x'} = p \cdot y_{x+1,x'-1} + q \cdot y_{x-1,x'+1}.$$

Pour intégrer cette équation, nous considérerons, comme précédemment, une fonction u de t et de t' génératrice de $y_{x,x'}$, ensorte que $y_{x,x'}$ soit le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de cette fonction. En repassant des coefficients, aux fonctions génératrices, l'équation précédente donnera

$$u = u \cdot \left(\frac{pt'}{t} + qtt' \right);$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{pt'}{t} + qtt';$$

par conséquent

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2pt'} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}{2p};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{(2p)^x} \cdot \left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right);$$

donc

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = \frac{u}{(2p)^x \cdot t'^{x'}} \cdot \left(\frac{1}{t'} \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x.$$

Cette équation peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} = \frac{u}{2 \cdot (2p)^x \cdot t'^{x'}} \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \cdot \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}} \end{aligned} \right\}.$$

L'expression précédente de $\frac{1}{t'}$, donne

$$\pm \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} = \frac{2p}{t} - \frac{1}{t'};$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{u}{t^x \cdot t'^{x'}} &= \frac{u}{2 \cdot (2p)^x \cdot t'^{x'}} \cdot \left[\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x + \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x \right] \\ &+ \frac{u \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2pt'} \right)}{2 \cdot (2p)^{x-1} \cdot t'^{x'}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq} \right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}. \end{aligned}$$

sous cette forme, l'ambiguïté du signe $\pm$ disparaît.

Maintenant si l'on repasse des fonctions génératrices à leurs coefficients, et si l'on observe que $y_{0,x'}$ est nul, parce que le joueur A perd nécessairement la partie, lorsqu'il n'a plus de jetons; l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\begin{aligned} y_{x,x'} &= \frac{1}{2^x \cdot p^{x-1}} \\ &\times [X^{(x-1)} \cdot y_{1,x+x'-1} + X^{(x-3)} y_{1,x+x'-3} \dots + X^{(x-2r-1)} y_{1,x+x'-2r-1} + \text{etc.}], \end{aligned}$$

la série du second membre s'arrêtant lorsque $x - 2r - 1$ a une valeur négative. $X^{(x-1)}$, $X^{(x-3)}$, etc., sont les coefficients de $\frac{1}{t'^{x-1}}$,

$\frac{1}{t'^{x-1}}$, etc., dans le développement de la fonction

$$\frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^x}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}}. \quad (i)$$

Si l'on nomme u' le coefficient de t^x dans le développement de u , u' sera une fonction de t' et de x , génératrice de $y_{x,x'}$. Si l'on nomme pareillement T' le coefficient de t dans le développement de u , le produit de $\frac{T'}{2^x \cdot p^{x-1}}$ par la fonction (i), sera la fonction génératrice du second membre de l'équation précédente; cette fonction est donc égale à u' . Supposons $x = a + b$, alors $y_{x,x'}$ devient $y_{a+b,x'}$, et cette quantité est égale à l'unité; car il est certain que A a gagné la partie, lorsqu'il a gagné tous les jetons de B ; u' est donc alors la fonction génératrice de l'unité; or x' est ici zéro ou un nombre pair, car le nombre des coups dans lesquels A peut gagner la partie, est égal à b plus un nombre pair: en effet, A doit pour cela gagner tous les jetons de B , et de plus il doit regagner chaque jeton qu'il a perdu, ce qui exige deux coups. Ensuite n exprimant un nombre de coups dans lequel A peut gagner la partie, il est égal à b plus un nombre pair; x' étant le nombre des coups qui manquent au joueur A pour arriver à n , est donc zéro ou un nombre pair. De là il suit que dans le cas de $x = a + b$, u' devient $\frac{1}{1-t'^2}$; on a donc

$$\frac{T'}{2^{a+b} \cdot p^{a+b-1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{t'} + \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^{a+b} - \left(\frac{1}{t'} - \sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}\right)^{a+b}}{\sqrt{\frac{1}{t'^2} - 4pq}} = \frac{1}{1-t'^2};$$

ce qui donne la valeur de T' . En la multipliant par la fonction (i) divisée par $2^a \cdot p^{a-1}$, et dans laquelle on fait $x = a$, on aura la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ égale à

$$\frac{2^b \cdot p^b \cdot t'^b \cdot [(1 + \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^a - (1 - \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^a]}{(1 - t'^2) \cdot [(1 + \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^{a+b} - (1 - \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^{a+b}]}. \quad (o)$$

Dans le cas de $\alpha = b$, elle devient

$$\frac{2^a \cdot p^a \cdot t'^a}{(1-t'^2) \cdot [(1 + \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a + (1 - \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a]}.$$

En développant la fonction

$$(1 + \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a + (1 - \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a, \quad (q)$$

suivant les puissances de t'^2 ; le radical disparaît, et le plus haut exposant de t' dans ce développement, est égal ou plus petit que a . Mais si l'on développe $(1 - \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a$ suivant les puissances de t'^2 , le plus petit exposant de t' sera $2a$; la fonction (q) est donc égale au développement de $(1 + \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a$, en rejetant les puissances de t' supérieures à a .

Maintenant on a, par le n° 3 du premier Livre,

$$z^a = 1 - a \cdot \alpha + \frac{a \cdot (a-3)}{1 \cdot 2} \cdot \alpha^2 - \frac{a \cdot (a-4) \cdot (a-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \alpha^3 + \text{etc.},$$

z étant celle des racines de l'équation

$$z = 1 - \frac{\alpha}{z},$$

qui se réduit à l'unité, lorsque α est nul. Cette racine est

$$\frac{1 + \sqrt{1-4\alpha}}{2};$$

en supposant donc $\alpha = pq \cdot t'^2$, on aura

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a \\ = & 2^a \cdot \left\{ 1 - a \cdot pq \cdot t'^2 + \frac{a \cdot (a-3)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 q^2 \cdot t'^4 - \frac{a \cdot (a-4) \cdot (a-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot p^3 q^3 \cdot t'^6 + \text{etc.} \right\}; \end{aligned}$$

on aura ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{2^a \cdot p^a \cdot t'^a}{(1 + \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a + (1 - \sqrt{1-4pq \cdot t'^2})^a} \\ = & \frac{p^a \cdot t'^a}{1 - a \cdot pq \cdot t'^2 + \frac{a \cdot (a-3)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 q^2 \cdot t'^4 - \frac{a \cdot (a-4) \cdot (a-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot p^3 q^3 \cdot t'^6 + \text{etc.}}, \end{aligned}$$

la série du dénominateur étant continuée exclusivement jusqu'aux puissances de t' supérieures à a . Ce second membre doit être, par ce qui précède, divisé par $1 - t'^a$, pour avoir la fonction génératrice de $y_{a,x'}$; la quantité $y_{a,x'}$ est donc la somme des coefficients des puissances de t' , en ne considérant dans le développement de ce membre, par rapport aux puissances de t' , que les puissances égales ou inférieures à x' . Chacun de ces coefficients exprimera la probabilité que A gagnera la partie au coup indiqué par l'exposant de la puissance de t' .

Si l'on nomme z_i le coefficient correspondant à t'^{a+2i} , on aura généralement

$$0 = z_i - a.pq.z_{i-1} + \frac{a.(a-3)}{1.2}.p^2q^2.z_{i-2} - \text{etc.};$$

d'où il est facile de conclure les valeurs de z_1, z_2 , etc., en observant que z_{-1}, z_{-2} , etc. sont nuls, et que $z_0 = p^a$. La valeur de z_i étant égale à $y_{a,a+2i}$, on aura celles de $y_{a,a}, y_{a,a+2}, y_{a,a+4}$, etc. L'équation aux différences partielles à laquelle on est immédiatement conduit, se trouve ainsi ramenée à une équation aux différences ordinaires qui détermine, en l'intégrant, la valeur de $y_{a,x'}$. Mais on peut obtenir cette valeur par le procédé suivant qui s'applique au cas général où a et b sont égaux ou différens entre eux.

Reprenons la fonction génératrice de $y_{a,x'}$ trouvée ci-dessus; $y_{a,x'}$ est le coefficient de $t'^{x'-b}$ dans le développement de la fonction

$$2^b.p^b \cdot \frac{P}{Q.(1-t'^2)},$$

en supposant

$$P = \frac{(1 + \sqrt{1 - 4pq.t'^2})^a - (1 - \sqrt{1 - 4pq.t'^2})^a}{\sqrt{1 - 4pq.t'^2}},$$

$$Q = \frac{(1 + \sqrt{1 - 4pq.t'^2})^{a+b} - (1 - \sqrt{1 - 4pq.t'^2})^{a+b}}{\sqrt{1 - 4pq.t'^2}}.$$

Il résulte du n° 5 du premier Livre, que si l'on considère les deux termes

$$\frac{P}{2t'^{2i}.Q}, \quad - \frac{P}{(1-t'^2).t'^{2i+1} \cdot \frac{dQ}{dt'}};$$

que l'on fasse ensuite successivement $t' = 1$ et $t' = -1$ dans le premier terme, et t' égal successivement à toutes les racines de l'équation $Q = 0$, dans le second terme; la somme de tous les termes que l'on obtient de cette manière, sera le coefficient de t'^{2i} , dans le développement de la fraction

$$\frac{P}{Q \cdot (1 - t'^2)}.$$

Ce que le premier terme produit dans cette somme est

$$\frac{p^a - q^a}{2^b \cdot (p^{a+b} - q^{a+b})}.$$

Pour avoir les racines de l'équation $Q = 0$, nous ferons

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{pq} \cdot \cos \varpi};$$

ce qui donne

$$Q = \frac{(\cos \varpi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varpi)^{a+b} - (\cos \varpi - \sqrt{-1} \cdot \sin \varpi)^{a+b}}{\sqrt{-1} \cdot \sin \varpi \cdot (\cos \varpi)^{a+b-1}},$$

ou

$$Q = \frac{2 \cdot \sin(a+b) \cdot \varpi}{\sin \varpi \cdot (\cos \varpi)^{a+b-1}}.$$

Les racines de l'équation $Q = 0$ sont donc représentées par

$$\varpi = \frac{(r+1) \cdot \pi}{a+b},$$

r étant un nombre entier positif qui peut s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a + b - 2$. Lorsque $a + b$ est un nombre pair, $\frac{1}{2}\pi$ est une des valeurs de ϖ ; il faut l'exclure, parce que $\cos \varpi$ devenant nul alors, cette valeur de ϖ ne rend pas Q nul. Dans ce cas, l'équation $Q = 0$ n'a que $a + b - 2$ racines; mais comme le terme dépendant de la valeur $\varpi = \frac{1}{2}\pi$, est multiplié dans l'expression de $y_{a,x'}$, par une puissance positive de $\cos \frac{(r+1) \cdot \pi}{a+b}$, on peut conserver la valeur de r qui donne $\varpi = \frac{1}{2}\pi$, puisque le terme qui lui correspond dans l'expression de $y_{a,x'}$ disparaît.

Maintenant on a

$$\frac{dQ}{dt'} = \left(\frac{dQ}{d\varpi} \right) \cdot \frac{d\varpi}{dt'};$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation $\sin(a+b).\varpi=0$,

$$\frac{dQ}{dt'} = \frac{4.(a+b).\sqrt{pq}.\cos(r+1).\pi}{\sin^2\varpi.(\cos\varpi)^{a+b-3}} = \frac{4.(a+b).\sqrt{pq}.(-1)^{r+1}}{\sin^2\varpi.(\cos\varpi)^{a+b-3}},$$

le terme

$$\frac{-P}{(1-t'^2).t'^{2i+1}.\frac{dQ}{dt'}}$$

devient ainsi, en observant que

$$P = \frac{2.\sin a\varpi}{\sin\varpi(\cos\varpi)^{a-1}},$$

$$\frac{(-1)^{r+1}.2^{2i+2}.(pq)^{i+1}.\sin\frac{(r+1).\pi}{a+b}.\sin\frac{(r+1).a\pi}{a+b}.\left(\cos\frac{(r+1).\pi}{a+b}\right)^{b+2i+1}}{(a+b).\left(p^2-2pq.\cos\frac{2.(r+1).\pi}{a+b}+q^2\right)}; \quad (h)$$

la somme de tous les termes que l'on obtient, en donnant à r toutes les valeurs entières et positives, depuis $r=0$ jusqu'à $r=a+b-2$, sera ce que produit la fonction

$$\frac{-P}{(1-t'^2).t'^{2i+1}.\frac{dQ}{dt'}} :$$

nous désignerons cette somme par la caractéristique S placée devant la fonction (h) .

Si l'on fait $r'+1=a+b-(r+1)$, on aura

$$\begin{aligned}\sin\frac{(r'+1).\pi}{a+b} &= \sin\frac{(r+1).\pi}{a+b}, \\ \cos\frac{(r'+1).\pi}{a+b} &= -\cos\frac{(r+1).\pi}{a+b}, \\ \cos\frac{2.(r'+1).\pi}{a+b} &= \cos\frac{2.(r+1).\pi}{a+b}, \\ \sin\frac{(r'+1).a\pi}{a+b} &= (-1)^{a+1}.\sin\frac{(r+1).a\pi}{a+b}.\end{aligned}$$

De là il est facile de conclure que dans la fonction (h) , le terme relatif à $r+1$ est le même que le terme relatif à $r'+1$; on peut donc doubler ce terme, et n'étendre alors la caractéristique S qu'aux valeurs de r comprises depuis $r=0$ jusqu'à $r=\frac{a+b-2}{2}$,

si

si $a + b$ est pair, ou $r = \frac{a+b-1}{2}$, si $a + b$ est impair. Cela posé, on aura en observant que

$$\begin{aligned} \sin \frac{(r+1).a\pi}{a+b} &= (-1)^r \cdot \sin \frac{(r+1).b\pi}{a+b}, \\ \mathcal{Y}_{a,b+2i} &= \frac{p^b \cdot (p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}} - \frac{2^{b+2i+2} \cdot p^b \cdot (pq)^{i+1}}{a+b} \\ &\times S. \left\{ \frac{\sin \frac{2(r+1).\pi}{a+b} \cdot \sin \frac{(r+1).b\pi}{a+b} \cdot \left(\cos \frac{(r+1).\pi}{a+b} \right)^{b+2i}}{p^2 - 2pq \cdot \cos \frac{2(r+1).\pi}{a+b} + q^2} \right\}. \quad (\text{H}) \end{aligned}$$

En changeant a en b , p en q , et réciproquement, on aura la probabilité que le joueur B gagnera la partie avant le coup $a + 2i$, ou à ce coup.

Supposons $a = b$; $\sin \frac{(r+1).a\pi}{a+b}$ deviendra $\sin \frac{1}{2} \cdot (r+1) \cdot \pi$. Ce sinus est nul, lorsque $r+1$ est pair; il suffit donc alors de considérer dans l'expression de $\mathcal{Y}_{a,a+2i}$, les valeurs impaires de $r+1$. En les exprimant par $2s+1$, et observant que $\sin \frac{(2s+1).\pi}{2} = (-1)^s$, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{a,a+2i} &= \frac{p^a}{p^a + q^a} - \frac{2^{a+2i+1} \cdot p^a \cdot (pq)^{i+1}}{a} \\ &\times S. \left\{ \frac{(-1)^s \cdot \sin \frac{(2s+1).\pi}{a} \cdot \left(\cos \frac{(2s+1).\pi}{2a} \right)^{a+2i}}{p^2 - 2pq \cdot \cos \frac{(2s+1).\pi}{a} + q^2} \right\}, \end{aligned}$$

$2s+1$ devant comprendre toutes les valeurs impaires contenues dans $a-1$.

Si l'on change dans cette expression, p en q , et réciproquement, on aura la probabilité du joueur B pour gagner la partie en $a+2i$ coups. La somme de ces deux probabilités sera la probabilité que la partie sera finie après ce nombre de coups; cette dernière probabilité est donc

$$1 - \frac{2^{a+2i+1}}{a} \cdot (p^a + q^a) \cdot (pq)^{i+1} \cdot S. \left\{ \frac{(-1)^s \cdot \sin \frac{(2s+1).\pi}{a} \cdot \left(\cos \frac{(2s+1).\pi}{2a} \right)^{a+2i}}{p^2 - 2pq \cdot \cos \frac{(2s+1).\pi}{a} + q^2} \right\},$$

Si les adresses p et q sont égales, cette expression devient

$$1 - \frac{2}{a} \cdot S \cdot \left\{ \frac{(-1)^s \cdot \left(\cos \frac{(2s+1) \cdot \pi}{2a} \right)^{a+2i+1}}{\sin \frac{(2s+1) \cdot \pi}{2a}} \right\}.$$

Lorsque $a + 2i$ est un grand nombre, on peut en conclure d'une manière fort approchée, le nombre de coups nécessaire pour que la probabilité que la partie finira dans ce nombre de coups, soit égale à une fraction donnée $\frac{1}{k}$. On aura alors

$$\frac{2}{a} \cdot S \cdot \left\{ \frac{(-1)^s \cdot \left(\cos \frac{(2s+1) \cdot \pi}{2a} \right)^{a+2i+1}}{\sin \frac{(2s+1) \cdot \pi}{2a}} \right\} = \frac{k-1}{k},$$

$a + 2i$ étant supposé un très-grand nombre fort supérieur au nombre a , il suffit de considérer le terme du premier membre qui correspond à s nul, et alors on a

$$a + 2i + 1 = \frac{\log \left(\frac{a \cdot (k-1)}{2k} \cdot \sin \frac{\pi}{2a} \right)}{\log \left(\cos \frac{\pi}{2a} \right)},$$

ces logarithmes pouvant être à volonté hyperboliques ou tabulaires.

Si dans les formules précédentes, on suppose a infini, b restant un nombre fini; on aura le cas dans lequel le joueur A joue contre le joueur B qui a primitivement le nombre b de jetons, jusqu'à ce qu'il ait gagné tous les jetons de B , sans que jamais celui-ci puisse gagner A , quel que soit le nombre des jetons qu'il lui gagne. Dans ce cas, la fonction génératrice (o) de $\mathcal{J}_{a,x'}$ se réduit à

$$\frac{2^b \cdot p^b \cdot t'^b}{(1 - t'^2) \cdot (1 + \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^b};$$

car alors $(1 - \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^a$ et $(1 + \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^{a+b}$ développés, ne renferment que des puissances infinies de t' , puissances que l'on doit négliger, quand on ne considère qu'un nombre fini

de coups. On a par ce qui précède

$$(1 + \sqrt{1 - 4pq \cdot t'^2})^{-b} \\ = \frac{1}{2^b} \cdot \left\{ 1 + b \cdot pq \cdot t'^2 + \frac{b \cdot (b+3)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 q^2 \cdot t'^4 + \frac{b \cdot (b+4) \cdot (b+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot p^3 q^3 \cdot t'^6 \right. \\ \left. \dots + \frac{b \cdot (b+i+1) \cdot (b+i+2) \dots (b+2i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} p^i q^i \cdot t'^{2i} + \text{etc.} \right\}.$$

En multipliant ce second membre par $\frac{2^b \cdot p^b \cdot t'^b}{1 - t'^2}$, le coefficient de t'^{b+2i} sera

$$p^b \cdot \left\{ 1 + b \cdot pq + \frac{b \cdot (b+3)}{1 \cdot 2} \cdot p^2 q^2 \dots + \frac{b \cdot (b+i+1) \cdot (b+i+2) \dots (b+2i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \cdot p^i q^i \right\};$$

c'est la valeur de $y_{a, b+2i}$, ou la probabilité que $\mathcal{A}$ gagnera la partie avant ou au coup $b+2i$.

Cette valeur serait très-pénible à réduire en nombres, si b et $2i$ étaient de grands nombres; il serait surtout très-difficile d'obtenir par son moyen, le nombre de coups dans lesquels $\mathcal{A}$ peut parier un contre un de gagner la partie; mais on peut y parvenir facilement de cette manière.

Reprenons la formule (H) trouvée ci-dessus. Dans le cas de a infini, et p étant supposé égal ou plus grand que q , si l'on y suppose $\frac{(r+1)}{a} \cdot \pi = \phi$, et $\frac{\pi}{a} = d\phi$, elle devient

$$y_{a, b+2i} = 1 - \frac{2^{b+2i+2} \cdot p^b \cdot (pq)^{i+1}}{\pi} \cdot \int \frac{d\phi \cdot \sin 2\phi \cdot \sin b\phi \cdot (\cos \phi)^{b+2i}}{p^2 - 2pq \cdot \cos 2\phi + q^2},$$

l'intégrale devant être prise depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = \frac{1}{2}\pi$. Dans le cas de p moindre que q , la même expression a lieu, pourvu que l'on change le premier terme 1, dans $\frac{p^b}{q^b}$.

Si $p = q$, cette expression devient

$$1 - \frac{2}{\pi} \cdot \int \frac{d\phi \cdot \sin b\phi \cdot (\cos \phi)^{b+2i+1}}{\sin \phi},$$

l'intégrale étant prise depuis ϕ nul jusqu'à $\phi = \frac{1}{2}\pi$. Supposons maintenant que b et i soient de grands nombres. Le *maximum* de la fonction

$$\frac{\phi \cdot (\cos \phi)^{b+2i+1}}{\sin \phi}$$

répond à $\varphi = 0$; ce qui donne 1 pour ce *maximum*. La fonction décroît ensuite avec une extrême rapidité, et dans l'intervalle où elle a une valeur sensible, on peut supposer

$$\begin{aligned}\log \sin \varphi &= \log \varphi + \log \left(1 - \frac{1}{6} \varphi^2\right) = \log \varphi - \frac{1}{6} \cdot \varphi^2, \\ \log (\cos \varphi)^{b+2i+1} &= (b+2i+1) \cdot \log \left(1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{24} \varphi^4\right) \\ &= -\frac{(b+2i+1)}{2} \cdot \varphi^2 - \frac{(b+2i+1)}{12} \cdot \varphi^4,\end{aligned}$$

ce qui donne, en négligeant les sixièmes puissances de φ , et ses quatrièmes puissances qui ne sont pas multipliées par $b+2i+1$,

$$\log \left(\frac{(\cos \varphi)^{b+2i+1}}{\sin \varphi} \right) = -\log \varphi - \frac{(b+2i+\frac{2}{3})}{2} \cdot \varphi^2 - \frac{(b+2i+\frac{2}{3})}{12} \cdot \varphi^4;$$

en faisant donc

$$a^2 = \frac{b+2i+\frac{2}{3}}{2};$$

on aura

$$\frac{(\cos \varphi)^{b+2i+1}}{\sin \varphi} = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{6} \cdot \varphi^4\right)}{\varphi} \cdot e^{-a^2 \varphi^2};$$

partant,

$$\int \frac{d\varphi \cdot \sin b\varphi \cdot (\cos \varphi)^{b+2i+1}}{\sin \varphi} = \int \frac{d\varphi \cdot \left(1 - \frac{a^2}{6} \cdot \varphi^4\right)}{\varphi} \cdot \sin b\varphi \cdot e^{-a^2 \varphi^2}.$$

Cette dernière intégrale peut être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à φ infini; car elle doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; or a^2 étant un nombre considérable, $e^{-a^2 \varphi^2}$ devient excessivement petit, lorsqu'on y fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, ensorte qu'on peut le supposer nul, vu l'extrême rapidité avec laquelle cette exponentielle diminue, lorsque φ augmente. Maintenant on a

$$\frac{d}{db} \cdot \int \frac{d\varphi \cdot \left(1 - \frac{a^2}{6} \cdot \varphi^4\right)}{\varphi} \cdot \sin b\varphi \cdot e^{-a^2 \varphi^2} = \int d\varphi \cdot \left(1 - \frac{a^2}{6} \cdot \varphi^4\right) \cdot \cos b\varphi \cdot e^{-a^2 \varphi^2};$$

on a d'ailleurs par le n° 26 du premier Livre,

$$\begin{aligned} \int d\phi \cdot \cos b\phi \cdot c^{-a^2\phi^2} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot c^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \\ \int \phi^4 \cdot d\phi \cdot \cos b\phi \cdot c^{-a^2\phi^2} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \frac{d^4 c^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{db^4} \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{\pi}}{8a^5} \cdot c^{-\frac{b^2}{4a^2}} \cdot \left(1 - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^4}{12 \cdot a^4}\right); \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en supposant

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4a^2} &= t^2, \\ \frac{\int d\phi \cdot \sin b\phi \cdot (\cos \phi)^{b+2i+1}}{\sin \phi} &= \sqrt{\pi} \cdot \left\{ \int dt \cdot c^{-t^2} - \frac{t \cdot c^{-t^2}}{8a^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} t^2\right) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi la probabilité que *A* gagnera la partie dans le nombre $b+2i$ de coups, est

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int dt \cdot c^{-t^2} - \frac{T \cdot c^{-T^2}}{8a^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} T^2\right) \right],$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à $t=T$, T^2 étant égal à $\frac{b^2}{4a^2}$.

Si l'on cherche le nombre des coups dans lesquels on peut parier un contre un que cela aura lieu, on fera cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\int dt \cdot c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{T \cdot c^{-T^2}}{8a^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} T^2\right).$$

Nommons T' la valeur de t , qui correspond à

$$\int dt \cdot c^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$$

et supposons

$$T = T' + q,$$

q étant de l'ordre $\frac{1}{a^2}$. L'intégrale $\int dt \cdot c^{-t^2}$ sera augmentée à très-

peu près de $q \cdot c^{-T'}$; ce qui donne

$$q \cdot c^{-T'} = \frac{T' \cdot c^{-T'}}{8a^2} \cdot (1 - \frac{2}{3} T'^2);$$

on aura donc

$$T^2 = T'^2 + \frac{T'^2}{4a^2} \cdot (1 - \frac{2}{3} T'^2).$$

Ayant ainsi T^2 aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^4}$, l'équation

$$2a^2 = b + 2i + \frac{2}{3} = \frac{b^2}{2T^2}$$

donnera, aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{a^2}$,

$$b + 2i = \frac{b^2}{2T'^2} - \frac{7}{6} + \frac{2}{3} T'^2.$$

Pour déterminer la valeur de T'^2 , nous observerons qu'ici T' est plus petit que $\frac{1}{2}$; ainsi l'équation transcendante et intégrale

$$\int dt \cdot c^{-t} = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

peut être transformée dans la suivante,

$$T' - \frac{1}{3} \cdot T'^3 + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{5} \cdot T'^5 - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{7} \cdot T'^7 + \text{etc.} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

En résolvant cette équation, on trouve

$$T'^2 = 0,2102497.$$

En supposant $b = 100$, on aura

$$b + 2i = 23780,14.$$

Il y a donc alors du désavantage à parier un contre un, que A gagnera la partie dans 23780 coups, mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups.

11. Un nombre $n + 1$ de joueurs jouent ensemble aux conditions suivantes. Deux d'entre eux jouent d'abord, et celui qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour n'y rentrer qu'après

que tous les autres joueurs ont joué ; ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui perdent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux premiers joueurs qui a gagné, joue avec le troisième, et s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier cas, la partie est finie. Mais si le joueur gagnant au premier coup, est vaincu par l'un des autres joueurs, le vainqueur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jusqu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné de suite tous les joueurs ; le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'il y ait un joueur qui gagne de suite tous les autres, ce qui finit la partie, et alors le joueur qui la gagne, emporte tout ce qui a été mis au jeu. Cela posé,

Déterminons d'abord la probabilité que le jeu finira précisément au coup x ; nommons z_x cette probabilité. Pour que la partie finisse au coup x , il faut que le joueur qui entre au jeu au coup $x - n + 1$, gagne ce coup et les $n - 1$ coups suivans ; or il peut entrer contre un joueur qui n'a gagné qu'un seul coup : en nommant P la probabilité de cet événement, $\frac{P}{2^n}$ sera la probabilité correspondante que la partie finira au coup x . Mais la probabilité z_{x-1} , que la partie finira au coup $x - 1$, est évidemment $\frac{P}{2^{n-1}}$. Car il est nécessaire pour cela qu'il y ait un joueur qui ait gagné un coup, au coup $x - n + 1$, et qui jouant à ce coup, le gagne et les $n - 2$ coups suivans ; et la probabilité de chacun de ces événemens étant P et $\frac{1}{2^{n-1}}$, la probabilité de l'événement composé sera $\frac{P}{2^{n-1}}$; on aura donc $z_{x-1} = \frac{P}{2^{n-1}}$, et par conséquent,

$$\frac{P}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot z_{x-1} ;$$

$\frac{1}{2} \cdot z_{x-1}$, est donc la probabilité que la partie finira au coup x , relative à ce cas.

Si le joueur qui entre au jeu au coup $x - n + 1$, joue à ce coup contre un joueur qui a déjà gagné deux coups ; en nommant P' la probabilité de ce cas, $\frac{P'}{2^n}$ sera la probabilité relative à ce cas, que la

partie finira au coup x . Mais on a

$$\frac{P'}{2^{n-2}} = z_{x-1};$$

car pour que la partie finisse au coup $x-2$, il faut qu'au coup $x-n+1$, l'un des joueurs ait déjà gagné deux coups, et qu'il gagne ce coup et les $n-3$ coups suivans. On a donc

$$\frac{P'}{2^n} = \frac{1}{2^2} \cdot z_{x-1};$$

$\frac{1}{2^2} \cdot z_{x-1}$ est donc la probabilité que la partie finira au coup x , relative à ce cas; et ainsi de suite.

En rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura

$$z_x = \frac{1}{2} \cdot z_{x-1} + \frac{1}{2^2} \cdot z_{x-2} + \frac{1}{2^3} \cdot z_{x-3} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot z_{x-n+1}.$$

La fonction génératrice de z_x est, par le premier Livre,

$$\frac{\downarrow(t)}{1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2^2}t^2 \dots - \frac{1}{2^{n-1}}t^{n-1}},$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \downarrow(t) \cdot (2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n}t^n}.$$

Pour déterminer $\downarrow(t)$, nous observerons que la partie ne peut finir au plus tôt qu'au coup n , et que la probabilité pour cela est $\frac{1}{2^{n-1}}$; car il faut que le vainqueur au premier coup, gagne les $n-1$ coups suivans; $\downarrow(t)$ ne doit donc renfermer que la puissance n de t , et $\frac{1}{2^{n-1}}$ doit être le coefficient de cette puissance; ce qui donne $\downarrow(t) = \frac{t^n}{2^{n-1}}$; ainsi la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^n \cdot (2-t)}{1 - t + \frac{1}{2^n}t^n}.$$

La somme des coefficients des puissances de t jusqu'à l'infini, dans le développement de cette fonction, est la probabilité que la partie
doit

doit finir après une infinité de coups ; or on a cette somme en faisant $t=1$ dans la fonction, ce qui la réduit à l'unité ; il est donc certain que la partie doit finir.

On aura la probabilité que la partie sera finie au coup x ou avant ce coup, en déterminant le coefficient de t^x dans le développement de la fonction précédente, divisée par $1-t$; la fonction génératrice de cette probabilité est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^n \cdot (2-t)}{(1-t) \cdot \left(1-t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n\right)}.$$

Donnons à la fonction génératrice de z_x , cette forme

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{t^n \cdot (2-t)}{1-t} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{t^n}{1-t} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{t^{2n}}{(1-t)^2} - \text{etc.}\right);$$

le coefficient de t^x dans $\frac{t^n \cdot (2-t)}{2^{rn} \cdot (1-t)^r}$ est

$$\frac{1}{2^{rn}} \cdot \frac{(x-rn+1) \cdot (x-rn+2) \cdot \dots \cdot (x-rn+r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1)} \cdot (x-rn+2r-2);$$

on a donc

$$z_x = \frac{1}{2^n} - \frac{(x-2n+1)}{2^{2n}} + \frac{(x-3n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 2^{3n}} \cdot (x-3n+4) \\ - \frac{(x-4n+1) \cdot (x-4n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^{4n}} \cdot (x-4n+6) + \text{etc.},$$

expression qui n'est relative qu'à x plus grand que n , et dans laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes qu'il y a d'unités entières dans le quotient $\frac{x}{n}$: lorsque $x=n$, on a $z_x = \frac{1}{2^{n-1}}$.

En développant de la même manière la fonction génératrice de la probabilité que la partie finira avant ou au coup x , on trouvera pour l'expression de cette probabilité,

$$\frac{x-n+2}{2^n} - \frac{(x-2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 2^{2n}} \cdot (x-2n+4) \\ + \frac{(x-3n+1) \cdot (x-3n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^{3n}} \cdot (x-3n+6) - \text{etc.},$$

cette expression ayant lieu dans le cas même de $x=n$.

Déterminons maintenant les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie au coup x . Soit $y_{0,x}$ celle du joueur qui a gagné le premier coup. Soient $y_{1,x}, y_{2,x}, \dots, y_{n-1,x}$ celles des joueurs suivans, et $y_{n,x}$ celle du joueur qui a perdu au premier coup, et qui par là est devenu le dernier. Désignons les joueurs par (0), (1), (2), $\dots$, $(n-1)$, (n) . Cela posé, la probabilité $y_{r,x}$ du joueur (r) devient $y_{r-1,x-1}$, si au second coup le joueur (0) est vaincu par le joueur (1); car il est visible que (r) se trouve alors, par rapport au vainqueur (1), dans la même position où était $(r-1)$ par rapport au vainqueur (0): seulement, il y a un coup de moins à jouer pour arriver au coup x , ce qui change x dans $x-1$. Présentement la probabilité que le joueur (0) sera vaincu par (1) est $\frac{1}{2}$; ainsi $\frac{1}{2} \cdot y_{r-1,x-1}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x , relative au cas où (0) est vaincu par (1). Si (0) n'est vaincu que par (2), $y_{r,x}$ devient $y_{r-2,x-2}$, et la probabilité de cet événement étant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{4} \cdot y_{r-2,x-2}$ pour la probabilité du joueur (r) , de gagner la partie au coup x , relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur (r) , $y_{r,x}$ devient $y_{0,x-r}$, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2^r}$; ainsi $\frac{1}{2^r} \cdot y_{0,x-r}$ est la probabilité du joueur (r) pour gagner la partie au coup x , relative à ce cas. Si le joueur (0) n'est vaincu que par le joueur $(r+1)$, $y_{r,x}$ se change dans $y_{n-1,x-r-1}$; car alors le joueur (r) se trouve, par rapport au vainqueur, dans la position primitive du joueur $(n-1)$ par rapport au joueur (0): seulement il ne reste que $x-r-1$ coups à jouer pour arriver au coup x . Or la probabilité que (0) ne sera vaincu que par le joueur $(r+1)$, est $\frac{1}{2^{r+1}}$; $\frac{1}{2^{r+1}} \cdot y_{n-1,x-r-1}$ est donc la probabilité de (r) pour gagner la partie au coup x , relative à ce cas. En continuant ainsi, et rassemblant toutes ces probabilités partielles, on aura la probabilité entière $y_{r,x}$ du joueur (r) pour gagner la partie; ce qui donne l'équation suivante,

$$y_{r,x} = \frac{1}{2} \cdot y_{r-1,x-1} + \frac{1}{2^2} \cdot y_{r-2,x-2} \dots + \frac{1}{2^r} \cdot y_{0,x-r} + \frac{1}{2^{r+1}} \cdot y_{n-1,x-r-1} \\ + \frac{1}{2^{r+2}} \cdot y_{n-2,x-r-2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot y_{r+1,x-n+1}.$$

Cette expression a lieu depuis $r=1$ jusqu'à $r=n-2$. Elle donne

$$\frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{r-1, x-1} = \frac{1}{2^2} \cdot \mathcal{Y}_{r-2, x-2} + \frac{1}{2^3} \cdot \mathcal{Y}_{r-3, x-3} \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \mathcal{Y}_{r, x-n}.$$

En retranchant cette équation, de la précédente; on aura celle-ci aux différences partielles,

$$\mathcal{Y}_{r, x} - \mathcal{Y}_{r-1, x-1} + \frac{1}{2^n} \cdot \mathcal{Y}_{r, x-n} = 0; \quad (1)$$

cette équation s'étend depuis $r=2$ jusqu'à $r=n-2$.

On a, par le raisonnement précédent, les deux équations suivantes,

$$\mathcal{Y}_{n-1, x} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{n-2, x-1} + \frac{1}{2^2} \cdot \mathcal{Y}_{n-3, x-2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \mathcal{Y}_{0, x-n+1}.$$

Mais l'expression précédente de $\mathcal{Y}_{r, x}$ donne

$$\frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{n-2, x-1} = \frac{1}{2^2} \cdot \mathcal{Y}_{n-3, x-2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \mathcal{Y}_{0, x-n+1} + \frac{1}{2^n} \cdot \mathcal{Y}_{n-1, x-n};$$

En retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$\mathcal{Y}_{n-1, x} - \mathcal{Y}_{n-2, x-1} + \frac{1}{2^n} \cdot \mathcal{Y}_{n-1, x-n} = 0;$$

ainsi l'équation (1) subsiste dans le cas de $r=n-1$.

Le raisonnement précédent conduit encore à cette équation

$$\mathcal{Y}_{n, x} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{n-1, x-1} + \frac{1}{2^2} \cdot \mathcal{Y}_{n-2, x-2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \mathcal{Y}_{1, x-n+1},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{n, x-1} = \frac{1}{2^2} \cdot \mathcal{Y}_{n-1, x-2} \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \mathcal{Y}_{1, x-n}.$$

En retranchant cette équation, de celle-ci que donne l'expression générale de $\mathcal{Y}_{r, x}$,

$$\mathcal{Y}_{1, x} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{Y}_{0, x-1} + \frac{1}{2^2} \cdot \mathcal{Y}_{n-1, x-2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \mathcal{Y}_{n, x-n+1};$$

et faisant $\frac{1}{2} \cdot (y_{0,x} + y_{n,x}) = \bar{y}_{0,x}$; on aura

$$y_{1,x} - \bar{y}_{0,x-1} + \frac{1}{2^n} \cdot y_{1,\bar{x}-n} = 0.$$

L'équation (1) subsiste donc encore dans le cas même de $r = 1$, pourvu que l'on y change $y_{0,x}$ dans $\bar{y}_{0,x}$. On doit observer que $\bar{y}_{0,x}$ est la probabilité de gagner la partie au coup x , de chacun des deux premiers joueurs, au moment où le jeu commence; car cette probabilité devient, après le premier coup, $y_{0,x}$ ou $y_{n,x}$, suivant que le joueur gagne ou perd, et la probabilité de chacun de ces événemens est $\frac{1}{2}$.

Maintenant, la fonction génératrice de l'équation (1) est, par le n° 20 du premier Livre,

$$\frac{\varphi(t)}{1 - t' + \frac{1}{2^n} \cdot t^n}, \quad (a)$$

t étant relatif à la variable x , et t' étant relatif à la variable r , ensorte que $y_{r,x}$ est le coefficient de $t'^r t^x$ dans le développement de cette fonction; $\varphi(t)$ est une fonction de t qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous ferons

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n} \cdot t^n};$$

la fonction génératrice de $y_{r,\bar{x}}$ sera le coefficient de t'^r dans le développement de la fonction (a); elle sera donc

$$\varphi(t) \cdot t' \cdot T^{r+1};$$

la probabilité que la partie finira précisément au coup x , est évidemment la somme des probabilités de chaque joueur pour la gagner à ce coup; elle est donc

$$2\bar{y}_{0,x} + y_{1,x} + y_{2,x} \dots + y_{n-1,x};$$

par conséquent la fonction génératrice de cette probabilité est

$$T \cdot \varphi(t) \cdot (2 + tT + t^2 T^2 \dots + t^{n-1} T^{n-1}),$$

ou

$$T \cdot \phi(t) \cdot \frac{(2 - tT - t^n T^n)}{1 - tT}.$$

En l'égalant à la fonction génératrice de cette probabilité, que nous avons trouvée ci-dessus, et qui est

$$\frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^n \cdot (2 - t)}{1 - t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n};$$

on aura

$$\phi(t) = \frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^n \cdot (2 - t) \cdot (1 - tT)}{T \cdot (2 - tT - t^n T^n) \cdot \left(1 - t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n\right)};$$

Ainsi la fonction génératrice de l'équation (1) aux différences partielles, est

$$\frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^n \cdot (2 - t) \cdot (1 - tT)}{T \cdot (2 - tT - t^n T^n) \cdot \left(1 - t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n\right) \cdot \left(1 - t' + \frac{1}{2^n} \cdot t^n\right)};$$

la fonction génératrice de $y_{r,x}$ est donc

$$\frac{\frac{1}{2^n} \cdot t^{n+r} \cdot (2 - t) \cdot (1 - tT) \cdot T^r}{(2 - tT - t^n T^n) \cdot \left(1 - t + \frac{1}{2^n} \cdot t^n\right)}.$$

Le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction, est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie au coup x . On pourra ainsi déterminer cette probabilité par ce développement. La somme de tous ces coefficients jusqu'à x infini, est la probabilité du joueur (r) de gagner la partie; or on a cette somme, en faisant $t=1$ dans la fonction précédente, ce qui donne $T = \frac{2^n}{1 + 2^n}$; nommons p cette dernière quantité, et désignons par y_r la probabilité de (r) de gagner la partie, on aura

$$y_r = \frac{(1 - p) \cdot p^r}{2 - p - p^n}.$$

Cette expression s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu qu'on y change y_* dans $\bar{y}_*$, $\bar{y}_*$ exprimant la probabilité de gagner la partie, des deux premiers joueurs au moment où ils entrent au jeu.

Maintenant, chaque joueur perdant déposant un franc au jeu, déterminons l'avantage des différens joueurs. Il est clair qu'après x coups, il y avait x jetons au jeu; l'avantage du joueur (r) relatif à ces x jetons, est le produit de ces jetons par la probabilité $y_{r,x}$ de gagner la partie au coup x ; cet avantage est donc $x \cdot y_{r,x}$. La valeur de $x \cdot y_{r,x}$ est le coefficient de $t^{x-1} \cdot dt$ dans la différentielle de la fonction génératrice de $y_{r,x}$; en divisant donc cette différentielle par dt , et en y supposant ensuite $t=1$, on aura la somme de toutes les valeurs de $x \cdot y_{r,x}$ jusqu'à x infini; c'est l'avantage du joueur (r) . Mais il faut en retrancher les jetons qu'il met au jeu à chaque coup qu'il perd; or $y_{r,x}$ étant sa probabilité de gagner la partie au coup x , $2^n \cdot y_{r,x-n+1}$ sera sa probabilité d'entrer au jeu, au coup $x-n+1$, puisque cette dernière probabilité, multipliée par la probabilité $\frac{1}{2^n}$, qu'il gagnera ce coup, et les $n-1$ coups suivans est sa probabilité de gagner la partie au coup x . En supposant donc qu'il perde autant de fois qu'il entre au jeu, la somme de toutes les valeurs de $2^n \cdot y_{r,x-n+1}$ jusqu'à x infini, serait le désavantage du joueur (r) ; et comme la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x-n+1}$ est égale à la somme de toutes les valeurs de $y_{r,x}$, ou à y_r , on aurait $2^n \cdot y_r$, ou $\frac{2^n \cdot (1-p) \cdot p^r}{2-p-p^n}$ pour le désavantage du joueur (r) . Mais il ne perd pas chaque fois qu'il entre au jeu, parce qu'il peut entrer au jeu et gagner la partie; il faut donc ôter de $2^n \cdot y_r$, la somme de toutes les valeurs de y_x ou y_r , et alors le désavantage de (r) est $\frac{(2^n-1) \cdot (1-p) \cdot p^r}{2-p-p^n}$. Pour avoir l'avantage entier de (r) , il faut retrancher cette dernière quantité, de la somme des valeurs de $x \cdot y_{r,x}$; en désignant donc par S cette somme, l'avantage du joueur (r) sera

$$S - \frac{(2^n-1) \cdot (1-p) \cdot p^r}{2-p-p^n},$$

S étant, comme on l'a vu, la différentielle de la fonction généra-

trice de $\gamma_{r,x}$ divisée par dt , et dans laquelle on suppose ensuite $t=1$. Dans cette supposition, on a

$$T=p; \quad \frac{dT}{dt} = -np \cdot (1-p).$$

Désignons par Y_r l'avantage de (r) , on trouvera

$$Y_r = \frac{(np+1-n)}{2-p-p^n} \cdot p^r \cdot \left\{ (1-p) \cdot r + \frac{p^{n+1} + n \cdot (1-p) \cdot p^n - p}{2-p-p^n} \right\}.$$

Cette équation servira depuis $r=0$ jusqu'à $r=n-1$, pourvu que l'on y change Y_r dans $\bar{Y}_0$, $\bar{Y}_r$ étant l'avantage des deux premiers joueurs, au moment où ils entrent au jeu.

Si au commencement de la partie, chacun des joueurs dépose au jeu une somme a ; l'avantage du joueur (r) en sera augmenté de $(n+1) \cdot a$, multiplié par la probabilité γ_r , que ce joueur gagnera la partie; mais il faut en ôter la mise a de ce joueur; il faut donc, pour avoir alors son avantage, augmenter l'expression précédente de Y_r , de la quantité

$$\frac{(n+1) \cdot a \cdot (1-p) \cdot p^r}{2-p-p^n} - a.$$

Lorsque l'avantage de (r) devient négatif, il se change en désavantage.

12. Soit q la probabilité d'un événement simple, à chaque coup; on demande la probabilité de l'amener i fois de suite, dans le nombre x de coups.

Nommons z_x la probabilité que cet événement composé aura lieu précisément au coup x . Pour cela, il est nécessaire que l'événement simple n'arrive point au coup $x-i$, et qu'il arrive dans les i coups suivans, l'événement composé n'étant point arrivé précédemment. Soit alors P la probabilité que l'événement simple n'arrivera point au coup $x-i-1$. La probabilité correspondante qu'il n'arrivera point au coup $x-i$, sera $(1-q) \cdot P$; et la probabilité correspondante que l'événement composé aura lieu précisément au coup x , sera $(1-q) \cdot P \cdot q^i$. Ce sera la partie de z_x cor-

respondante à ce cas. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera au coup $x-1$, est évidemment $P \cdot q^i$; on a donc

$$P = \frac{z_{x-1}}{q^i};$$

ainsi la valeur partielle de z_x , relative à ce cas, est $(1-q) \cdot z_{x-1}$.

Considérons maintenant les cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$. Nommons P' la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i-2$; la probabilité qu'il arrivera dans ce cas au coup $x-i-1$, sera $q \cdot P'$ et la probabilité qu'il n'arrivera pas au coup $x-i$, sera $(1-q) \cdot q \cdot P'$; la valeur partielle de z_x relative à ce cas, sera donc $(1-q) \cdot q \cdot P' \cdot q^i$. Mais la probabilité que l'événement composé arrivera précisément au coup $x-2$, est $P' \cdot q^i$: c'est la valeur de z_{x-2} ; ce qui donne

$$P' = \frac{z_{x-2}}{q^i};$$

$(1-q) \cdot q \cdot z_{x-2}$ est donc la valeur partielle de z_x , relative au cas où l'événement simple arrivera au coup $x-i-1$, sans arriver au coup $x-i-2$.

On trouvera de la même manière que $(1-q) \cdot q^2 \cdot z_{x-3}$ est la valeur partielle de z_x , relative au cas où l'événement simple arrivera aux coups $x-i-1$ et $x-i-2$, sans arriver au coup $x-i-3$; et ainsi de suite.

En réunissant toutes ces valeurs partielles de z_x , on aura

$$z_x = (1-q) \cdot (z_{x-1} + q \cdot z_{x-2} + q^2 \cdot z_{x-3} \dots + q^{i-1} \cdot z_{x-i}).$$

Il est facile d'en conclure que la fonction génératrice de z_x est

$$\frac{q^i \cdot (1-qt) \cdot t^i}{1-t + (1-q) \cdot q^i \cdot t^{i+1}};$$

car cette fonction génératrice est

$$\frac{\varphi(t)}{1 - (1-q) \cdot (t + qt^2 \dots + q^{i-1}t^i)},$$

ou

$$\frac{\varphi(t) \cdot (1-qt)}{1-t + (1-q) \cdot q^i \cdot t^{i+1}}.$$

La

La fonction $\phi(t)$ doit être déterminée par la condition qu'elle ne doit renfermer que la puissance i de t , puisque l'événement composé ne peut commencer à être possible qu'au coup i ; de plus, le coefficient de cette puissance est la probabilité q^i , que cet événement aura lieu précisément à ce coup.

En divisant la fonction génératrice précédente, par $1 - t$, on aura

$$\frac{q^i \cdot (1 - qt) \cdot t^i}{(1 - t)^2 \cdot \left(1 + \frac{(1 - q) \cdot q^i \cdot t^{i+1}}{1 - t}\right)}$$

pour la fonction génératrice de la probabilité que l'événement composé aura lieu avant ou au coup x .

En développant cette fonction, on aura pour le coefficient de t^{x+i} , la série

$$\begin{aligned} & q^i \cdot [(1 - q) \cdot x + 1] \\ & - (1 - q) \cdot q^{2i} \cdot \frac{(x - i)}{1 \cdot 2} \cdot [(1 - q) \cdot (x - i - 1) + 2] \\ & + (1 - q)^2 \cdot q^{3i} \cdot \frac{(x - 2i) \cdot (x - 2i - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot [(1 - q) \cdot (x - 2i - 2) + 3] \\ & - (1 - q)^3 \cdot q^{4i} \cdot \frac{(x - 3i) \cdot (x - 3i - 1) \cdot (x - 3i - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot [(1 - q) \cdot (x - 3i - 3) + 4] \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

la série étant continuée jusqu'à ce que l'on arrive à des facteurs négatifs. C'est l'expression de la probabilité que l'événement composé aura lieu au coup $x - i$, ou avant ce coup.

Supposons encore que deux joueurs A et B , dont les adresses respectives pour gagner un coup, sont q et $1 - q$, jouent à cette condition, que celui des deux qui aura le premier vaincu i fois de suite son adversaire, gagnera la partie; on demande les probabilités respectives des deux joueurs pour gagner la partie précisément au coup x .

Soit y_x la probabilité de A , et y'_x celle de B . Le joueur A ne peut gagner la partie au coup x , qu'autant qu'il commence ou recommence à gagner B au coup $x - i + 1$, et qu'il continue de le gagner les $i - 1$ coups suivans. Or avant de commencer le coup $x - i + 1$, B aura déjà gagné A , ou une fois, ou deux fois, ... ou

$i-1$ fois. Dans le premier cas, si l'on nomme P la probabilité de ce cas, $P \cdot (1-q)^{i-1}$ sera la probabilité y'_{x-1} de B pour gagner la partie au coup $x-1$, ce qui donne

$$P = \frac{y'_{x-1}}{(1-q)^{i-1}}.$$

Mais si B perd au coup $x-i+1$ et aux $i-1$ coups suivans, A gagnera la partie au coup x , et la probabilité de cela est $P \cdot q^i$; $\frac{q^i \cdot y'_{x-1}}{(1-q)^{i-1}}$ est donc la partie de y_x , relative au premier cas.

Dans le second cas, si l'on nomme P' sa probabilité, $P' \cdot (1-q)^{i-2}$ sera la probabilité y'_{x-2} de B pour gagner la partie au coup $x-2$. La probabilité de A pour gagner la partie au coup x , relative à ce cas, est $P' \cdot q^i$; on a donc $\frac{q^i \cdot y'_{x-2}}{(1-q)^{i-2}}$ pour cette probabilité.

En continuant ainsi, on aura

$$y_x = \frac{q^i}{(1-q)^i} \cdot [(1-q) \cdot y'_{x-1} + (1-q)^2 \cdot y'_{x-2} \dots + (1-q)^{i-1} \cdot y'_{x-i+1}].$$

Si l'on change q en $1-q$, y_x en y'_x , et réciproquement, on aura

$$y'_x = \frac{(1-q)^i}{q^i} \cdot [q \cdot y_{x-1} + q^2 \cdot y_{x-2} \dots + q^{i-1} \cdot y_{x-i+1}].$$

Maintenant, u étant fonction génératrice de y_x , celle de y'_x sera, par tout ce qui précède,

$$kq \cdot ut \cdot (1 + qt + qt^2 \dots + q^{i-2}t^{i-2}),$$

k étant égal à $\frac{(1-q)^i}{q^i}$. Mais l'expression précédente de y'_x ne commençant à avoir lieu que lorsque $x=i+1$, parce que pour des valeurs plus petites de x , y_{x-1} , y_{x-2} , etc. sont nuls; il faut, pour compléter l'expression précédente de la fonction génératrice de y'_x , lui ajouter une fonction rationnelle et entière de t , de l'ordre i , et dont les coefficients des puissances de t soient les valeurs de y'_x , lorsque x est égal ou plus petit que i . Or y'_x est nul, lorsque x est moindre que i ; et lorsqu'il est égal à i , y'_x est $(1-q)^i$, parce qu'il

exprime alors la probabilité de B pour gagner la partie après i coups ; la fonction à ajouter est donc $(1-q)^i \cdot t^i$; ainsi la fonction génératrice de y'_x est

$$kq \cdot ut \cdot [1 + qt \dots + q^{i-2}t^{i-2}] + (1-q)^i \cdot t^i.$$

Si l'on nomme u' cette fonction, l'expression de y_x en y'_{x-1} , y'_{x-2} , etc., donnera pour la fonction génératrice de y_x , en changeant dans celle de y'_x , k dans $\frac{1}{k}$, q dans $1-q$,

$$\frac{1}{k} \cdot (1-q) \cdot u' t \cdot [1 + (1-q)t \dots + (1-q)^{i-2}t^{i-2}] + q^i t^i.$$

Cette quantité est donc égale à u ; d'où l'on tire, en y substituant pour u sa valeur précédente ,

$$u = \frac{q^i t^i \cdot (1-q) t \cdot [1 - (1-q)^i t^i]}{1 - t + q \cdot (1-q)^{i+1} + (1-q) \cdot q^i t^{i+1} - q^i \cdot (1-q)^i t^{i+2}}.$$

En changeant q en $1-q$, on aura la fonction u' génératrice de y'_x . Si l'on divise ces fonctions par $1-t$, on aura les fonctions génératrices des probabilités respectives de A et de B , pour gagner la partie avant ou au coup x .

Si l'on suppose $t=1$ dans u , on aura la probabilité que A gagnera la partie ; car il est clair qu'en développant u suivant les puissances de t , et en supposant ensuite $t=1$, la somme de tous les termes de ce développement sera celle de toutes les valeurs de y_x . On trouve ainsi la probabilité de A pour gagner la partie, égale à

$$\frac{[1 - (1-q)^i] \cdot q^{i-1}}{(1-q)^{i-1} + q^{i-1} - q^{i-1} \cdot (1-q)^{i-1}} ;$$

la probabilité de B est donc

$$\frac{(1-q)^{i-1} \cdot [1 - q^i]}{(1-q)^{i-1} + q^{i-1} - q^{i-1} \cdot (1-q)^{i-1}}.$$

Supposons maintenant que les joueurs, à chaque coup qu'ils perdent, déposent un franc au jeu, et déterminons leur sort respectif. Il est clair que le gain du joueur A sera x , s'il gagne la

partie au coup x , puisqu'il y aura x francs déposés au jeu ; ainsi la probabilité de cet événement étant y_x par ce qui précède, $S.xy_x$ sera l'expression de l'avantage de $\mathcal{A}$, le signe S s'étendant à toutes les valeurs possibles de x . La fonction génératrice de y_x étant u ou $\frac{T'}{T}$, T' étant le numérateur de l'expression précédente de u , et T étant son dénominateur ; il est facile de voir que l'on aura $S.xy_x$ en différentiant $\frac{T'}{T}$, et en supposant ensuite $t=1$ dans cette différentielle, ce qui donne avec cette condition,

$$S.xy_x = \frac{dT'}{Tdt} - \frac{T' \cdot dT}{T^2 \cdot dt}.$$

Pour avoir le désavantage de $\mathcal{A}$, on observera qu'à chaque coup qu'il joue, la probabilité qu'il perdra, et par conséquent qu'il déposera un franc au jeu, est $1-q$; sa perte est donc le produit de $1-q$, par la probabilité que le coup sera joué ; or la probabilité que le coup x sera joué, est $1-y_{x-1}-y'_{x-1}$; la fonction génératrice de l'unité, est ici $\frac{t}{1-t}$, et celle de $y_{x-1}+y'_{x-1}$, est $\frac{T' \cdot t + T'' \cdot t}{T \cdot (1-t)}$; T'' étant ce que devient T' lorsqu'on y change q en $1-q$, et réciproquement ; ainsi la fonction génératrice du désavantage de $\mathcal{A}$ est

$$\frac{(1-q) \cdot t \cdot (T - T' - T'')}{(1-t) \cdot T}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fonction sont divisibles par $1-t$; de plus, on aura la somme de tous les désavantages de $\mathcal{A}$, ou son désavantage total, en faisant $t=1$ dans cette fonction génératrice ; le désavantage total est donc par les méthodes connues, et en observant que $T' + T'' = T$, lorsque $t=1$,

$$- \frac{(1-q) \cdot (dT - dT' - dT'')}{T \cdot dt},$$

t étant supposé égal à l'unité, après les différentiations. Si l'on retranche cette expression, de celle de l'avantage total de $\mathcal{A}$, on aura pour l'expression du sort de ce joueur,

$$\frac{q dT' + (1-q) \cdot (dT - dT'')}{T \cdot dt} - \frac{T' \cdot dT}{T^2 \cdot dt}.$$

Le sort de B sera

$$\frac{(1-q) \cdot dT'' + q \cdot (dT - dT')}{T \cdot dt} = \frac{T'' \cdot dT}{T^2 \cdot dt},$$

t étant supposé l'unité après les différentiations ; ce qui donne

$$\begin{aligned} T &= q \cdot (1-q) \cdot [q^{i-1} + (1-q)^{i-1} - q^{i-1} \cdot (1-q)^{i-1}]; \\ \frac{dT}{dt} &= (i+1) \cdot q \cdot (1-q) \cdot [q^{i-1} + (1-q)^{i-1}] - 2^i q^i \cdot (1-q)^{i-1}; \\ T' &= (1-q) \cdot q^i \cdot [1 - (1-q)^i]; \\ \frac{dT'}{dt} &= i \cdot (1-q) \cdot q^i \cdot [1 - 2 \cdot (1-q)^i] - q \cdot q^i \cdot [1 - (1-q)^i] \end{aligned}$$

on aura T'' et $\frac{dT''}{dt}$, en changeant dans ces deux dernières expressions, q dans $1 - q$.

13. Une urne étant supposée contenir $n+1$ boules, distinguées par les n^{os} 0, 1, 2, 3, ..., n ; on en tire une boule que l'on remet dans l'urne après le tirage. On demande la probabilité qu'après i tirages, la somme des nombres amenés sera égale à s .

Soient $t_1, t_2, t_3, \dots, t_i$, les nombres amenés au premier tirage, au second, au troisième, etc. ; on doit avoir

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_i = s. \quad (1)$$

$t_2, t_3, \dots, t_i$ étant supposés ne pas varier, cette équation n'est susceptible que d'une combinaison. Mais si l'on fait varier à la fois t_1 et t_2 , et si l'on suppose que ces variables puissent s'étendre indéfiniment depuis zéro, alors le nombre des combinaisons qui donnent l'équation précédente sera

$$s + 1 - t_3 - t_4 - \dots - t_i;$$

car t_1 peut s'étendre depuis zéro, ce qui donne

$$t_2 = s - t_3 - t_4 - \dots - t_i,$$

jusqu'à $s - t_3 - t_4 - \dots - t_i$, ce qui donne $t_2 = 0$; les valeurs négatives des variables t_1, t_2 devant être exclues.

Maintenant, le nombre $s + 1 - t_3 - t_4 \dots - t_i$ est susceptible de plusieurs valeurs, en vertu des variations de t_3, t_4 , etc. Supposons d'abord t_4, t_5 , etc. invariables, et que t_3 puisse s'étendre indéfiniment depuis zéro; alors si l'on fait

$$s + 1 - t_3 - t_4 \dots - t_i = x,$$

en intégrant cette variable dont la différence finie est l'unité, on aura $\frac{x.(x-1)}{1.2}$ pour son intégrale; mais pour avoir la somme de toutes les valeurs de x , il faut, comme l'on sait, ajouter x à cette intégrale; cette somme est donc $\frac{x.(x+1)}{1.2}$. Il faut y faire x égal à sa plus grande valeur, que l'on obtient en faisant t_3 nul dans la fonction $s + 1 - t_3 - t_4 \dots - t_i$; ainsi le nombre total des combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2 et t_3 , est

$$\frac{(s + 2 - t_4 - t_5 \dots - t_i).(s + 1 - t_4 - t_5 \dots - t_i)}{1.2}.$$

En faisant encore dans cette fonction

$$s + 2 - t_4 - t_5 \dots - t_i = x,$$

elle devient $\frac{x.(x-1)}{1.2}$; en l'intégrant depuis $x=0$, et en ajoutant la fonction elle-même, à cette intégrale, on aura $\frac{(x+1).x.(x-1)}{1.2.3}$; la valeur de x nulle répond à $t_4 = s + 2 - t_5 \dots - t_i$, et sa plus grande valeur répond à t_4 nul, et par conséquent elle est égale à $s + 3 - t_5 \dots - t_i$; en substituant donc pour x , cette valeur dans l'intégrale précédente, on aura

$$\frac{(s + 3 - t_5 - t_6 \dots - t_i).(s + 2 - t_5 - t_6 \dots - t_i).(s + 1 - t_5 - t_6 \dots - t_i)}{1.2.3}$$

pour la somme de toutes les combinaisons relatives aux variations de t_1, t_2, t_3, t_4 . En continuant ainsi, on trouvera généralement que le nombre total des combinaisons qui donnent l'équation (1), dans la supposition où les variables $t_1, t_2, \dots, t_i$ peuvent s'étendre indéfiniment depuis zéro, est

$$\frac{(s + i - 1).(s + i - 2).(s + i - 3) \dots (s + 1)}{1.2.3 \dots (i - 1)}; \quad (a)$$

mais dans la question présente, ces variables ne peuvent pas s'étendre au-delà de n . Pour exprimer cette condition, nous observerons que l'urne renfermant $n+1$ boules, la probabilité d'extraire l'une quelconque d'entre elles, est $\frac{1}{n+1}$; ainsi la probabilité de chacune des valeurs de t_1 , depuis zéro jusqu'à n , est $\frac{1}{n+1}$. La probabilité des valeurs de t_1 égales ou supérieures à $n+1$, est nulle; on peut donc la représenter par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu que l'on fasse $l=1$ dans le résultat du calcul; alors la probabilité d'une valeur quelconque de t_1 peut être généralement exprimée par $\frac{1-l^{n+1}}{n+1}$, pourvu qu'on ne fasse commencer l , que lorsque t_1 aura atteint $n+1$, et qu'on le suppose à la fin, égale à l'unité: il en est de même des probabilités des autres variables. Maintenant, la probabilité de l'équation (1) est le produit des probabilités des valeurs de t_1, t_2, t_3 , etc.; cette probabilité est donc $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$; le nombre des combinaisons qui donnent cette équation, multipliées par leurs probabilités respectives, est ainsi le produit de la fraction (a) par $\left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i$, ou

$$\frac{(s+1).(s+2)....(s+i-1)}{1.2.3....(i-1)} \cdot \left(\frac{1-l^{n+1}}{n+1}\right)^i; \quad (b)$$

mais il faut dans le développement de cette fonction, n'appliquer l^{n+1} qu'aux combinaisons dans lesquelles une des variables commence à surpasser n : il faut n'appliquer l^{2n+2} qu'aux combinaisons dans lesquelles deux des variables commencent à surpasser n , et ainsi du reste. Si dans l'équation (1) on suppose qu'une des variables, t_1 , par exemple, surpasse n ; en faisant $t_1 = n+1+t'_1$, cette équation devient

$$s - n - 1 = t'_1 + t_2 + t_3 + \text{etc.};$$

la variable t'_1 pouvant s'étendre indéfiniment. Si deux des variables telles que t_1 et t_2 surpassent n ; en faisant

$$t_1 = n+1+t'_1, \quad t_2 = n+1+t'_2;$$

l'équation devient

$$s - 2n - 2 = t'_1 + t'_2 + t_3 + \text{etc.},$$

et ainsi de suite. On doit donc, dans la fonction (a) que nous avons dérivée de l'équation (1), diminuer s de $n + 1$, relativement au système des variables t'_1, t_2, t_3 , etc. On doit le diminuer de $2n + 2$, relativement au système des variables t'_1, t'_2, t_3 , etc.; et ainsi du reste. Il faut par conséquent, dans le développement de la fonction (b) par rapport aux puissances de l , diminuer dans chaque terme, s de l'exposant de la puissance de l ; en faisant ensuite $l = 1$, cette fonction devient

$$\frac{(s+1).(s+2) \dots (s+i-1)}{1.2.3 \dots (i-1).(n+1)^i} - \frac{i.(s-n).(s-n+1) \dots (s+i-n-2)}{1.2.3 \dots (i-1).(n+1)^i} \\ + \frac{i.(i-1)}{1.2} \cdot \frac{(s-2n-1).(s-2n) \dots (s+i-2n-3)}{1.2.3 \dots (i-1).(n+1)^i} - \text{etc.}; \quad (c)$$

la série devant être continuée jusqu'à ce que l'un des facteurs $s-n$, $s-2n-1$, $s-3n-2$, etc. devienne nul ou négatif.

Cette formule donne la probabilité d'amener un nombre donné s , en projetant i dés d'un nombre $n+1$ de faces chacun, le plus petit nombre marqué sur ces faces étant 1. Il est visible que cela revient à supposer dans l'urne précédente, tous les nombres des boules, augmentés de l'unité; et alors la probabilité d'amener le nombre $s+i$ dans i tirages, est la même que celle d'amener le nombre s dans le cas que nous venons de considérer; or en faisant $s+i = s'$, on a $s = s' - i$; la formule (c) donnera donc pour la probabilité d'amener le nombre s' en projetant les i dés,

$$\frac{(s'-1).(s'-2) \dots (s'-i+1)}{1.2.3 \dots (i-1).(n+1)^i} - \frac{i.(s'-n-2).(s'-n-3) \dots (s'-i-n)}{1.2.3 \dots (i-1).(n+1)^i} \\ + \frac{i.(i-1)}{1.2} \cdot \frac{(s'-2n-3).(s'-2n-4) \dots (s'-i-2n-1)}{1.2.3 \dots (i-1).(n+1)^i} - \text{etc.}$$

La formule (c) appliquée au cas où s et n sont des nombres infinis, se transforme dans la suivante,

$$\frac{1}{1.2.3 \dots (i-1).n} \cdot \left\{ \left(\frac{s}{n} \right)^{i-1} - i \cdot \left(\frac{s}{n} - 1 \right)^{i-1} + \frac{i.(i-1)}{1.2} \cdot \left(\frac{s}{n} - 2 \right)^{i-1} - \text{etc.} \right\}.$$

Cette

Cette expression peut servir à déterminer la probabilité que la somme des inclinaisons à l'écliptique, d'un nombre i d'orbites, sera comprise dans des limites données, en supposant que pour chaque orbite, toutes les inclinaisons depuis zéro jusqu'à l'angle droit, soient également possibles. En effet, si l'on conçoit que l'angle droit $\frac{1}{2}\pi$, soit divisé en un nombre infini n de parties égales, et que s renferme un nombre infini de ces parties; en nommant ϕ la somme des inclinaisons des orbites, on aura

$$\frac{s}{n} = \frac{\phi}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En multipliant donc l'expression précédente par ds ou par $\frac{nd\phi}{\frac{1}{2}\pi}$, et en l'intégrant depuis $\phi - \epsilon$ jusqu'à $\phi + \epsilon$, on aura

$$\frac{1}{1.2.3\dots i} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\phi+\epsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i - i \cdot \left(\frac{\phi+\epsilon}{\frac{1}{2}\pi} - 1\right)^i + \frac{i \cdot (i-1)}{1.2} \cdot \left(\frac{\phi+\epsilon}{\frac{1}{2}\pi} - 2\right)^i - \text{etc.} \\ & - \left(\frac{\phi-\epsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^i + i \cdot \left(\frac{\phi-\epsilon}{\frac{1}{2}\pi} - 1\right)^i - \frac{i \cdot (i-1)}{1.2} \cdot \left(\frac{\phi-\epsilon}{\frac{1}{2}\pi} - 2\right)^i + \text{etc.} \end{aligned} \right\}; (o)$$

c'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites sera comprise dans les limites $\phi - \epsilon$ et $\phi + \epsilon$.

Appliquons cette formule aux orbites des planètes. La somme des inclinaisons des orbites des planètes à celle de la terre, était de $91^{\circ},4187$ au commencement de 1801 : il y a dix orbites, sans y comprendre l'écliptique; on a donc ici $i = 10$. Nous ferons ensuite

$$\begin{aligned} \phi - \epsilon &= 0, \\ \phi + \epsilon &= 91^{\circ},4187. \end{aligned}$$

La formule précédente devient ainsi, en observant que $\frac{1}{2}\pi$, ou le quart de la circonférence est de 100° ,

$$\frac{1}{1.2.3\dots 10} \cdot (0,914187)^{10}.$$

C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites serait comprise dans les limites zéro et $91^{\circ},4187$, si toutes les inclinaisons étaient également possibles. Cette probabilité est donc 0,0000001235. Elle est déjà très-petite; mais il faut encore

la combiner avec la probabilité d'une circonstance très-remarquable dans le système du monde, et qui consiste en ce que toutes les planètes se meuvent dans le même sens que la terre. Si les mouvemens directs et rétrogrades sont supposés également possibles, cette dernière probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; il faut donc multiplier 0,00000011235 par $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, pour avoir la probabilité que tous les mouvemens des planètes et de la terre seront dirigés dans le même sens, et que la somme de leurs inclinaisons à l'orbite de la terre, sera comprise dans les limites zéro et $91^{\circ},4187$; on aura ainsi $\frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour cette probabilité; ce qui donne $1 - \frac{1,0972}{(10)^{10}}$ pour la probabilité que cela n'a pas dû avoir lieu, si toutes les inclinaisons, ainsi que les mouvemens directs et rétrogrades, ont été également faciles. Cette probabilité approche tellement de la certitude, que le résultat observé devient invraisemblable dans cette hypothèse; ce résultat indique donc avec une très-grande probabilité, l'existence d'une cause primitive qui a déterminé les mouvemens des planètes à se rapprocher du plan de l'écliptique, ou plus naturellement, du plan de l'équateur solaire, et à se mouvoir dans le sens de la rotation du soleil. Si l'on considère ensuite que les dix-huit satellites observés jusqu'ici, font leur révolution dans le même sens, et que les rotations observées au nombre de treize dans les planètes, les satellites et l'anneau de Saturne, sont encore dirigées dans le même sens; enfin, si l'on considère que la moyenne des inclinaisons des orbes de ces astres, et de leurs équateurs à l'équateur solaire, est fort éloignée d'atteindre un demi-angle droit; on verra que l'existence d'une cause commune qui a dirigé tous ces mouvemens dans le sens de la rotation du soleil, et sur des plans peu inclinés à celui de son équateur, est indiquée avec une probabilité bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute.

Voyons maintenant si cette cause a influé sur le mouvement des comètes. Le nombre de celles qu'on a observées jusqu'à la fin de 1811, en comptant pour la même les diverses apparitions de celle de 1759, s'élève à cent, dont cinquante-trois sont directes, et qua-

rante-sept sont rétrogrades. La somme des inclinaisons des orbites des premières, est de $2657^{\circ},993$, et celle des inclinaisons des autres orbites, est de $2515^{\circ},684$; l'inclinaison moyenne de toutes ces orbites est donc de $51^{\circ},73677$; par conséquent la somme de toutes les inclinaisons est $\frac{i \cdot \pi}{4} + i \cdot 1^{\circ},73677$, i étant ici égal à 100. On voit déjà que l'inclinaison moyenne surpassant le demi-angle droit, les comètes, loin de participer à la tendance des corps du système planétaire, pour se mouvoir dans des plans peu inclinés à l'écliptique, paraissent avoir une tendance contraire. Mais la probabilité de cette tendance est très-petite. En effet, si l'on suppose dans la formule (o),

$$\varphi = \frac{i \cdot \pi}{4}, \quad \epsilon = i \cdot 1^{\circ},73677,$$

elle devient

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot 2^i} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(i + \frac{4i \cdot 1^{\circ},73677}{\pi} \right)^i - i \left(i + \frac{4i \cdot 1^{\circ},73677}{\pi} - 2 \right)^i \\ & + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(i + \frac{4i \cdot 1^{\circ},73677}{\pi} - 4 \right)^i - \text{etc.} \\ & - \left(i - \frac{4i \cdot 1^{\circ},73677}{\pi} \right)^i + i \left(i - \frac{4i \cdot 1^{\circ},73677}{\pi} - 2 \right)^i \\ & - \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(i - \frac{4i \cdot 1^{\circ},73677}{\pi} - 4 \right)^i + \text{etc.} \end{aligned} \right\}; \quad (p)$$

π étant 200° . C'est l'expression de la probabilité que la somme des inclinaisons des orbites des i comètes, doit être comprise dans les limites $\pm i \cdot 1^{\circ},73677$. Le nombre des termes de cette formule, et la précision avec laquelle il faudrait avoir chacun d'eux, en rend le calcul impraticable; il faut donc recourir aux méthodes d'approximation développées dans la seconde partie du premier Livre. On a par le n° 42 du même Livre,

$$\frac{(i + r\sqrt{i})^i - i \cdot (i + r\sqrt{i} - 2)^i + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot (i + r\sqrt{i} - 4)^i - \text{etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot 2^i} \\ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot fdr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20 \cdot i} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot r \cdot (1 - r^2) \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2},$$

les puissances des quantités négatives étant ici exclues, comme

elles le sont dans la formule précédente; en faisant donc

$$r\sqrt{i} = \frac{4i.1^{\circ}.73677}{200^{\circ}};$$

la formule (p) devient

$$2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{10 \cdot i} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot r \cdot (1-r^2) \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2};$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. On trouve ainsi 0,474 pour la probabilité que l'inclinaison des 100 orbites doit tomber dans les limites $50^{\circ} \pm 1^{\circ}.17377$; la probabilité que l'inclinaison moyenne doit être inférieure à l'inclinaison observée, est donc 0,737. Cette probabilité n'est pas assez grande pour que le résultat observé fasse rejeter l'hypothèse d'une égale facilité des inclinaisons des orbites, et pour indiquer l'existence d'une cause primitive qui a influé sur ces inclinaisons, cause que l'on ne peut s'empêcher d'admettre dans les inclinaisons des orbes du système planétaire.

La même chose a lieu par rapport au sens du mouvement. La probabilité que sur 100 comètes, quarante-sept au plus seront rétrogrades, est la somme des 48 premiers termes du binome $(p+q)^{100}$, en faisant dans le résultat du calcul $p=q=\frac{1}{2}$. Mais la somme des 50 premiers termes, plus la moitié du 51^{ième} ou du terme moyen, est la moitié du binome entier, ou de $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{100}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{1}{2} - \frac{100.99 \dots 51}{1.2.3 \dots 50.2^{100}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{50}{51} + \frac{50.49}{51.52} \right),$$

ou

$$= \frac{1}{2} - \frac{1.2.3 \dots 100.1594}{(1.2.3 \dots 50)^2 \cdot 2^{100} \cdot 663}.$$

En vertu du théorème

$$1.2.3 \dots s = s^{s+\frac{1}{2}} \cdot c^{-s} \cdot \left(1 + \frac{1}{12 \cdot s} + \text{etc.} \right) \cdot \sqrt{2\pi},$$

on a, à très-peu près,

$$1.2.3 \dots 100 = (100)^{100+\frac{1}{2}} \cdot c^{-100} \cdot \left(1 + \frac{1}{1200} \right) \cdot \sqrt{2\pi},$$

$$2^{100} \cdot (1.2.3 \dots 50)^2 = 100^{100+1} \cdot c^{-100} \cdot \left(1 + \frac{1}{300} \right) \cdot \pi.$$

La probabilité précédente devient ainsi ,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{50} \cdot \pi} \cdot \frac{1197.1594}{1200.663} = 0,3046.$$

Cette probabilité est beaucoup trop grande pour indiquer une cause qui ait favorisé, dans l'origine, les mouvemens directs. Ainsi la cause qui a déterminé le sens des mouvemens de révolution et de rotation des planètes et des satellites, ne paraît pas avoir influé sur le mouvement des comètes.

14. La méthode du numéro précédent a l'avantage de s'étendre au cas où le nombre des boules de l'urne, qui portent le même numéro, n'est pas égal à l'unité, mais varie suivant une loi quelconque. Concevons, par exemple, qu'il n'y ait qu'une boule portant le n° 0, qu'une boule portant le n° 1, et ainsi de suite jusqu'au n° r inclusivement. Supposons de plus qu'il y ait deux boules portant le n° $r+1$, deux boules portant le n° $r+2$, et ainsi de suite jusqu'au n° n inclusivement. Le nombre total des boules de l'urne sera $2n - r + 1$, la probabilité d'en extraire un des numéros inférieurs à $r+1$, sera donc $\frac{1}{2n - r + 1}$; et la probabilité d'en extraire le n° $r+1$ ou l'un des numéros supérieurs, sera $\frac{2}{2n - r + 1}$: nous la représenterons par $\frac{1 + l^{r+1}}{2n - r + 1}$; mais nous ferons $l = 1$ dans le résultat du calcul. Quoiqu'il n'y ait point de numéros au-delà du n° n , nous pouvons cependant considérer dans l'urne des numéros supérieurs à n , jusqu'à l'infini, pourvu que nous donnions à leur extraction, une probabilité nulle; nous pourrions donc représenter cette probabilité par $\frac{1 + l^{r+1} - 2l^{n+1}}{2n - r + 1}$, en faisant $l = 1$ dans le résultat du calcul. Par cet artifice, nous pourrions représenter généralement la probabilité d'un numéro quelconque, par l'expression précédente; pourvu que nous ne fassions commencer l^{r+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser r , et que nous ne fassions commencer l^{n+1} que lorsqu'un des numéros commencera à surpasser n . Cela posé, on trouvera, en appliquant ici les raisonnemens du numéro précédent, que la probabilité d'amener le nombre

s dans i tirages, est égale à

$$\frac{(s+i-1) \cdot (s+i-2) \cdot (s+i-3) \dots (s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i-1) \cdot (2n-r+1)^i} \cdot (1+l^{r+1}-2l^{n+1})^i,$$

pourvu que dans le développement de cette fonction, suivant les puissances de l , on diminue dans chaque terme, s de l'exposant de la puissance l , qu'on suppose ensuite $l=1$, et qu'on arrête la série lorsque l'on parvient à des facteurs négatifs.

15. Appliquons maintenant cette méthode à la recherche du résultat moyen que doit donner un nombre quelconque d'observations dont les lois de facilité des erreurs sont connues. Pour cela, nous allons résoudre le problème suivant.

Soient i quantités variables et positives $t, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}$, dont la somme soit s , et dont la loi de possibilité soit connue; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée $\varphi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$ de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.

Supposons pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment les possibilités des variables t, t_1 , etc. soient discontinues, et représentons par $\varphi(t)$ la possibilité de t , depuis $t=0$ jusqu'à $t=q$; par $\varphi'(t) + \varphi(t)$, sa possibilité depuis $t=q$ jusqu'à $t=q'$; par $\varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t)$, sa possibilité depuis $t=q'$ jusqu'à $t=q''$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables t_1, t_2 , etc. par les mêmes lettres, en écrivant respectivement au bas, les nombres 1, 2, 3, etc.; ensorte que q_1, q'_1 , etc.; $\varphi_1(t_1), \varphi'_1(t_1)$, etc. correspondent, relativement à t_1 , à ce que q, q' , etc.; $\varphi(t), \varphi'(t)$, etc. sont respectivement à t , et ainsi de suite. Dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction $\varphi(t)$ a lieu depuis $t=0$ jusqu'à t infini; que la fonction $\varphi'(t)$ a lieu depuis $t=q$ jusqu'à t infini, et ainsi de suite. Pour reconnaître les valeurs de t, t_1, t_2 , etc. lorsque ces diverses fonctions commencent à avoir lieu, nous multiplierons conformément à la méthode exposée dans les numéros précédens, $\varphi(t)$ par l^0 ou l'unité, $\varphi'(t)$ par l^q , $\varphi''(t)$ par $l^{q'}$, etc.; nous multiplierons pareillement $\varphi_1(t_1)$ par l'unité, $\varphi'_1(t_1)$ par l^{q_1} , et ainsi de suite: les exposans des puissances de l indiqueront alors

ces valeurs. Il suffira ensuite de faire $l=1$ dans le dernier résultat du calcul. Au moyen de ces artifices très-simples, on peut facilement résoudre le problème proposé.

La probabilité de la fonction $\downarrow(t, t_1, t_2, \text{etc.})$ est évidemment égale au produit des probabilités de $t, t_1, t_2, \text{etc.}$, ensorte que si l'on substitue pour t sa valeur $s - t_1 - t_2 - \text{etc.}$ que donne l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} = s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité, sera

$$\begin{aligned} & \downarrow(s - t_1 - t_2 - \text{etc.}, t_1, t_2, \text{etc.}) \\ & \times [\phi(s - t_1 - t_2 - \text{etc.}) + l^q \cdot \phi'(s - t_1 - t_2 - \text{etc.}) + l^{q'} \cdot \phi''(s - t_1 - t_2 - \text{etc.}) + \text{etc.}] \\ & \times [\phi_1(t_1) + l^{q_1} \cdot \phi'_1(t_1) + l^{q'_1} \cdot \phi''_1(t_1) + \text{etc.}]; \quad (\text{A}) \\ & \times [\phi_2(t_2) + l^{q_2} \cdot \phi'_2(t_2) + l^{q'_2} \cdot \phi''_2(t_2) + \text{etc.}] \\ & \times \text{etc.} \end{aligned}$$

on aura donc la somme de tous ces produits, 1°. en multipliant la quantité précédente par dt_1 , et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_1 est susceptible; 2°. en multipliant cette intégrale par dt_2 , et en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_2 est susceptible, et ainsi de suite jusqu'à la dernière variable t_{i-1} ; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$\begin{aligned} & l^q + q_1 + q'_1 + \text{etc.} \cdot \downarrow(s - t_1 - t_2 - \text{etc.}, t_1, t_2, \text{etc.}) \\ & \times \phi'(s - t_1 - t_2 - \text{etc.}) \cdot \phi'_1(t_1) \cdot \phi''_2(t_2) \cdot \text{etc.}; \end{aligned}$$

en le multipliant par dt_1 , il faut intégrer pour toutes les valeurs possibles de t_1 ; or la fonction $\phi'(s - t_1 - t_2 - \text{etc.})$ n'a lieu que lorsque t_1 dont la valeur est $s - t_1 - t_2 - \text{etc.}$, égale ou surpasse q ; la plus grande valeur que t_1 puisse recevoir, est donc $s - q - t_2 - t_3 - \text{etc.}$. De plus, $\phi'_1(t_1)$ n'ayant lieu que lorsque t_1 est égal ou plus grand que q_1 , cette quantité est la plus petite valeur que t_1 puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit, depuis $t_1 = q_1$ jusqu'à

$$t_1 = s - q - t_2 - t_3 - \text{etc.};$$

ou, ce qui revient au même, depuis $t_1 - q_1 = 0$ jusqu'à

$$t_1 - q_1 = s - q - q_1 - t_2 - t_3 - \text{etc.}$$

On trouvera de la même manière qu'en multipliant cette nouvelle intégrale par dt_2 , il faudra l'intégrer depuis $t_2 - q'_1 = 0$ jusqu'à

$$t_2 - q'_2 = s - q - q_1 - q'_1 - t_3 - \text{etc.}$$

En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de $s - q - q_1 - q'_2 - \text{etc.}$, dans laquelle il ne restera aucune des variables $t, t_1, t_2, \text{etc.}$. Cette fonction doit être rejetée, si $s - q - q_1 - q'_2 - \text{etc.}$ est nul ou négatif; car il est visible que dans ce cas, le système des fonctions $\phi'(t), \phi'_1(t_1), \phi''_2(t_2), \text{etc.}$ ne peut pas être employé. En effet, les plus petites valeurs de $t_1, t_2, \text{etc.}$ étant par la nature de ces fonctions, égales à $q_1, q'_1, \text{etc.}$; la plus grande valeur que t puisse recevoir est $s - q_1 - q'_1 - \text{etc.}$; ainsi la plus grande valeur de $t - q$ est

$$s - q - q_1 - q'_1 - \text{etc.};$$

or la fonction $\phi'(t)$ ne peut être employée qu'autant que $t - q$ est positif.

De là résulte une solution très-simple du problème proposé. Que l'on substitue, 1°. $q + t$ au lieu de t , dans $\phi'(t)$; $q' + t$ au lieu de t , dans $\phi''(t)$; $q'' + t$ au lieu de t , dans $\phi'''(t)$, et ainsi de suite; 2°. $q_1 + t_1$ au lieu de t_1 , dans $\phi'_1(t_1)$; $q'_1 + t_1$ au lieu de t_1 , dans $\phi''_1(t_1)$; etc.; 3°. $q_2 + t_2$ au lieu de t_2 , dans $\phi'_2(t_2)$; $q'_2 + t_2$ au lieu de t_2 , dans $\phi''_2(t_2)$, etc.; et ainsi de suite; 4°. enfin, $k + t$ au lieu de t , $k_1 + t_1$ au lieu de t_1 , et ainsi du reste, dans $\downarrow(t, t_1, t_2, \text{etc.})$; la fonction (A) deviendra

$$\begin{aligned} & \downarrow(k + s - t_1 - t_2 - t_3 - \text{etc.}, k_1 + t_1, k_2 + t_2, \text{etc.}) \\ & \times [\phi(s - t_1 - t_2 - t_3 - \text{etc.}) + l^q \cdot \phi'(s + q - t_1 - t_2 - \text{etc.}) \\ & \quad + l^{q'} \cdot \phi''(s + q' - t_2 - t_3 - \text{etc.}) + \text{etc.}]; (A') \\ & \times [\phi_1(t_1) + l^{q_1} \cdot \phi'_1(q_1 + t_1) + l^{q'_1} \cdot \phi''_1(q'_1 + t_1) + \text{etc.}] \\ & \times [\phi_2(t_2) + l^{q_2} \cdot \phi'_2(q_2 + t_2) + \text{etc.}] \end{aligned}$$

en multipliant cette fonction par dt_1 , on l'intégrera depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = s - t_2 - t_3 - \text{etc.}$ On multipliera ensuite cette première intégrale par dt_2 , et on l'intégrera depuis t_2 nul jusqu'à $t_2 = s - t_3 - t_4 - \text{etc.}$ En continuant ainsi, on parviendra à une dernière intégrale qui sera fonction de s , et que nous désignerons par

par $\Pi(s)$; et cette fonction sera la somme cherchée de toutes les valeurs de $\downarrow(t, t_1, t_2, \text{etc.})$ multipliées par leurs probabilités respectives. Mais pour cela, il faut avoir soin de changer dans un terme quelconque, multiplié par une puissance de l , telle que $l^{q+q_1+q'_2+\text{etc.}}$, k dans la partie de l'exposant de la puissance relative à la variable t , et qui dans ce cas est q ; et si cette partie manque, il faut supposer k égal à zéro. Il faut pareillement changer k_1 dans la partie de l'exposant relative à la variable t_1 , et ainsi de suite; il faut diminuer s de l'exposant entier de la puissance de l , et écrire ainsi dans le cas présent, $s - q - q_1 - q'_2 - \text{etc.}$, au lieu de s , et rejeter le terme, si s , ainsi diminué, devient négatif. Enfin, il faut supposer $l = 1$.

Si $\downarrow(t, t_1, t_2, \text{etc.})$, $\phi(t)$, $\phi'(t)$, etc.; $\phi_1(t_1)$, etc. sont des fonctions rationnelles et entières des variables $t, t_1, t_2, \text{etc.}$; de leurs exponentielles, et de sinus et cosinus; toutes les intégrations successives seront possibles, parce qu'il est de la nature de ces fonctions, de se reproduire par les intégrations. Dans les autres cas, les intégrations pourront n'être pas possibles; mais l'analyse précédente réduit alors le problème aux quadratures. Le cas des fonctions rationnelles et entières, offre quelques simplifications que nous allons exposer.

Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} \phi(t) + l^q \cdot \phi'(q+t) + l^{q'} \cdot \phi''(q'+t) + \text{etc.} &= A + B \cdot t + C \cdot t^2 + \text{etc.}, \\ \phi_1(t_1) + l^{q_1} \cdot \phi'_1(q_1+t_1) + l^{q'_1} \cdot \phi''_1(q'_1+t_1) + \text{etc.} &= A_1 + B_1 \cdot t_1 + C_1 \cdot t_1^2 + \text{etc.}, \\ \phi_2(t_2) + l^{q_2} \cdot \phi'_2(q_2+t_2) + l^{q'_2} \cdot \phi''_2(q'_2+t_2) + \text{etc.} &= A_2 + B_2 \cdot t_2 + C_2 \cdot t_2^2 + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et désignons par $H \cdot t^n \cdot t_1^{n_1} \cdot t_2^{n_2} \cdot \text{etc.}$ un terme quelconque de $\downarrow(k+t, k_1+t_1, k_2+t_2, \text{etc.})$; il est facile de s'assurer que la partie de $\Pi(s)$ correspondante à ce terme, est

$$\begin{aligned} 1.2.3 \dots n.1.2.3 \dots n_1.1.2.3 \dots n_2, \text{etc.} \cdot H \cdot s^{i+n+n_1+n_2+\text{etc.}-1} \\ \times [A + (n+1) \cdot B \cdot s + (n+1) \cdot (n+2) \cdot C \cdot s^2 + \text{etc.}] \\ \times [A_1 + (n_1+1) \cdot B_1 \cdot s + (n_1+1) \cdot (n_1+2) \cdot C_1 \cdot s^2 + \text{etc.}]; \quad (\text{B}) \\ \times [A_2 + (n_2+1) \cdot B_2 \cdot s + (n_2+1) \cdot (n_2+2) \cdot C_2 \cdot s^2 + \text{etc.}] \\ \times \text{etc.} \end{aligned}$$

pourvu que dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puissance quelconque a de s , on écrive $\frac{s^a}{1.2.3\dots a}$. On aura ensuite la partie correspondante de la somme entière des valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.})$, multipliées par leurs probabilités respectives, en changeant un terme quelconque de ce développement, tel que $H\lambda. i^\mu . s^a$ dans $H\lambda.(s - \mu)^a$, et en substituant dans H , au lieu de k , la partie de l'exposant μ , qui est relative à la variable t ; au lieu de k_1 , la partie relative à t_1 , et ainsi du reste.

Si dans la formule (B) on suppose $H=1$, et $n, n_1, n_2, \text{etc.}$ nuls; on aura la somme des valeurs de l'unité, multipliées par leur probabilité respective; or il est visible que cette somme n'est autre chose que la somme de toutes les combinaisons dans lesquelles l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} = s$$

a lieu, multipliées par leur probabilité; elle exprime conséquemment la probabilité de cette équation. Si dans les hypothèses précédentes, on suppose de plus que la loi de probabilité est la même pour les r premières variables $t, t_1, t_2, \dots, t_{r-1}$, et que pour les $i-r$ dernières, elle soit encore la même, mais différente que pour les premières; on aura

$$\begin{aligned} A &= A_1 = A_2 \dots = A_{r-1}, \\ B &= B_1 = B_2 \dots = B_{r-1}, \\ &\text{etc.} \\ &\dots\dots\dots \\ A_r &= A_{r+1} \dots = A_{i-1}, \\ B_r &= B_{r+1} \dots = B_{i-1}, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

et la formule (B) se changera dans la suivante,

$$s^{i-1} . (A + B . s + 2C . s^2 + \text{etc.})^r . (A_r + B_r . s + 2C_r . s^2 + \text{etc.})^{i-r}. \quad (\text{C})$$

Cette formule servira à déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un nombre quelconque d'observations dont la loi de facilité des erreurs est connue, sera comprise dans des limites données.

Supposons, par exemple, que l'on ait $i-1$ observations dont les erreurs pour chaque observation puissent s'étendre depuis $-h$ jusqu'à $+g$; et qu'en nommant z l'erreur de la première de ces observations, la loi de facilité de cette erreur soit exprimée par $a + bz + cz^2$. Supposons ensuite que cette loi soit la même, pour les erreurs $z_1, z_2, \dots, z_{i-2}$ des autres observations, et cherchons la probabilité que la somme de ces erreurs, sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait

$$z = t - h, \quad z_1 = t_1 - h, \quad z_2 = t_2 - h, \quad \text{etc.};$$

il est clair que t, t_1, t_2 , etc. seront positifs et pourront s'étendre depuis zéro, jusqu'à $h+g$; de plus, on aura

$$z + z_1 + z_2 \dots + z_{i-2} = t + t_1 + t_2 \dots + t_{i-2} - (i-1).h;$$

donc la plus grande valeur de la somme $z + z_1 + z_2 \dots + z_{i-2}$ étant par la supposition, égale à $p+e$, et la plus petite étant égale à p ; la plus grande valeur de $t + t_1 + t_2 \dots + t_{i-2}$, sera $(i-1).h + p + e$, et la plus petite sera $(i-1).h + p$; en faisant ainsi

$$(i-1).h + p + e = s$$

et

$$t + t_1 + t_2 \dots + t_{i-2} = s - t_{i-1};$$

t_{i-1} sera toujours positif, et pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e . Cela posé, si l'on applique à ce cas, la formule (C); on aura $q = h + g$. D'ailleurs la loi de facilité des erreurs z étant $a + bz + cz^2$, on en conclura la loi de facilité de t , en y changeant z en $t - h$; soit

$$a' = a - bh + ch^2, \quad b' = b - 2ch,$$

on aura $a' + b't + ct^2$ pour cette loi; ce sera donc la fonction $\phi(t)$. Mais comme depuis $t = h + g$ jusqu'à t infini, la facilité des valeurs de t est nulle par l'hypothèse; on aura

$$\phi'(t) + \phi(t) = 0;$$

ce qui donne

$$\phi'(t) = -(a' + b't + ct^2);$$

donc si l'on fait

$$\begin{aligned} a'' &= a' + b'(h+g) + c(h+g)^2, \\ b'' &= b' + 2c(h+g); \end{aligned}$$

on aura

$$\varphi(t) + l^i \cdot \varphi'(q+t) = a' + b't + ct^2 - l^{h+g} \cdot (a'' + b''t + ct^2);$$

et cette équation aura encore lieu, en y changeant t en t_1, t_2 , etc.; puisque la loi de facilité des erreurs est supposée la même pour toutes les observations.

Quant à la variable t_{i-1} , on observera que la probabilité de l'équation

$$z + z_1 + \dots + z_{i-2} = \mu$$

étant, quel que soit μ , égale au produit des probabilités de z, z_1, z_2 , etc.; la probabilité de l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{i-2} = s - t_{i-1},$$

sera égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2 , etc.; la loi de probabilité de t_{i-1} est donc constante et égale à l'unité; et comme cette variable ne doit s'étendre que depuis $t_{i-1} = 0$ jusqu'à $t_{i-1} = e$; on aura

$$q_{i-1} = e, \quad \varphi_{i-1}(t_{i-1}) = 1, \quad \varphi'_{i-1}(t_{i-1}) + \varphi_{i-1}(t_{i-1}) = 0;$$

et par conséquent

$$\varphi'_{i-1}(t_{i-1}) = -1$$

ce qui donne

$$\varphi_{i-1}(t_{i-1}) + l^{q_{i-1}} \cdot \varphi'_{i-1}(q_{i-1} + t_{i-1}) = 1 - l^e;$$

la formule (C) deviendra donc

$$s^{i-1} \cdot [a' + b's + 2cs^2 - l^{h+g} \cdot (a'' + b''s + 2cs^2)]^{i-1} \cdot (1 - l^e). \quad (C')$$

Soit

$$\begin{aligned} (a' + b's + 2cs^2)^{i-1} &= a^{(1)} + b^{(1)}s + c^{(1)}s^2 + f^{(1)}s^3 + \text{etc.}, \\ (a' + b's + 2cs^2)^{i-2} \cdot (a'' + b''s + 2cs^2) &= a^{(2)} + b^{(2)}s + c^{(2)}s^2 + \text{etc.}, \\ (a' + b's + 2cs^2)^{i-3} \cdot (a'' + b''s + 2cs^2) &= a^{(3)} + b^{(3)}s + c^{(3)}s^2 + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

La formule précédente (C') donnera, en y changeant un terme quel-

conque tel que $\lambda. t^{\mu}. s^a$, en

$$\frac{\lambda. (s-\mu)^a}{1.2.3\dots a};$$

$$\frac{1}{1.2.3\dots(i-1)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a^{(1)}. [s^{i-1} - (s-e)^{i-1}] \\ + \frac{b^{(1)}}{i}. [s^i - (s-e)^i] \\ + \frac{c^{(1)}}{i.(i+1)}. [s^{i+1} - (s-e)^{i+1}] \\ + \text{etc.} \\ - (i-1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} a^{(2)}. [(s-h-g)^{i-1} - (s-h-g-e)^{i-1}] \\ + \frac{b^{(2)}}{i}. [(s-h-g)^i - (s-h-g-e)^i] \\ + \frac{c^{(2)}}{i.(i+1)}. [(s-h-g)^{i+1} - (s-h-g-e)^{i+1}] \\ + \text{etc.} \\ + \frac{(i-1).(i-2)}{1.2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a^{(3)}. [(s-2h-2g)^{i-1} - (s-2h-2g-e)^{i-1}] \\ + \frac{b^{(3)}}{i}. [(s-2h-2g)^i - (s-2h-2g-e)^i] \\ + \frac{c^{(3)}}{i.(i+1)}. [(s-2h-2g)^{i+1} - (s-2h-2g-e)^{i+1}] \\ + \text{etc.} \end{array} \right. \\ - \text{etc.} \end{array} \right.$$

Il faut rejeter de cette expression, les termes dans lesquels la quantité élevée sous le signe des puissances, est négative.

Supposons maintenant que z, z_1, z_2 , etc., représentant toujours les erreurs de $i-1$ observations, la loi de facilité, tant de l'erreur z que de l'erreur négative $-z$, soit $\mathcal{E}(h-z)$, et que h et $-h$ soient les limites de ces erreurs. Supposons de plus que cette loi soit la même pour toutes les observations; et cherchons la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites p et $p+e$.

Si l'on fait $z = t-h$, $z_1 = t_1-h$, etc.; il est clair que t, t_1 , etc. seront toujours positifs, et pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $2h$; mais ici la loi de facilité est discontinue en deux points. Depuis $t=0$ jusqu'à $t=h$, elle est exprimée par $\mathcal{E}t$. Depuis $t=h$ jusqu'à $t=2h$, elle est exprimée par $\mathcal{E}(2h-t)$; enfin, elle est nulle depuis

$t = 2h$ jusqu'à t infini. On a donc

$$q = h, \quad q' = 2h;$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathcal{C}t, \\ \varphi'(t) + \varphi(t) &= (2h - t) \cdot \mathcal{C}, \\ \varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t) &= 0,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\varphi'(t) = (2h - 2t) \cdot \mathcal{C}, \quad \varphi''(t) = (t - 2h) \cdot \mathcal{C},$$

ainsi l'on a dans ce cas,

$$\varphi(t) + l \cdot \varphi'(q+t) + l' \cdot \varphi''(q'+t) = \mathcal{C} \cdot t \cdot (1 - l^h)^2;$$

équation qui a encore lieu en y changeant t en t_1, t_2 , etc. Présentement on a

$$z + z_1 + z_2 + \dots + z_{i-1} = t + t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} - (i-1) \cdot h;$$

donc la somme des erreurs z, z_1 , etc. devant être par hypothèse, renfermée dans les limites p et $p + e$, la somme des valeurs de $t, t_1, \dots, t_{i-1}$ sera comprise dans les limites $(i-1) \cdot h + p$ et $(i-1) \cdot h + p + e$; ensorte que si l'on fait

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} = s - t_{i-1},$$

s étant supposé égal à $(i-1) \cdot h + p + e$; t_{i-1} pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e ; et l'on verra, comme dans l'exemple précédent, que sa facilité doit être supposée égale à l'unité dans cet intervalle, et qu'elle doit être supposée nulle au-delà de cet intervalle; ainsi l'on a $q_{i-1} = e$, et

$$\varphi_{i-1}(t_{i-1}) + l^{q_{i-1}} \cdot \varphi'_{i-1}(t_{i-1}) = 1 - l^e.$$

Cela posé, si l'on observe que $2\mathcal{C}f dz \cdot (h - z)$ étant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $-h$ et $+h$, ce qui est certain, on a $\mathcal{C} = \frac{1}{h^2}$; la formule (C) donnera pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2i-2) \cdot h^{2i-2}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & s^{2i-2} - (s-e)^{2i-2} \\ & - (2i-2) \cdot [(s-h)^{2i-2} - (s-h-e)^{2i-2}] \\ & + \frac{(2i-2) \cdot (2i-3)}{1 \cdot 2} \cdot [(s-2h)^{2i-2} - (s-2h-e)^{2i-2}] \\ & - \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

en ayant soin de rejeter tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance $2i-2$, est négative.

Nous allons encore appliquer cette analyse au problème suivant. Si l'on conçoit un nombre i de points rangés en ligne droite, et sur ces points, des ordonnées dont la première soit au moins égale à la seconde, celle-ci au moins égale à la troisième, et ainsi de suite; et que la somme de ces i ordonnées soit constamment égale à s . En supposant s partagé dans une infinité de parties, on peut satisfaire aux conditions précédentes, d'une infinité de manières. On propose de déterminer la valeur de chacune des ordonnées, moyenne entre toutes les valeurs qu'elle peut recevoir.

Soit z la plus petite ordonnée, ou l'ordonnée $i^{\text{ème}}$; soit $z+z_1$, l'ordonnée $(i-1)^{\text{ème}}$; soit $z+z_1+z_2$, l'ordonnée $(i-2)^{\text{ème}}$, et ainsi de suite jusqu'à la première ordonnée qui sera $z+z_1+\dots+z_{i-1}$. Les quantités z, z_1, z_2 , etc. seront ou nulles ou positives, et leur somme $i \cdot z + (i-1) \cdot z_1 + (i-2) \cdot z_2 + \dots + z_{i-1}$ sera, par les conditions du problème, égale à s . Soit

$$i \cdot z = t, \quad (i-1) \cdot z_1 = t_1, \quad (i-2) \cdot z_2 = t_2, \dots, z_{i-1} = t_{i-1};$$

on aura

$$t + t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1} = s;$$

les variables t, t_1, t_2 , etc. pourront s'étendre jusqu'à s . L'ordonnée $i^{\text{ème}}$ sera

$$\frac{t}{i} + \frac{t_1}{i-1} + \dots + \frac{t_{i-1}}{1}.$$

Il faut déterminer la somme de toutes les variations que cette quantité peut recevoir, et la diviser par le nombre total de ces variations, pour avoir l'ordonnée moyenne. La formule (B) donne très-facilement cette somme, en observant qu'ici

$$\psi(t, t_1, t_2, \text{etc.}) = \frac{t}{i} + \frac{t_1}{i-1} + \dots + \frac{t_{i-1}}{1};$$

et on la trouve égale à

$$\frac{s^i}{1.2.3\dots i} \cdot \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i-2} \dots + \frac{1}{r} \right).$$

En divisant cette quantité par le nombre total des combinaisons, qui ne peut être qu'une fonction de i et de s , et que nous désignerons par N , on aura pour la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{i\text{ème}}$,

$$\frac{s^i}{1.2.3\dots i.N} \cdot \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} \dots + \frac{1}{r} \right).$$

Pour déterminer N , nous observerons que toutes les valeurs moyennes doivent ensemble évaluer s ; ce qui donne

$$N = \frac{s^{i-1}}{1.2.3\dots(i-1)};$$

la valeur moyenne de l'ordonnée $r^{i\text{ème}}$ est donc

$$\frac{s}{i} \cdot \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} \dots + \frac{1}{r} \right). \quad (\epsilon)$$

Supposons qu'un effet observé n'ait pu être produit que par l'une des i causes A, B, C , etc.; et qu'une personne, après avoir apprécié leurs probabilités respectives, écrive sur un billet, les lettres qui indiquent ces causes, dans l'ordre des probabilités qu'elle leur attribue, en écrivant la première, la lettre indiquant la cause qui lui semble la plus probable. Il est clair que l'on aura par la formule précédente, la valeur moyenne des probabilités qu'il peut supposer à chacune d'elles, en observant qu'ici la quantité s que l'on doit répartir sur chacune des causes, est la certitude ou l'unité, puisque la personne est assurée que l'effet doit résulter de l'une d'elles. La valeur moyenne de la probabilité qu'elle attribue à la cause qu'elle a placée sur son billet au rang $r^{i\text{ème}}$, est donc

$$\frac{1}{i} \cdot \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} \dots + \frac{1}{r} \right).$$

De là il suit que si un tribunal est appelé à décider sur cet objet, et que chaque membre exprime son opinion par un billet semblable au précédent; alors, en écrivant sur chaque billet, à côté des lettres qui

qui indiquent les causes, les valeurs moyennes qui répondent au rang qu'elles ont sur le billet; en faisant ensuite une somme de toutes les valeurs qui correspondent à chaque cause, sur les divers billets; la cause à laquelle répondra la plus grande somme, sera celle que le tribunal jugera la plus probable.

Cette règle n'est point applicable aux choix des assemblées électorales, parce que les électeurs ne sont point astreints, comme les juges, à répartir une même somme prise pour unité, sur les divers partis entre lesquels ils doivent se déterminer: ils peuvent supposer à chaque candidat, toutes les nuances de mérite comprises entre le mérite nul et le *maximum* de mérite, que nous désignerons par a : l'ordre des noms sur chaque billet, ne fait qu'indiquer que l'électeur préfère le premier au second, le second au troisième, etc. On déterminera ainsi les nombres qu'il faut écrire sur le billet, à côté des noms des candidats.

Soient $t_1, t_2, t_3 \dots t_i$ les mérites respectifs des i candidats, dans l'opinion de l'électeur, t_1 étant le mérite qu'il suppose à celui des candidats qu'il a mis au premier rang, t_2 étant le mérite qu'il suppose au second, et ainsi de suite. L'intégrale $\int t_r . dt_1 . dt_2 \dots dt_i$ exprimera la somme des mérites que l'électeur peut attribuer au candidat r , pourvu que l'on intègre d'abord par rapport à t_i , depuis $t_i = 0$ jusqu'à $t_i = t_{i-1}$; ensuite par rapport à t_{i-1} , depuis t_{i-1} jusqu'à t_{i-2} , et ainsi de suite, jusqu'à l'intégrale relative à t_1 , que l'on prendra depuis t_1 nul jusqu'à $t_1 = a$. Car il est visible qu'alors t_i ne surpasse jamais t_{i-1} , t_{i-1} ne surpasse jamais t_{i-2} , etc. En divisant l'intégrale précédente par celle-ci $\int dt_1 . dt_2 \dots dt_i$ qui exprime la somme totale des combinaisons dans lesquelles la condition précédente est remplie, on aura l'expression moyenne du mérite que l'électeur peut attribuer au candidat $r^{ième}$. En exécutant les intégrations, on trouve $\frac{i-r+1}{i+1} . a$ pour cette expression.

De là il suit que l'on peut écrire sur le billet de chaque électeur, i à côté du premier nom, $i-1$ à côté du second, $i-2$ à côté du troisième, etc. En réunissant ensuite tous les nombres relatifs à chaque candidat, sur les divers billets; celui des candidats qui aura la plus grande somme, doit être présumé le candidat qui, aux yeux

de l'assemblée électorale, a le plus grand mérite, et doit par conséquent être choisi.

Ce mode d'élection serait sans doute le meilleur, si des considérations étrangères au mérite n'influaient point souvent sur le choix des électeurs, même les plus honnêtes, et ne les déterminaient point à placer aux derniers rangs, les candidats les plus redoutables à celui qu'ils préfèrent; ce qui donne un grand avantage aux candidats d'un mérite médiocre. Aussi l'expérience l'a-t-elle fait abandonner aux établissemens qui l'avaient adopté.

Supposons que les erreurs d'une observation puissent s'étendre dans les limites $+a$ et $-a$; mais qu'ignorant la loi de probabilité de ces erreurs, on ne l'assujétisse qu'à la condition de leur donner une probabilité d'autant plus petite, qu'elles sont plus grandes; la probabilité des erreurs positives étant supposée la même que celle des erreurs négatives correspondantes, toutes choses qu'il est naturel d'admettre. La formule (ϵ) donnera encore la loi moyenne des erreurs. Pour cela on concevra l'intervalle a partagé dans un nombre infini i de parties représentées par dx , ensorte que $i = \frac{a}{dx}$; on fera ensuite $r = \frac{x}{dx}$; la formule (ϵ) devient ainsi

$$\frac{s \cdot dx}{a} \cdot \int \frac{dx}{x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=x$ jusqu'à $x=a$; dans la question présente $s = \frac{1}{2}$; car l'erreur devant tomber dans les limites $-a$ et $+a$, la probabilité qu'elle tombera dans les limites 0 et a est $\frac{1}{2}$; c'est la quantité s qu'il faut répartir sur tous les points de l'intervalle a ; la formule (ϵ) devient donc alors

$$\frac{dx}{2a} \cdot \log \frac{a}{x}.$$

Ainsi la loi moyenne des probabilités des erreurs positives x , ou négatives $-x$, est

$$\frac{1}{2a} \cdot \log \frac{a}{x}.$$

CHAPITRE III.

Des lois de la probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.

16. **A** MESURE que les événemens se multiplient, leurs probabilités respectives se développent de plus en plus : leurs résultats moyens et les bénéfices ou les pertes qui en dépendent, convergent vers des limites dont ils approchent avec des probabilités toujours croissantes. La détermination de ces accroissemens et de ces limites, est une des parties les plus intéressantes et les plus délicates de l'analyse des hasards.

Considérons d'abord la manière dont les possibilités de deux événemens simples dont un seul doit arriver à chaque coup, se développent lorsqu'on multiplie le nombre de coups. Il est visible que l'événement dont la facilité est la plus grande, doit probablement arriver plus souvent dans un nombre donné de coups ; et l'on est porté naturellement à penser qu'en répétant les coups un très-grand nombre de fois, chacun de ces événemens arrivera proportionnellement à sa facilité, que l'on pourra ainsi découvrir par l'expérience. Nous allons démontrer analytiquement cet important théorème.

On a vu dans le n° 6 que si p et $1-p$ sont les probabilités respectives de deux événemens a et b ; la probabilité que dans $x+x'$ coups, l'événement a arrivera x fois, et l'événement b , x' fois, est égale à

$$\frac{1.2.3\dots(x+x')}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots x'} \cdot p^x \cdot (1-p)^{x'};$$

c'est le $(x'+1)^{i\text{ème}}$ terme du binôme $[p+(1-p)]^{x+x'}$. Considérons le plus grand de ces termes que nous désignerons par k . Le terme

antérieur sera $\frac{kp}{1-p} \cdot \frac{x'}{x+1}$, et le terme suivant sera $k \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{x}{x'+1}$.
 Pour que k soit le plus grand terme, il faut que l'on ait à la fois

$$\frac{p}{1-p} < \frac{x+1}{x'} > \frac{x}{x'+1};$$

il est facile d'en conclure que si l'on fait $x + x' = n$, on aura

$$x < (n+1) \cdot p > (n+1) \cdot p - 1;$$

ainsi x est le plus grand nombre entier compris dans $(n+1) \cdot p$;
 en faisant donc

$$x = (n+1) \cdot p - s,$$

ce qui donne

$$p = \frac{x+s}{n+1}, \quad 1-p = \frac{x'+1-s}{n+1}, \quad \frac{p}{1-p} = \frac{x+s}{x'+1-s},$$

s sera moindre que l'unité. Si x et x' sont de très-grands nombres, on aura à très-peu près,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{x}{x'};$$

c'est-à-dire que les exposans de p et de $1-p$, dans le plus grand terme du binome, sont à fort peu près dans le rapport de ces quantités; ensorte que de toutes les combinaisons qui peuvent avoir lieu dans un très-grand nombre n de coups, la plus probable est celle dans laquelle chaque événement est répété proportionnellement à sa probabilité.

Le terme $l^{i\text{eme}}$, après le plus grand, est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x'+l)} \cdot p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l}.$$

On a par le n° 32 du premier Livre,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n^{n+\frac{1}{2}} \cdot c^{-n} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{12 \cdot n} + \text{etc.} \right\};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1.2.3\dots(x-l)} = (x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} \cdot \frac{c^{x-l}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{12(x-l)} - \text{etc.} \right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3\dots(x'+l)} = (x'+l)^{-x'-l-\frac{1}{2}} \cdot \frac{c^{x'+l}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{12(x'+l)} - \text{etc.} \right\}.$$

Développons le terme $(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}}$. Son logarithme hyperbolique est

$$(l-x-\frac{1}{2}) \cdot \left[\log x + \log \left(1 - \frac{l}{x} \right) \right];$$

or on a

$$\log \left(1 - \frac{l}{x} \right) = -\frac{l}{x} - \frac{l^2}{2x^2} - \frac{l^3}{3x^3} - \frac{l^4}{4x^4} - \text{etc.};$$

nous négligerons les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, et nous supposons que l ne surpasse point l'ordre n ; alors on pourra négliger les termes de l'ordre $\frac{l^4}{x^3}$, parce que x et x' sont de l'ordre n . On aura ainsi

$$\begin{aligned} & (l-x-\frac{1}{2}) \cdot \left[\log x + \log \left(1 - \frac{l}{x} \right) \right] \\ &= (l-x-\frac{1}{2}) \cdot \log x + l + \frac{l}{2x} - \frac{l^2}{2x} - \frac{l^3}{6x^2}; \end{aligned}$$

ce qui donne, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$(x-l)^{l-x-\frac{1}{2}} = c^{l-\frac{l^2}{2x}} \cdot x^{l-x-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{l}{2x} - \frac{l^3}{6x^2} \right);$$

on aura pareillement,

$$(x'+l)^{-l-x'-\frac{1}{2}} = c^{-l-\frac{l^2}{2x'}} \cdot x'^{-l-x'-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{l}{2x'} + \frac{l^3}{6x'^2} \right).$$

On a ensuite par ce qui précède, $p = \frac{x+s}{n+1}$, s étant moindre que l'unité; en faisant donc $p = \frac{x-z}{n}$, z sera compris dans les limites $\frac{x}{n+1}$ et $-\frac{n-x}{n+1}$, et par conséquent il sera, abstraction faite du signe, au-dessous de l'unité. La valeur de p donne $1-p = \frac{x'+z}{n}$;

on aura donc par l'analyse précédente ,

$$p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l} = \frac{x^{x-l} \cdot x'^{x'+l}}{n^n} \cdot \left(1 + \frac{nz \cdot l}{xx'}\right);$$

de là on tire

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-l) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x'+l)} \cdot p^{x-l} \cdot (1-p)^{x'+l} \\ &= \frac{\sqrt{n} \cdot c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2xx'}} \cdot \left(1 + \frac{nzl}{xx'} + \frac{l(x'-x)}{2xx'} - \frac{l^3}{6x^2} + \frac{l^3}{6x'^2}\right). \end{aligned}$$

On aura le terme antérieur au plus grand terme , et qui en est éloigné à la distance l , en faisant l négatif dans cette équation; en réunissant ensuite ces deux termes, leur somme sera

$$\frac{2 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2xx'}} \cdot c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}$$

L'intégrale finie

$$\Sigma \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2xx'}} \cdot c^{-\frac{nl^2}{2xx'}},$$

prise depuis $l=0$ inclusivement, exprimera donc la somme de tous les termes du binôme $[p + (1-p)]^n$, comprise entre les deux termes, dont l'un a p^{x+l} pour facteur, et l'autre a p^{x-l} pour facteur, et qui sont ainsi équidistans du plus grand terme; mais il faut retrancher de cette somme, le plus grand terme qui y est évidemment compris deux fois.

Maintenant, pour avoir cette intégrale finie, nous observerons que l'on a, par le n° 10 du premier Livre, y étant fonction de l ,

$$\Sigma \cdot y = \frac{1}{c \frac{dl}{dl} - 1} = \left(\frac{dy}{dl}\right)^{-1} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dl}\right)^0 + \frac{1}{12} \cdot \frac{dy}{dl} + \text{etc.};$$

d'où l'on tire par le même numéro ,

$$\Sigma \cdot y = fy dl - \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{12} \cdot \frac{dy}{dl} + \text{etc.} + \text{constante.}$$

y étant ici égal à $\frac{2 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2xx'}} \cdot c^{-\frac{nl^2}{2xx'}}$, les différentielles successives de y acquièrent pour facteur $\frac{nl}{2xx'}$ et ses puissances ; ainsi l étant supposé ne pouvoir être au plus que de l'ordre $\sqrt{n}$, ce facteur est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par conséquent ses différentielles divisées par les puissances respectives de dl , décroissent de plus en plus ; en négligeant donc, comme on l'a fait précédemment, les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, on aura, en faisant commencer avec l les deux intégrales finies et infiniment petites, et désignant par Y le plus grand terme du binome,

$$\Sigma.y = \int y dl - \frac{1}{2}.y + \frac{1}{2}.Y.$$

La somme de tous les termes du binome $[p + (1-p)]^n$ compris entre les deux termes équidistans du plus grand terme du nombre l , étant égale à $\Sigma.y - \frac{1}{2}.Y$, elle sera

$$\int y dl - \frac{1}{2}.y ;$$

et si l'on y ajoute la somme de ces termes extrêmes, on aura pour la somme de tous ces termes,

$$\int y dl + \frac{1}{2}.y.$$

Si l'on fait

$$t = \frac{l \sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}},$$

cette somme devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt \cdot c^{-t^2} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2xx'}} \cdot c^{-t^2}. \quad (o)$$

Les termes que l'on a négligés étant de l'ordre $\frac{1}{n}$, cette expression est d'autant plus exacte, que n est plus grand : elle est rigoureuse, lorsque n est infini. Il serait facile, par l'analyse précédente, d'avoir égard aux termes de l'ordre $\frac{1}{n}$, et des ordres supérieurs.

On a, par ce qui précède, $x = np + z$, z étant un nombre plus

petit que l'unité ; on a donc

$$\frac{x+l}{n} - p = \frac{l+z}{n} = \frac{t \cdot \sqrt{2xx'}}{n \cdot \sqrt{n}} + \frac{z}{n};$$

ainsi la formule (o) exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre de fois que l'événement a doit arriver, au nombre total des coups, et la facilité p de cet événement, est comprise dans les limites

$$\pm \frac{t \cdot \sqrt{2xx'}}{n \cdot \sqrt{n}} + \frac{z}{n} \quad (l)$$

$\sqrt{2xx'}$ étant égal à

$$n \cdot \sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{n} \cdot (1-2p) - \frac{2z^2}{n^2}};$$

on voit que l'intervalle compris entre les limites précédentes est de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si la limite de t , que nous désignerons par T , est supposée invariable, la probabilité déterminée par la fonction (o), reste la même à très-peu près; mais l'intervalle compris entre les limites (l), diminue sans cesse à mesure que les coups se répètent, et il devient nul, lorsque leur nombre est infini.

Cet intervalle étant supposé invariable; lorsque les événements se multiplient, T croît sans cesse, et à fort peu près comme la racine carrée du nombre des coups. Mais lorsque T est considérable, la formule (o) devient, par le n° 27 du premier Livre,

$$1 - \frac{e^{-T^2}}{2T \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \text{etc.}}}}} \\ + \frac{e^{-T^2}}{\sqrt{2n\pi} \cdot \left[p(1-p) + \frac{z}{n} \cdot (1-2p) - \frac{z^2}{n^2} \right]},$$

q étant égal à $\frac{1}{2T^2}$. Lorsqu'on fait croître T , e^{-T^2} diminue avec une
extrême

extrême rapidité, et la probabilité précédente s'approche rapidement de l'unité à laquelle elle devient égale, lorsque le nombre des coups est infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations : l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre de la facilité de l'événement a ; l'autre approximation se rapporte à la probabilité que le rapport des arrivées de cet événement, au nombre total des coups, sera renfermé dans ces limites. La répétition indéfinie des coups accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes : elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même. Dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

L'analyse précédente réunit à l'avantage de démontrer ce théorème, celui d'assigner la probabilité que dans un grand nombre n de coups, le rapport des arrivées de chaque événement sera compris dans des limites données. Supposons, par exemple, que les facilités des naissances des garçons et des filles soient dans le rapport de 18 à 17, et qu'il naisse dans une année, 14000 enfans ; on demande la probabilité que le nombre des garçons ne surpassera pas 7363, et ne sera pas moindre que 7037.

Dans ce cas, on a

$$p = \frac{18}{35}, \quad x = 7200, \quad x' = 6800, \quad n = 14000, \quad l = 163;$$

la formule (o) donne à fort peu près 0,994303 pour la probabilité cherchée.

Si l'on connaît le nombre de fois que sur n coups, l'événement a est arrivé ; la formule (o) donnera la probabilité que sa facilité p supposée inconnue, sera comprise dans des limites données. En effet, si l'on nomme i ce nombre de fois, on aura, par ce qui précède, la probabilité que la différence $\frac{i}{n} - p$ sera comprise dans les limites $\pm \frac{T \cdot \sqrt{2xx'}}{n \cdot \sqrt{n}} + \frac{z}{n}$; par conséquent, on aura la probabilité que p sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T \cdot \sqrt{2xx'}}{n \cdot \sqrt{n}} - \frac{z}{n}.$$

La fonction $\frac{T \cdot \sqrt{2ix'}}{n \cdot \sqrt{n}}$ étant de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, y substituer i au lieu de x , et $n-i$ au lieu de x' ; les limites précédentes deviennent ainsi, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n}$,

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T \cdot \sqrt{2i \cdot (n-i)}}{n \cdot \sqrt{n}};$$

et la probabilité que la facilité de l'événement a est contenue dans ces limites, est égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt \cdot c^{-t^2} + \frac{\sqrt{n} \cdot c^{-T^2}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2i \cdot (n-i)}}. \quad (o')$$

On voit ainsi qu'à mesure que les événements se multiplient, l'intervalle des limites se resserre de plus en plus, et la probabilité que la valeur de p tombe dans ces limites, approche de plus en plus de l'unité ou de la certitude. C'est ainsi que les événements, en se développant, font connaître leurs probabilités respectives.

On parvient directement à ces résultats, en considérant p comme une variable qui peut s'étendre depuis zéro jusqu'à l'unité, et en déterminant, d'après les événements observés, la probabilité de ses diverses valeurs, comme on le verra lorsque nous traiterons de la probabilité des causes, déduite des événements observés.

Si l'on a trois ou un plus grand nombre d'événements a, b, c , etc., dont un seul doit arriver à chaque coup; on aura, par ce qui précède, la probabilité que dans un très-grand nombre n de coups, le rapport du nombre x de fois qu'un de ces événements, a par exemple, arrivera, au nombre n , sera compris dans les limites $p \pm \alpha$, α étant une très-petite fraction; et l'on voit que dans le cas extrême du nombre n infini, l'intervalle 2α de ces limites peut être supposé nul, et la probabilité peut être supposée égale à la certitude, en sorte que les nombres des arrivées de chaque événement seront proportionnels à leurs facilités respectives.

Quelquefois les événements, au lieu de faire connaître directement les limites de la valeur de p , donnent celles d'une fonction de cette

valeur ; alors on en conclut les limites de p , par la résolution des équations. Pour en donner un exemple fort simple, considérons deux joueurs A et B , dont les adresses respectives soient p et $1 - p$, et jouant ensemble à cette condition, que la partie soit gagnée par celui des deux joueurs qui, sur trois coups, aura vaincu deux fois son adversaire, le troisième coup n'étant pas joué, comme inutile, lorsque l'un des joueurs a vaincu dans les deux premiers coups.

La probabilité de A pour gagner la partie, est la somme des deux premiers termes du binôme $[p + (1 - p)]^3$; elle est par conséquent égale à $p^3 + 3p^2 \cdot (1 - p)$. Soit P cette fonction ; en élevant le binôme $P + (1 - P)$ à la puissance n , on aura, par l'analyse précédente, la probabilité que sur le nombre n de parties, le nombre des parties gagnées par A sera compris dans des limites données. Il suffit pour cela de changer p en P dans la formule (o).

Si l'on nomme i le nombre des parties gagnées par A , la formule (o') donnera la probabilité que P sera compris dans les limites

$$\frac{i}{n} \mp \frac{T \cdot \sqrt{2i \cdot (n-i)}}{n \cdot \sqrt{n}}.$$

Soit donc p' la racine réelle et positive de l'équation

$$p^3 + 3p^2 \cdot (1 - p) = \frac{i}{n};$$

en désignant par $p' \mp \delta p$ les limites de p , les limites correspondantes de P seront à très-peu près $3p'^2 - 2p'^3 \mp 6p' \cdot (1 - p') \cdot \delta p$; en égalant ces limites aux précédentes, on aura

$$\delta p = \frac{T \cdot \sqrt{2i \cdot (n-i)}}{6p' \cdot (1 - p') \cdot n \cdot \sqrt{n}};$$

ainsi la formule (o') donnera la probabilité que p sera compris dans les limites

$$p' \mp \frac{T \cdot \sqrt{2i \cdot (n-i)}}{6p' \cdot (1 - p') \cdot n \cdot \sqrt{n}}.$$

Le nombre n des parties ne détermine pas le nombre des coups, puisqu'il peut y avoir des parties de deux coups, et d'autres de

trois coups. On aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups, sera compris dans des limites données, en observant que la probabilité d'une partie à deux coups, est $p^2 + (1-p)^2$; désignons cette fonction par P' . En élevant le binôme $P' + (1-P')$ à la puissance n , la formule (o) donnera la probabilité que le nombre des parties de deux coups sera compris dans les limites $nP' \pm l$; or le nombre des parties de deux coups étant $nP' \pm l$, le nombre des parties à trois coups sera $n(1-P') \mp l$; le nombre total des coups sera donc $5n - nP' \mp l$; la formule (o) donnera donc la probabilité que le nombre des coups sera compris dans les limites

$$2n.(1+p-p^2) \mp T.\sqrt{2nP'.(1-P')}.$$

17. Considérons une urne A renfermant un très-grand nombre n de boules blanches et noires, et supposons qu'à chaque tirage, on tire une boule de l'urne, et qu'on la remplace par une boule noire. On demande la probabilité qu'après r tirages, le nombre des boules blanches sera x .

Nommons $y_{x,r}$ cette probabilité. Après un nouveau tirage, elle devient $y_{x,r+1}$. Mais pour qu'il y ait x boules blanches après $r+1$ tirages, il faut qu'il y ait ou $x+1$ boules blanches après le tirage r , et que le tirage suivant fasse sortir une boule blanche, ou x boules blanches après le tirage r , et que le tirage suivant fasse sortir une boule noire. La probabilité qu'il y aura $x+1$ boules blanches après r tirages, est $y_{x+1,r}$, et la probabilité qu'alors le tirage suivant fera sortir une boule blanche, est $\frac{x+1}{n}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{x+1}{n} \cdot y_{x+1,r}$; c'est la première partie de $y_{x,r+1}$. La probabilité qu'il y aura x boules blanches après le tirage r , est $y_{x,r}$; et la probabilité qu'alors il sortira une boule noire, est $\frac{n-x}{n}$, parce que le nombre des boules noires de l'urne est $n-x$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{n-x}{n} \cdot y_{x,r}$; c'est la seconde partie de $y_{x,r+1}$. Ainsi l'on a

$$y_{x,r+1} = \frac{x+1}{n} \cdot y_{x+1,r} + \frac{n-x}{n} \cdot y_{x,r}.$$

Si l'on fait

$$x = nx', \quad r = nr', \quad y_{x,r} = y'_{x',r'},$$

cette équation devient

$$y'_{x', r' + \frac{1}{n}} = \left(x' + \frac{1}{n}\right) \cdot y'_{x' + \frac{1}{n}, r'} + (1 - x') \cdot y'_{x', r'},$$

n étant supposé un très-grand nombre, on peut réduire en séries convergentes $y'_{x', r' + \frac{1}{n}}$ et $y'_{x' + \frac{1}{n}, r'}$; on aura donc, en négligeant les carrés et les puissances supérieures de $\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{dy'_{x', r'}}{dr'}\right) = \frac{x'}{n} \cdot \left(\frac{dy'_{x', r'}}{dx'}\right) + \frac{1}{n} \cdot y'_{x', r'};$$

l'intégrale de cette équation aux différences partielles est

$$y'_{x', r'} = c'' \cdot \phi(x' \cdot c''),$$

$\phi(x' \cdot c'')$ étant une fonction arbitraire de $x' \cdot c''$, qu'il faut déterminer par la valeur de $y'_{x', 0}$.

Supposons que l'urne $\mathcal{A}$ ait été remplie de cette manière. On projette un prisme droit dont la base étant un polygone régulier de $p + q$ côtés, est assez étroite pour que le prisme ne retombe jamais sur elle. Sur les $p + q$ faces latérales, p sont blanches et q sont noires, et l'on met dans l'urne $\mathcal{A}$, à chaque projection, une boule de la couleur de la face sur laquelle le prisme retombe. Après n projections, le nombre des boules blanches sera à fort peu près, par le n° précédent, $\frac{n \cdot p}{p + q}$, et la probabilité qu'il sera $\frac{n \cdot p}{p + q} + l$, est, par le même numéro,

$$\frac{p + q}{\sqrt{2npq \cdot \pi}} \cdot c - \frac{(p + q)^2 \cdot l^2}{2npq}.$$

Si l'on fait

$$x = \frac{np}{p + q} + l, \quad \frac{(p + q)^2}{2pq} = i^2,$$

cette fonction devient

$$\frac{i}{\sqrt{\pi n}} \cdot c - \frac{i^2}{n} \cdot \left(x - \frac{np}{p + q}\right)^2;$$

c'est la valeur de $y_{x,s}$, ou de $y'_{x',s}$; mais la valeur précédente de $y'_{x',r}$ donne

$$y_{x,s} = \Phi\left(\frac{x}{n}\right);$$

on a donc

$$\Phi\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{i}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-i^2 \cdot n \cdot \left(\frac{x}{n} - \frac{p}{p+q}\right)^2},$$

partant,

$$y'_{x',r} = \frac{i \cdot c^r}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-i^2 \cdot n \cdot \left(\frac{x \cdot c^r}{n} - \frac{p}{p+q}\right)^2}$$

d'où l'on tire

$$y_{x,r} = \frac{i \cdot c^{\frac{r}{n}}}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-i^2 \cdot \left(x \cdot c^{\frac{r}{n}} - \frac{np}{p+q}\right)^2}.$$

La valeur de x la plus probable est celle qui rend nul $x \cdot c^{\frac{r}{n}} - \frac{np}{p+q}$, et par conséquent elle est égale à

$$\frac{\frac{np}{p+q}}{c^{\frac{r}{n}}};$$

la probabilité que la valeur de x sera contenue dans les limites

$$\frac{\frac{np}{p+q}}{c^{\frac{r}{n}}} \pm \frac{\mu \cdot \sqrt{n}}{c^{\frac{r}{n}}},$$

est

$$2 \cdot \int \frac{id\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot c^{-i^2 \mu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = 0$.

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne $\mathcal{A}$, après r tirages. Cette valeur est la somme de tous les nombres possibles de boules blanches, multipliés par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à

$$\frac{2np}{(p+q) \cdot c^{\frac{r}{n}}} \cdot \int \frac{id\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot c^{-i^2 \mu^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \infty$. Cette valeur est ainsi

$$\frac{np}{(p+q) \cdot c^{\frac{r}{n}}};$$

par conséquent, elle est la même que la valeur de x la plus probable.

Considérons maintenant deux urnes A et B renfermant chacune le nombre n de boules, et supposons que dans le nombre total $2n$ des boules, il y en ait autant de blanches que de noires. Concevons que l'on tire en même tems, une boule, de chaque urne, et qu'ensuite on mette dans une urne, la boule extraite de l'autre. Supposons que l'on répète cette opération, un nombre quelconque r de fois, en agitant à chaque fois les urnes, pour en bien mêler les boules; et cherchons la probabilité qu'après ce nombre r d'opérations, il y aura x boules blanches dans l'urne A .

Soit $z_{x,r}$, cette probabilité. Le nombre des combinaisons possibles dans r opérations, est n^r ; car à chaque opération, les n boules de l'urne A peuvent se combiner avec chacune des n boules de l'urne B , ce qui produit n^2 combinaisons; $n^{x \cdot z_{x,r}}$ est donc le nombre des combinaisons dans lesquelles il peut y avoir x boules blanches dans l'urne A après ces opérations. Maintenant, il peut arriver que l'opération $(r+1)^{ième}$ fasse sortir une boule blanche de l'urne A , et y fasse rentrer une boule blanche; le nombre de cas dans lesquels cela peut arriver, est le produit de $n^{x \cdot z_{x,r}}$ par le nombre x des boules blanches de l'urne A , et par le nombre $n-x$ des boules blanches qui doivent être alors dans l'urne B , puisque le nombre total des boules blanches des deux urnes, est n . Dans tous ces cas, il reste x boules blanches dans l'urne A ; le produit $x \cdot (n-x) \cdot n^{x \cdot z_{x,r}}$ est donc une des parties de $n^{x+1 \cdot z_{x,r+1}}$.

Il peut arriver encore que l'opération $(r+1)^{ième}$ fasse sortir et rentrer dans l'urne A , une boule noire, ce qui conserve dans cette urne, x boules blanches. Ainsi $n-x$ étant après l'opération $r^{ième}$, le nombre des boules noires de l'urne A , et x étant celui des boules noires de l'urne B , $(n-x) \cdot x \cdot n^{x \cdot z_{x,r}}$ est encore une partie de $n^{x+1 \cdot z_{x,r+1}}$.

S'il y a $x-1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{ième}$,

et que l'opération suivante en fasse sortir une boule noire, et y fasse rentrer une boule blanche; il y aura x boules blanches dans l'urne A après l'opération $(r+1)^{ième}$; le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver, est le produit de $n^{2r} \cdot z_{x-1,r}$ par le nombre $n-x+1$ des boules noires de l'urne A après le tirage $r^{ième}$, et par le nombre $n-x+1$ des boules blanches de l'urne B , après la même opération; $(n-x+1)^2 \cdot n^{2r} \cdot z_{x-1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2} \cdot z_{x,r+1}$.

Enfin, s'il y a $x+1$ boules blanches dans l'urne A après l'opération $r^{ième}$, et que l'opération suivante en fasse sortir une boule blanche, et y fasse rentrer une boule noire; il y aura encore, après cette dernière opération, x boules blanches dans l'urne. Le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver, est le produit de $n^{2r} \cdot z_{x+1,r}$ par le nombre $x+1$ des boules blanches de l'urne A , et par le nombre $x+1$ des boules noires de l'urne B après l'opération $r^{ième}$; $(x+1)^2 \cdot n^{2r} \cdot z_{x+1,r}$ est donc encore une partie de $n^{2r+2} \cdot z_{x,r+1}$.

En réunissant toutes ces parties, et en égalant leur somme à $n^{2r+2} \cdot z_{x,r+1}$, on aura l'équation aux différences finies partielles,

$$z_{x,r+1} = \left(\frac{x+1}{n}\right)^2 \cdot z_{x+1,r} + \frac{2x}{n} \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right) \cdot z_{x,r} + \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)^2 \cdot z_{x-1,r}.$$

Quoique cette équation soit aux différences du second ordre par rapport à la variable x , cependant son intégrale ne renferme qu'une fonction arbitraire qui dépend de la probabilité des diverses valeurs de x dans l'état initial de l'urne A . En effet, il est visible que si l'on connaît les valeurs de $z_{x,0}$ correspondantes à toutes les valeurs de x , depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$; l'équation précédente donnera toutes les valeurs de $z_{x,1}$, $z_{x,2}$, etc., en observant que les valeurs négatives de x étant impossibles, $z_{x,r}$ est nul lorsque x est négatif.

Si n est un très-grand nombre, cette équation se transforme dans une équation aux différences partielles que l'on obtient ainsi. On a alors à très-peu près,

$$\begin{aligned} z_{x+1,r} &= z_{x,r} + \left(\frac{dz_{x,r}}{dx}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 z_{x,r}}{dx^2}\right); \\ z_{x-1,r} &= z_{x,r} - \left(\frac{dz_{x,r}}{dx}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 z_{x,r}}{dx^2}\right); \\ z_{x,r+1} &= z_{x,r} + \left(\frac{dz_{x,r}}{dx}\right) \end{aligned}$$

Soit

Soit

$$x = \frac{n + \mu \cdot \sqrt{n}}{2}, \quad r = nr', \quad z_{x,r} = U;$$

l'équation précédente aux différences finies partielles deviendra, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{n^2}$,

$$\left(\frac{dU}{dr'}\right) = 2U + 2\mu \cdot \left(\frac{dU}{d\mu}\right) + \left(\frac{d^2U}{d\mu^2}\right).$$

Pour intégrer cette équation qui, comme on peut s'en assurer par la méthode que j'ai donnée pour cet objet, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, de l'année 1773, n'est intégrable en termes finis, qu'au moyen d'intégrales définies; faisons

$$U = f\phi dt \cdot c^{-\mu t},$$

ϕ étant fonction de t et de r' . On aura

$$\begin{aligned} 2\mu \cdot \left(\frac{dU}{d\mu}\right) &= 2c^{-\mu t} \cdot t\phi - 2fc^{-\mu t} \cdot (\phi dt + t d\phi), \\ \left(\frac{ddU}{d\mu^2}\right) &= fc^{-\mu t} \cdot t^2 \phi dt; \end{aligned}$$

l'équation aux différentielles partielles en U , devient ainsi

$$fc^{-\mu t} \cdot \left(\frac{d\phi}{dr'}\right) \cdot dt = 2c^{-\mu t} \cdot t\phi + fc^{-\mu t} \cdot dt \cdot \left[t^2 \phi - 2t \cdot \left(\frac{d\phi}{dt}\right)\right].$$

En égalant entre eux les termes affectés du signe f , on aura l'équation aux différentielles partielles,

$$\left(\frac{d\phi}{dr'}\right) = t^2 \phi - 2t \cdot \left(\frac{d\phi}{dt}\right).$$

Le terme hors du signe f , égalé à zéro, donnera pour l'équation aux limites de l'intégrale,

$$0 = t\phi \cdot c^{-\mu t}.$$

L'intégrale de l'équation précédente aux différentielles partielles de ϕ , est

$$\phi = c^{\frac{1}{4}t^2} \cdot \psi\left(\frac{t}{c^{2r'}}\right),$$

$\psi\left(\frac{t}{c^{2i'}}$ étant une fonction arbitraire de $\frac{t}{c^{2i'}}$; on a donc

$$U = \int dt . c^{-\mu' + \frac{1}{4} t^2} . \psi\left(\frac{t}{c^{2i'}}\right).$$

Soit

$$t = 2\mu + 2s\sqrt{-1},$$

l'expression de U prendra cette forme,

$$U = c^{-\mu^2} . \int ds . c^{-s^2} . \Gamma\left(\frac{s - \mu\sqrt{-1}}{c^{2i'}}$$

Il est facile de voir que l'équation précédente, aux limites de l'intégrale, exige que les limites de l'intégrale relative à s , soient prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$. En prenant le radical $\sqrt{-1}$, avec le signe $-$, on aurait pour U une expression de cette forme,

$$U = c^{-\mu^2} . \int ds . c^{-s^2} . \Pi\left(\frac{s + \mu\sqrt{-1}}{c^{2i'}}$$

la fonction arbitraire $\Pi(s)$ pouvant être différente de $\Gamma(s)$. La somme de ces deux expressions de U sera sa valeur complète. Mais il est facile de s'assurer que les intégrales étant prises depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'addition de cette nouvelle expression de U n'ajoute rien à la généralité de la première, dans laquelle elle est comprise.

Développons maintenant le second membre de l'équation (A), suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2i'}}$, et considérons un des termes de ce développement, tel que

$$\frac{H^{(i)} . c^{-\mu^2}}{c^{4i'}}$$

ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5\dots(2i-1)}{2^i} . \sqrt{\pi} . \frac{H^{(i)} . c^{-\mu^2}}{c^{4i'}}$$

$$\times \left[1 - \frac{i.(2\mu)^2}{1.2} + \frac{i.(i-1).(2\mu)^4}{1.2.3.4} - \frac{i.(i-1).(i-2).(2\mu)^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \right].$$

Considérons encore un terme de ce développement, relatif aux

puissances impaires de $\frac{1}{c^{2r'}}$, tel que

$$\frac{L^{(i)} \cdot \sqrt{-1} \cdot c^{-\mu^2}}{c^{(i+2)r'}} \cdot f ds \cdot c^{-s^2} \cdot (s - \mu \sqrt{-1})^{2i+1}.$$

Ce terme devient, après les intégrations,

$$\frac{1.3.5 \dots (2i+1) \cdot L^{(i)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \mu \cdot c^{-\mu^2}}{2^i \cdot c^{(i+2)r'}} \cdot \left[1 - \frac{i \cdot (2\mu)^2}{1.2.3} + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (2\mu)^4}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \right]$$

On aura donc ainsi l'expression générale de la probabilité U , développée dans une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{c^{2r'}}$. série qui devient très-convergente, lorsque r' est un nombre considérable. Cette expression doit être telle, que $\int U dx$ ou $\frac{1}{2} \cdot \int U d\mu \cdot \sqrt{n}$ soit égale à l'unité, les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de x et de μ , c'est-à-dire depuis x nul jusqu'à $x = n$, et depuis $\mu = -\sqrt{n}$ jusqu'à $\mu = \sqrt{n}$; car il est certain que l'une des valeurs de x devant avoir lieu, la somme des probabilités de toutes ces valeurs doit être égale à l'unité. En prenant l'intégrale $\int c^{-\mu^2} \cdot d\mu$ dans les limites de μ , on a le même résultat à très-peu près, qu'en la prenant depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$: la différence n'est que de l'ordre $\frac{c^{-n}}{\sqrt{n}}$; et vu l'extrême rapidité avec laquelle c^{-n} diminue à mesure que n augmente, on voit que cette différence est insensible lorsque n est un grand nombre. Cela posé, considérons dans l'intégrale $\frac{1}{2} \cdot \int U d\mu \cdot \sqrt{n}$, le terme

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1) \cdot \frac{1}{2} H^{(i)} \cdot \sqrt{n\pi}}{2^i \cdot c^{4ir'}} \times \int d\mu \cdot c^{-\mu^2} \cdot \left[1 - \frac{i \cdot (2\mu)^2}{1.2} + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (2\mu)^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \right].$$

En étendant l'intégrale depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, ce terme devient

$$\frac{1.3.5 \dots (2i-1) \cdot \frac{1}{2} H^{(i)} \cdot \pi \sqrt{n}}{2^i \cdot c^{4ir'}} \cdot \left[1 - i + \frac{i \cdot (i-1)}{1.2} - \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1.2.3} + \text{etc.} \right]$$

Le facteur $1 - i + \frac{i \cdot (i-1)}{1.2} - \text{etc.}$ est égal à $(1-1)^i$; il est donc nul,

excepté dans le cas de $i=0$, où il se réduit à l'unité. Il est visible que les termes de l'expression de U qui renferment des puissances impaires de μ , donnent un résultat nul dans l'intégrale $\frac{1}{2} \cdot \int U d\mu \cdot \sqrt{n}$, étendue depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; car ces termes ont pour facteur $e^{-\mu^2}$, et l'on a généralement dans ces limites,

$$\int \mu^{2i+1} \cdot d\mu \cdot e^{-\mu^2} = 0.$$

Il n'y a donc que le premier terme de l'expression de U , terme que nous représenterons par $H \cdot e^{-\mu^2}$, qui puisse donner un résultat dans l'intégrale $\frac{1}{2} \cdot \int U d\mu \cdot \sqrt{n}$, et ce résultat est $\frac{1}{2} \cdot H \cdot \sqrt{n\pi}$; on a donc

$$\frac{1}{2} \cdot H \cdot \sqrt{n\pi} = 1;$$

par conséquent,

$$H = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}.$$

L'expression générale de U a ainsi la forme suivante,

$$U = \frac{2e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q^{(1)} \cdot (1-2\mu^2)}{e^{4r'}} + \frac{Q^{(2)} (1-4\mu^2 + \frac{4}{3}\mu^4)}{e^{8r'}} + \text{etc.} \right. \\ \left. + \frac{L^{(1)} \cdot \mu}{e^{2r'}} + \frac{L^{(1)} \cdot \mu \cdot (1-\frac{2}{3}\mu^2)}{e^{6r'}} + \frac{L^{(2)} \cdot \mu \cdot (1-\frac{4}{3}\mu^2 + \frac{4}{15}\mu^4)}{e^{10r'}} + \text{etc.} \right\}; (k)$$

$Q^{(1)}, Q^{(2)}, \text{etc.}, L^{(1)}, L^{(2)}, \text{etc.}$ étant des constantes indéterminées qui dépendent de la valeur initiale de U .

Supposons que U devienne X lorsque r est nul, X étant une fonction donnée de μ . On a généralement ces deux théorèmes,

$$0 = Q^{(i)} \cdot \int \mu^{2q} \cdot d\mu \cdot U_i \cdot e^{-\mu^2},$$

$$0 = L^{(i)} \cdot \int \mu^{2q+1} \cdot d\mu \cdot U'_i \cdot e^{-\mu^2},$$

lorsque q est moindre que i ; U_i et U'_i étant des fonctions de μ , par lesquelles $\frac{2Q^{(i)} \cdot e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi} \cdot e^{(i+1)r'}}$ et $\frac{2L^{(i)} \cdot e^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi} \cdot e^{(i+1)r'}}$ sont multipliés dans l'expression de U . Pour démontrer ces théorèmes, nous observerons

que, par ce qui précède, $\frac{{}_2Q^{(i)}.c^{-\mu^2}.U_i}{\sqrt{n\pi}}$ est égal à

$$(\sqrt{-1})^{2i}.H^{(i)}.c^{-\mu^2}.f ds.c^{-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i};$$

il faut donc faire voir que l'on a

$$0 = \iint \mu^{2q}.ds.d\mu.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i};$$

les intégrales étant prises depuis μ et s égaux à $-\infty$ jusqu'à μ et s égaux à $+\infty$. En intégrant d'abord par rapport à μ , ce terme devient

$$\begin{aligned} & \frac{(2q-1)}{2}.\iint \mu^{2q-2}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i} \\ & + i.\iint \mu^{2q-1}.d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i-1}. \end{aligned}$$

En continuant d'intégrer ainsi par parties relativement à μ , on parvient enfin à des termes de la forme

$$k.\iint d\mu.ds.c^{-\mu^2-s^2}.(\mu+s\sqrt{-1})^{2i},$$

k n'étant pas zéro, et par ce qui précède, ces termes sont nuls.

On prouvera de la même manière, que l'on a

$$0 = L^{(i)}.f\mu^{2q+1}.d\mu.U'_i.c^{-\mu^2}.$$

De là il suit que l'on a généralement

$$0 = \int U_i.U_\nu.d\mu.c^{-\mu^2}, \quad 0 = \int U'_i.U'_{\nu'}.d\mu.c^{-\mu^2},$$

i et i' étant des nombres différens. Car si, par exemple, i' est plus grand que i , toutes les puissances de μ dans U_i , sont moindres que $2i'$; chacun des termes de U_i donnera donc, par ce qui précède, un résultat nul dans l'intégrale $\int U_i.U_\nu.d\mu.c^{-\mu^2}$. Le même raisonnement a lieu pour l'intégrale $\int U'_i.U'_{\nu'}.d\mu.c^{-\mu^2}$.

Mais ces intégrales ne sont pas nulles, lorsque $i=i'$. On les

obtiendra dans ce cas, de cette manière. On a, par ce qui précède,

$$U_i = \frac{2^i \cdot (\sqrt{-1})^{2i} \cdot \text{fils} \cdot c^{-s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1) \cdot \sqrt{\pi}};$$

Le terme qui a pour facteur μ^{2i} dans cette expression, est

$$\frac{2^i \cdot (\sqrt{-1})^{2i} \cdot \mu^{2i}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)};$$

or, on peut ne considérer que ce terme dans le premier facteur U_i de l'intégrale $\int U_i \cdot U_i \cdot d\mu \cdot c^{-\mu^2}$; car les puissances inférieures de μ , dans ce facteur, donnent un résultat nul dans l'intégrale. On a donc

$$\begin{aligned} & \int U_i \cdot U_i \cdot d\mu \cdot c^{-\mu^2} \\ &= \frac{2^{2i}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)]^2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \iint \mu^{2i} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i}. \end{aligned}$$

On a, en intégrant par rapport à μ , depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$,

$$\begin{aligned} & \iint \mu^{2i} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ &= \frac{(2i-1)}{2} \cdot \iint \mu^{2i-2} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} \\ & \quad + \frac{2i}{2} \cdot \iint \mu^{2i-1} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de cette équation est nul par ce qui précède; ce membre se réduit donc à son second terme. On trouve de la même manière, que l'on a

$$\begin{aligned} & \iint \mu^{2i-1} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1} \\ &= \frac{(2i-1)}{2} \cdot \iint \mu^{2i-3} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i-1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite; on a donc

$$\iint \mu^{2i} \cdot d\mu \cdot ds \cdot c^{-\mu^2 - s^2} \cdot (\mu + s\sqrt{-1})^{2i} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2i \cdot \pi}{2^{2i}};$$

par conséquent

$$\int U_i \cdot U_i \cdot d\mu \cdot c^{-\mu^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i \cdot \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}.$$

On trouvera de la même manière,

$$\int U'_i \cdot U'_i \cdot d\mu \cdot c^{-\mu^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i \cdot \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1)}.$$

On a évidemment,

$$\int U_i \cdot U_{i'} \cdot d\mu \cdot c^{-\mu^2} = 0,$$

dans le cas même où i et i' sont égaux, parce que le produit $U_i \cdot U_{i'}$ ne contient que des puissances impaires de μ . Cela posé.

L'expression générale de U donne pour sa valeur initiale, que nous avons désignée par X ,

$$X = \frac{2c^{-\mu^2}}{\sqrt{n\pi}} \cdot \left\{ 1 + Q^{(1)} \cdot (1 - 2\mu^2) + \text{etc.} \right. \\ \left. + L^{(0)} \cdot \mu + L^{(1)} \cdot \mu \cdot (1 - \frac{2}{3}\mu^2) + \text{etc.} \right\}.$$

Si l'on multiplie cette équation par $U_i \cdot d\mu$, et si l'on prend les intégrales depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$, on aura, en vertu des théorèmes précédents,

$$\int X U_i \cdot d\mu = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \cdot Q^{(1)} \cdot \int U_i \cdot U_i \cdot d\mu \cdot c^{-\mu^2};$$

d'où l'on tire

$$Q^{(1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} \cdot \int X U_i \cdot d\mu;$$

on trouvera de la même manière,

$$L^{(0)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1) \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} \cdot \int X U'_i \cdot d\mu.$$

On aura donc ainsi les valeurs successives de $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, etc.; $L^{(0)}$, $L^{(1)}$, etc., au moyen d'intégrales définies, lorsque X ou la valeur initiale de U sera donnée.

Dans le cas où X est égal à $\frac{2i}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-i^2\mu^2}$, l'expression générale de U prend une forme très-simple. Alors la fonction arbitraire

$\Gamma\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{c^{1/r'}}\right)$ de la formule (A) est de la forme $k.c^{-\mathcal{E}.\left(\frac{s-\mu\sqrt{-1}}{c^{1/r'}}\right)^2}$.

Pour déterminer les constantes $\mathcal{E}$ et k , nous observerons qu'en supposant

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{c^{1/r'}},$$

on aura

$$U = k.c^{-\frac{\mu^2}{1+\mathcal{E}'}} \cdot \int ds.c^{-(1+\mathcal{E}').\left(s-\frac{\mathcal{E}'.\mu\sqrt{-1}}{1+\mathcal{E}'}\right)^2}.$$

En faisant ensuite

$$\sqrt{1+\mathcal{E}'}.\left(s-\frac{\mathcal{E}'.\mu\sqrt{-1}}{1+\mathcal{E}'}\right) = s',$$

et observant que l'intégrale relative à s devant être prise depuis $s = -\infty$ jusqu'à $s = \infty$, l'intégrale relative à s' doit être prise dans les mêmes limites, on aura

$$U = \frac{k.\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\mathcal{E}'}} \cdot c^{-\frac{\mu^2}{1+\mathcal{E}'}}.$$

En comparant cette expression à la valeur initiale de U , qui est

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-i^2\mu^2};$$

et observant que $\mathcal{E}$ est la valeur initiale de $\mathcal{E}'$, on aura

$$i^2 = \frac{1}{1+\mathcal{E}};$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{E} = \frac{1-i^2}{i^2}, \quad \mathcal{E}' = \frac{1-i^2}{i^2.c^{1/r'}}.$$

On doit avoir ensuite

$$\frac{k.\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\mathcal{E}}} = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}};$$

ce qui donne

$$k.\sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{n\pi}},$$

valeur que l'on obtient encore, par la condition que $\frac{1}{2} \cdot \int U.d\mu.\sqrt{n} = i$,
l'intégrale

l'intégrale étant prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$; on aura donc pour l'expression de U , quel que soit r' ,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi \cdot (1 + \epsilon')}} \cdot c^{-\frac{\mu^2}{1 + \epsilon'}}.$$

On trouve en effet, que cette valeur de U , substituée dans l'équation aux différentielles partielles en U , y satisfait.

ϵ' diminuant sans cesse quand r' augmente, la valeur de U varie sans cesse, et devient à sa limite, lorsque r' est infini,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-\mu^2}.$$

Pour donner une application de ces formules, imaginons dans une urne C , un très-grand nombre m de boules blanches, et un pareil nombre de boules noires. Ces boules ayant été mêlées, supposons que l'on tire de l'urne, n boules que l'on met dans l'urne A . Supposons ensuite que l'on mette dans l'urne B , autant de boules blanches, qu'il y a de boules noires dans l'urne A , et autant de boules noires, qu'il y a de boules blanches dans la même urne. Il est clair que le nombre des cas dans lesquels il y aura x boules blanches, et par conséquent $n - x$ boules noires dans l'urne A , est égal au produit du nombre des combinaisons des m boules blanches de l'urne C , prises x à x , par le nombre des combinaisons des m boules noires de la même urne, prises $n - x$ à $n - x$. Ce produit est, par le n° 3, égal à

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x} \cdot \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-n+x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-x)},$$

ou à

$$\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-x) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-x) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-n+x)}.$$

Le nombre de tous les cas possibles est le nombre des combinaisons des $2m$ boules de l'urne C , prises n à n ; ce nombre est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2m-n)};$$

en divisant la fraction précédente par celle-ci, on aura, pour la

probabilité de x , ou pour la valeur initiale de U ,

$$\frac{(1.2.3\dots m)^2.1.2.3\dots n.1.2.3\dots(2m-n)}{1.2.3\dots x.1.2.3\dots(m-x).1.2.3\dots(n-x).1.2.3\dots(m-n+x).1.2.3\dots 2m}.$$

Maintenant, si l'on observe que l'on a à très-peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$1.2.3\dots s = s^{s+\frac{1}{2}} \cdot e^{-s} \cdot \sqrt{2\pi};$$

on trouvera facilement après toutes les réductions, en faisant

$$x = \frac{n + \mu \cdot \sqrt{n}}{2},$$

et en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{n}$, qui ne sont pas multipliées par μ^2 ,

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2m-n}} \cdot e^{-\frac{m\mu^2}{2m-n}};$$

en faisant donc

$$i^2 = \frac{n}{2m-n};$$

on aura

$$U = \frac{2i}{\sqrt{n\pi}} \cdot e^{-i^2\mu^2}.$$

Si le nombre m est infini, alors $i^2 = \frac{1}{2}$, et la valeur initiale de U est

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mu^2}.$$

Sa valeur, après un nombre quelconque de tirages, est

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi \cdot \left(1 + c^{-\frac{4r}{n}}\right)}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{1 + c^{-\frac{4r}{n}}}}.$$

Le cas de m infini revient à celui dans lequel les urnes A et B seraient remplies, en projetant n fois une pièce qui amènerait indifféremment *croix* ou *pile*, et mettant dans l'urne A , une boule

blanche, chaque fois que *croix* arriverait, et une boule noire, chaque fois que *pile* arriverait ; et faisant l'inverse pour l'urne *B*. Car il est visible que la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne *C*, est alors $\frac{1}{2}$, comme celle d'amener *croix* ou *pile*.

En prenant l'intégrale $\int U dx$, ou $\frac{1}{2} \int U d\mu \cdot \sqrt{n}$, depuis $\mu = -a$ jusqu'à $\mu = a$, on aura la probabilité que le nombre des boules blanches de l'urne *A*, sera compris dans les limites $\pm a \cdot \sqrt{n}$.

On peut généraliser le résultat précédent, en supposant l'urne *A* remplie comme au commencement de ce numéro, par la projection d'un prisme de $p+q$ faces latérales, dont p sont blanches et q sont noires. On a vu qu'alors si l'on fait

$$i^2 = \frac{(p+q)^2}{2pq},$$

on a à l'origine, ou lorsque r est nul,

$$U = \frac{i}{\sqrt{n\pi}} \cdot c^{-\frac{i^2}{n} \left(x - \frac{np}{p+q} \right)^2}.$$

Supposons p et q très-peu différens, ensorte que l'on ait

$$p = \frac{p+q}{2} \cdot \left(1 + \frac{a}{\sqrt{n}} \right),$$

$$q = \frac{p+q}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{n}} \right);$$

on aura

$$i^2 = \frac{2}{1 - \frac{a^2}{n}};$$

ou à très-peu près $i^2 = 2$; donc

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \cdot c^{-\frac{2}{n} \left(x - \frac{n}{2} - \frac{a\sqrt{n}}{2} \right)^2}.$$

En faisant donc

$$x = \frac{n + \mu \cdot \sqrt{n}}{2};$$

on aura

$$U = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \cdot c^{-\frac{1}{2}(\mu - a)^2}.$$

Supposons maintenant qu'après un nombre quelconque de tirages, on ait

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\ell\pi}} \cdot c^{-\frac{(\mu-\alpha)^2}{\ell}},$$

ℓ et α étant des fonctions de r' . Si l'on substitue cette valeur dans l'équation aux différences partielles en U , on aura

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{d\ell}{dr'}\right) \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot (\mu-\alpha)^2}{\ell}\right] + 4 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dr'}\right) \cdot (\mu-\alpha) \\ & = 4 \cdot (\ell-1) \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot (\mu-\alpha)^2}{\ell}\right] - 8\alpha \cdot (\mu-\alpha); \end{aligned}$$

d'où l'on tire les deux équations suivantes,

$$\frac{\left(\frac{d\ell}{dr'}\right)}{\ell-1} = -4, \quad \left(\frac{d\alpha}{dr'}\right) = -2\alpha.$$

En les intégrant, et observant qu'à l'origine de r' , $\alpha = a$ et $\ell = 2$, on aura

$$\ell = 1 + c^{-4r'}, \quad \alpha = a \cdot c^{-2r'};$$

ce qui donne

$$U = \frac{2}{\sqrt{n\pi \cdot (1+c^{-4r'})}} \cdot c^{-\frac{(\mu - ac^{-2r'})^2}{1+c^{-4r'}}}.$$

Cherchons maintenant la valeur moyenne du nombre des boules blanches contenues dans l'urne A après r tirages. Cette valeur est la somme des produits des divers nombres des boules blanches, multipliées par leurs probabilités respectives; elle est donc égale à l'intégrale

$$\int \frac{n + \mu \cdot \sqrt{n}}{2} \cdot U \cdot \frac{d\mu \cdot \sqrt{n}}{2},$$

prise depuis $\mu = -\infty$ jusqu'à $\mu = \infty$. En substituant pour U sa valeur donnée par la formule (k), on aura, en vertu des théorèmes précédens, pour cette intégrale,

$$\frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{4} \cdot L^{(c)} \cdot c^{-\frac{2r}{n}}.$$

A l'origine où r est nul, cette valeur est $\frac{1}{2} n + \frac{1}{4} L^{(c)}$; ainsi l'on aura

$L^{(e)}$ au moyen du nombre des boules blanches que l'urne A contient à cette origine.

On peut obtenir fort simplement de la manière suivante, la valeur moyenne du nombre des boules blanches, après r tirages. Imaginons que chaque boule blanche ait une valeur que nous représenterons par l'unité, les boules noires étant supposées n'avoir aucune valeur. Il est clair que le prix de l'urne A sera la somme des produits de tous les nombres possibles de boules blanches qui peuvent exister dans l'urne, multipliés par leurs probabilités respectives; ce prix est donc ce que nous avons nommé *valeur moyenne du nombre des boules blanches*. Nommons-le z , après le tirage $r^{ième}$. Au tirage suivant, s'il sort une boule blanche, ce prix diminue d'une unité; or si l'on suppose que x est le nombre des boules blanches contenues dans l'urne après le tirage $r^{ième}$, la probabilité d'en extraire une boule blanche sera $\frac{x}{n}$; en nommant donc U la probabilité de cette supposition, l'intégrale $\int \frac{Uxdx}{n}$, étendue depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$, sera la diminution de z , résultante de la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne. Si l'on fait, comme ci-dessus, $\frac{r}{n} = r'$, et si l'on désigne la fraction très-petite $\frac{1}{n}$ par dr' , cette diminution sera égale à zdr' ; car z est égal à $\int Uxdx$, somme des produits des nombres des boules blanches, par leurs probabilités respectives. Le prix de l'urne A s'accroît, si l'on extrait une boule blanche de l'urne B , pour la mettre dans l'urne A ; or, x étant supposé le nombre des boules blanches de l'urne A , $n-x$ sera celui des boules blanches de l'urne B , et la probabilité d'extraire une boule blanche de cette dernière urne, sera $\frac{n-x}{n}$; en multipliant cette probabilité par la probabilité U de x ; l'intégrale $\int U \cdot \frac{n-x}{n} \cdot dx$, prise depuis x nul jusqu'à $x=n$, sera l'accroissement de z . $\int U \cdot (n-x) \cdot dx$ est le prix de l'urne B ; en nommant donc z' ce prix, $z'dr'$ sera l'accroissement de z : on aura donc

$$dz = z'dr' - zdr'.$$

La somme des prix des deux urnes est évidemment égale à n ,

nombre des boules blanches qu'elles contiennent, ce qui donne $z' = n - z$: substituant cette valeur de z' dans l'équation précédente, elle devient

$$dz = (n - 2z) \cdot dr';$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$z = \frac{1}{2}n + \frac{L^{(c)}}{4c^{2r'}},$$

$L^{(c)}$ étant une constante arbitraire; ce qui est conforme à ce qui précède.

On peut étendre toute cette analyse, au cas d'un nombre quelconque d'urnes: nous nous bornerons ici à chercher la valeur moyenne du nombre des boules blanches que chaque urne contient après r tirages.

Considérons un nombre e d'urnes, disposées circulairement, et renfermant chacune le nombre n de boules, les unes blanches, et les autres noires; n étant supposé un très-grand nombre. Supposons qu'après r tirages, $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{e-1}$ soient les prix respectifs des diverses urnes. Chaque tirage consiste à extraire en même tems, une boule de chaque urne, et à la mettre dans la suivante, en partant de l'une d'elles dans un sens déterminé. Si l'on fait $\frac{r}{n} = r'$ et $\frac{1}{n} = dr'$; on aura, par le raisonnement que nous venons de faire relativement à deux urnes,

$$dz_i = (z_{i-1} - z_i) \cdot dr';$$

cette équation a lieu depuis $i = 1$ jusqu'à $i = e - 1$. Dans le cas de $i = e$, on a

$$dz_e = (z_{e-1} - z_0) \cdot dr';$$

en intégrant ces équations, et supposant qu'à l'origine les prix respectifs de chaque urne, ou les nombres des boules blanches qu'elles contiennent, soient

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{e-1}.$$

On parvient à ce résultat qui a lieu depuis $i = 0$ jusqu'à $i = e - 1$,

$$z_i = \frac{1}{e} \cdot S \cdot c - \left(1 - \cos \frac{2s\pi}{e}\right) \cdot r' \cdot \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \cdot \cos \left(\frac{2s \cdot i\pi}{e} - ar' \right) \\ + \lambda_1 \cdot \cos \left(\frac{2s \cdot (i-1)\pi}{e} - ar' \right) \\ + \lambda_2 \cdot \cos \left(\frac{2s \cdot (i-2)\pi}{e} - ar' \right) \\ \dots\dots\dots \\ + \lambda_{e-1} \cdot \cos \left(\frac{2s \cdot (i-e+1)\pi}{e} - ar' \right) \end{array} \right\},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de s , depuis $s = 1$ jusqu'à $s = e$, et a étant égal à $\sin \frac{2s\pi}{e}$. Le terme de cette expression correspondant à $s = e$, est indépendant de r' , et égal à $\frac{1}{e} \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{e-1})$; c'est-à-dire, à la somme entière des boules blanches des urnes, divisée par leur nombre. Ce terme est la limite de l'expression de z_i ; d'où il suit qu'après un nombre infini de tirages, les prix de chaque urne sont égaux entre eux.

CHAPITRE IV.

De la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et des résultats moyens les plus avantageux.

18. CONSIDÉRONS maintenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations, dont on connaît la loi de facilité des erreurs. Supposons d'abord que pour chaque observation, les erreurs puissent être également

$$-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-2, n-1, n.$$

La probabilité de chaque erreur sera $\frac{1}{2n+1}$. Si l'on nomme s , le nombre des observations, le coefficient de $c^{l\omega} \sqrt{-1}$ dans le développement du polynôme

$$\left\{ \begin{aligned} &c^{-n\omega} \sqrt{-1} + c^{-(n-1)\omega} \sqrt{-1} + c^{-(n-2)\omega} \sqrt{-1} \dots \\ &\dots + c^{-\omega} \sqrt{-1} + 1 + c^{\omega} \sqrt{-1} \dots + c^{n\omega} \sqrt{-1} \end{aligned} \right\}^s$$

sera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs est l . Ce coefficient est celui qui est indépendant de $c^{\omega} \sqrt{-1}$ et de ses puissances, dans le développement du même polynôme multiplié par $c^{-l\omega} \sqrt{-1}$, on aura donc pour l'expression de ce coefficient,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega. (\cos l\omega - \sqrt{-1} \cdot \sin l\omega) \cdot (1 + 2 \cos \omega + 2 \cos 2\omega \dots + 2 \cos n\omega)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$.

On a vu dans le n° 36 du premier Livre, que cette intégrale est

$$\frac{(2n+1)! \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)} \cdot 2s\pi} \cdot c^{-\frac{s}{n(n+1)s}};$$

le

le nombre total des combinaisons des erreurs est $(2n+1)^s$; en divisant la quantité précédente par celle-ci, on aura

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n \cdot (n+1) \cdot 2s\pi}} \cdot e^{-\frac{\frac{3}{2} l^2}{n(n+1)s}},$$

pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera l .

Si l'on fait

$$l = 2t \cdot \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot s}{6}},$$

la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $+ 2T \cdot \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot s}{6}}$ et $- 2T \cdot \sqrt{\frac{n \cdot (n+1) \cdot s}{6}}$ sera égale à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt \cdot e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=T$. Cette expression a lieu encore dans le cas de n infini. Alors en nommant $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, on aura $n = a$, et les limites précédentes deviendront $\pm \frac{2T \cdot a \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{6}}$; ainsi la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar \cdot \sqrt{s}$ est

$$2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \int dr \cdot e^{-\frac{3}{2} r^2};$$

c'est aussi la probabilité que l'erreur moyenne sera comprise dans les limites $\pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$; car on a l'erreur moyenne, en divisant par s la somme des erreurs.

La probabilité que la somme des inclinaisons des orbites de s comètes, sera comprise dans des limites données, en supposant toutes les inclinaisons également possibles, depuis zéro jusqu'à l'angle droit, est évidemment la même que la probabilité précédente; l'intervalle $2a$ des limites des erreurs de chaque observation est, dans ce cas,

l'intervalle $\frac{\pi}{2}$ des limites des inclinaisons possibles ; alors la probabilité que la somme des inclinaisons doit être comprise dans les limites $\pm \frac{\pi \cdot r \sqrt{s}}{4}$ est $2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot f(lr \cdot c^{-\frac{3}{2}r^2})$; ce qui s'accorde avec ce que l'on a trouvé dans le n° 13.

Supposons généralement que la probabilité de chaque erreur positive ou négative, soit exprimée par $\phi\left(\frac{x}{n}\right)$, x et n étant des nombres infinis. Alors, dans la fonction

$$1 + 2 \cos \varpi + 2 \cos 2\varpi + 2 \cos 3\varpi \dots + 2 \cos n\varpi,$$

chaque terme, tel que $2 \cos x\varpi$, doit être multiplié par $\phi\left(\frac{x}{n}\right)$; or on a

$$2\phi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \cos x\varpi = 2\phi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x^2}{n^2} \cdot \phi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot n^2\varpi^2 + \text{etc.}$$

En faisant donc

$$x' = \frac{x}{n}, \quad dx' = \frac{1}{n},$$

la fonction

$$\phi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\phi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \cos \varpi + 2\phi\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \cos 2\varpi \dots + 2\phi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot \cos n\varpi,$$

devient

$$2n \cdot f dx' \cdot \phi(x') - n^2 \varpi^2 \cdot f x'^2 dx' \cdot \phi(x') + \text{etc.};$$

les intégrales devant être étendues depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1$. Soit alors

$$k = 2 \int dx' \cdot \phi(x'), \quad k'' = \int x'^2 dx' \cdot \phi(x'), \quad \text{etc.}$$

La série précédente devient

$$nk \cdot \left(1 - \frac{k''}{k} \cdot n^2 \varpi^2 + \text{etc.}\right).$$

Maintenant la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm l$, est, comme il est facile de s'en assurer par les raisonnemens précédens,

$$\frac{2}{\pi} \iint d\varpi \cdot dl \cdot \cos l\varpi \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \cos \varpi + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \cos 2\varpi \dots \right. \\ \left. \dots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot \cos n\varpi \right\}^s,$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$; cette probabilité est donc

$$2 \cdot \frac{(nk)^s}{\pi} \cdot \iint d\varpi \cdot dl \cdot \cos l\varpi \cdot \left(1 - \frac{k''}{k} \cdot n^2 \varpi^2 - \text{etc.}\right)^s. \quad (u)$$

Supposons

$$\left(1 - \frac{k''}{k} \cdot n^2 \varpi^2 - \text{etc.}\right)^s = e^{-t^2};$$

en prenant les logarithmes hyperboliques, on aura à très-peu près, lorsque s est un grand nombre,

$$s \cdot \frac{k''}{k} \cdot n^2 \varpi^2 = t^2;$$

ce qui donne

$$\varpi = \frac{t}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{k''s}}.$$

Si l'on observe ensuite que nk ou $2 \cdot \int dx \cdot \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ exprimant la probabilité que l'erreur d'une observation est comprise dans les limites $\pm n$, cette quantité doit être égale à l'unité; la fonction (u) deviendra

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{k''s}} \cdot \iint dl \cdot dt \cdot e^{-t^2} \cdot \cos\left(\frac{lt}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{k''s}}\right);$$

l'intégrale relative à t devant être prise depuis t nul jusqu'à $t = \pi \cdot n \cdot \sqrt{\frac{k''s}{k}}$, ou jusqu'à $t = \infty$, n étant supposé infini; or on a, par le n° 25 du premier Livre,

$$\int dt \cdot \cos\left(\frac{lt}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{k''s}}\right) \cdot e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{l^2}{4n^2} \cdot \frac{k}{k''s}};$$

en faisant donc

$$\frac{l}{n} = 2t' \cdot \sqrt{\frac{k''s}{k}};$$

la fonction (u) devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt' \cdot e^{-t'^2}.$$

Ainsi en nommant, comme ci-dessus, $2a$ l'intervalle compris entre les limites des erreurs de chaque observation, la probabilité que la somme des erreurs des s observations, sera comprise dans les limites $\pm ar \cdot \sqrt{s}$, est

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}} \cdot \int dr \cdot e^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ est constant; alors $\frac{k}{k''s} = 6$, et cette probabilité devient

$$2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \int dr \cdot e^{-\frac{3}{2}r^2},$$

ce qui est conforme à ce que l'on a trouvé ci-dessus.

Si $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ ou $\varphi(x')$ est une fonction rationnelle et entière de x' , on aura, par la méthode du n° 15, la probabilité que la somme des erreurs sera comprise dans les limites $\pm ar \cdot \sqrt{s}$, exprimée par une suite de puissances s , $2s$, etc. de quantités de la forme $s - \mu \pm r \cdot \sqrt{s}$, dans lesquelles μ augmente en progression arithmétique, ces quantités étant continuées jusqu'à ce qu'elles deviennent négatives. En comparant cette suite à l'expression précédente de la même probabilité, on obtiendra d'une manière fort approchée, la valeur de la suite; et l'on parviendra ainsi sur ce genre de suites, à des théorèmes analogues à ceux que nous avons donnés dans le n° 42 du premier Livre, sur les différences finies des puissances d'une variable.

Si la loi de facilité des erreurs est exprimée par une exponentielle négative qui puisse s'étendre jusqu'à l'infini, et généralement si les erreurs peuvent s'étendre à l'infini; alors a devient infini, et l'application de la méthode précédente peut offrir quelques difficultés. Dans tous ces cas, on fera

$$\frac{x}{h} = x', \quad \frac{1}{h} = dx';$$

h étant une quantité quelconque finie, et en suivant exactement l'analyse précédente, on trouvera pour la probabilité que la somme des erreurs des s observations est comprise dans les limites $\pm hr \cdot \sqrt{s}$,

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}} \cdot fdr \cdot e^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

expression dans laquelle on doit observer que $\phi\left(\frac{x}{h}\right)$ ou $\phi(x')$ exprime la probabilité de l'erreur $\pm x$, et que l'on a

$$k = 2fdx' \cdot \phi(x'), \quad k'' = fx'^2 dx' \cdot \phi(x'),$$

les intégrales étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$.

19. Déterminons présentement la probabilité que la somme des erreurs d'un très-grand nombre d'observations sera comprise dans des limites données, abstraction faite du signe de ces erreurs, c'est-à-dire, en les prenant toutes positivement. Pour cela, considérons la suite

$$\begin{aligned} &\phi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot e^{-n\omega\sqrt{-1}} + \phi\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot e^{-(n-1)\omega\sqrt{-1}} \dots + \phi\left(\frac{0}{n}\right) \dots \\ &\dots + \phi\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot e^{(n-1)\omega\sqrt{-1}} + \phi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot e^{n\omega\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

$\phi\left(\frac{x}{n}\right)$ étant l'ordonnée de la courbe de probabilité des erreurs, correspondante à l'erreur $\pm x$, et x étant ainsi que n , considéré comme formé d'un nombre infini d'unités. Si l'on élève cette suite à la puissance s , après avoir changé le signe des exponentielles négatives; le coefficient d'une exponentielle quelconque, telle que $e^{(l+\mu s)\omega\sqrt{-1}}$, sera la probabilité que la somme des erreurs prises abstraction faite du signe, est $l + \mu s$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{2\pi} \cdot f d\omega \cdot e^{-(l+\mu s)\omega\sqrt{-1}} \left\{ \phi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\phi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot e^{\omega\sqrt{-1}} + 2\phi\left(\frac{2}{n}\right) \cdot e^{2\omega\sqrt{-1}} \dots + 2\phi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot e^{n\omega\sqrt{-1}} \right\}^s,$$

l'intégrale relative à ω étant prise depuis $\omega = -\pi$ jusqu'à $\omega = \pi$;

car dans cet intervalle, l'intégrale $\int d\varpi . e^{-r\varpi} \sqrt{-1}$, ou

$$\int d\varpi . (\cos r\varpi - \sqrt{-1} . \sin r\varpi)$$

disparaît, quel que soit r , pourvu qu'il ne soit pas nul.

On a, en développant par rapport aux puissances de ϖ ,

$$\begin{aligned} & \log \left\{ e^{-\mu s \varpi \sqrt{-1}} . \left[\varphi \left(\frac{0}{n} \right) + 2\varphi \left(\frac{1}{n} \right) . e^{\varpi \sqrt{-1}} + 2\varphi \left(\frac{n}{n} \right) . e^{n\varpi \sqrt{-1}} \right] \right\} \\ = s . \log & \left\{ \begin{aligned} & \varphi \left(\frac{0}{n} \right) + 2\varphi \left(\frac{1}{n} \right) + 2\varphi \left(\frac{2}{n} \right) + 2\varphi \left(\frac{n}{n} \right) \\ & + 2\varpi \sqrt{-1} . \left[\varphi \left(\frac{1}{n} \right) + 2\varphi \left(\frac{2}{n} \right) + n\varphi \left(\frac{n}{n} \right) \right] \\ & - \varpi^2 . \left[\varphi \left(\frac{1}{n} \right) + 2^2\varphi \left(\frac{2}{n} \right) + n^2\varphi \left(\frac{n}{n} \right) \right] \\ & - \text{etc.} \end{aligned} \right\} - \mu s \varpi \sqrt{-1}. \quad (1) \end{aligned}$$

En faisant donc

$$\frac{x}{n} = x', \quad \frac{1}{n} = dx,$$

$$\begin{aligned} 2\int dx' . \varphi(x') &= k, & \int x' dx' . \varphi(x') &= k', & \int x'^2 dx' . \varphi(x') &= k'', \\ \int x'^3 dx' . \varphi(x') &= k''', & \int x'^4 dx' . \varphi(x') &= k^{(4)}, & \text{etc.}, \end{aligned}$$

les intégrales étant prises depuis x' nul jusqu'à $x' = 1$; le second membre de l'équation (1) devient

$$s . \log nk + s . \log \left(1 + \frac{2.k'}{k} . n\varpi \sqrt{-1} - \frac{k''}{k} . n^2 \varpi^2 - \text{etc.} \right) - \mu s \varpi \sqrt{-1}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber nécessairement dans les limites $\pm n$, on a $nk = 1$; la quantité précédente devient ainsi,

$$s . \left(\frac{2k'}{k} - \frac{\mu}{n} \right) . n\varpi \sqrt{-1} - \frac{(kk'' - 2k'^2) . s . n^2 \varpi^2}{k^2} - \text{etc.};$$

en faisant donc

$$\frac{\mu}{n} = \frac{2k'}{k},$$

et négligeant les puissances de ϖ supérieures au carré, cette quantité se réduit à son second terme, et la probabilité précédente

devient

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int d\varpi \cdot c \quad - l\varpi \sqrt{-1} - \frac{(kk'' - 2k'^2)}{k^2} \cdot s \cdot n^2 \varpi^2.$$

Soit

$$\ell = \frac{k}{\sqrt{kk'' - 2k'^2}}, \quad \varpi = \frac{\ell t}{n \cdot \sqrt{s}}, \quad \frac{l}{n} = r \cdot \sqrt{s},$$

l'intégrale précédente devient

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{c}{n \cdot \sqrt{s}} \cdot \int \ell dt \cdot c \quad - \left(t + \frac{\ell \ell \sqrt{-1}}{2n \sqrt{s}} \right)^2.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; et alors la quantité précédente devient

$$\frac{\ell}{2\sqrt{\pi} \cdot n \cdot \sqrt{s}} \cdot c \quad - \frac{\ell^2 r^2}{4}.$$

En la multipliant par dl ou par $ndr \cdot \sqrt{s}$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int \ell dr \cdot c \quad - \frac{\ell^2 r^2}{4}$$

sera la probabilité que la valeur de l , et par conséquent, la somme des erreurs des observations est comprise dans les limites $\frac{2k'}{k} \cdot as \pm ar \cdot \sqrt{s}$, $\pm a$ étant les limites des erreurs de chaque observation, limites que nous désignons par $\pm n$, quand nous les concevons partagées dans une infinité de parties.

On voit ainsi que la somme des erreurs, la plus probable, abstraction faite du signe, est celle qui répond à $r = 0$. Cette somme est $\frac{2k'}{k} \cdot as$. Dans le cas où $\phi(x)$ est constant, $\frac{2k'}{k} = \frac{1}{2}$, la somme des erreurs, la plus probable, est donc alors la moitié de la plus grande somme possible, somme qui est égale à sa . Mais si $\phi(x)$ n'est pas constant et diminue à mesure que l'erreur x augmente, alors $\frac{2k'}{k}$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et la somme des erreurs, abstraction

faite du signe, est au-dessous de la moitié de la plus grande somme possible.

On peut, par la même analyse, déterminer la probabilité que la somme des carrés des erreurs, sera $l + \mu s$; il est facile de voir que cette probabilité a pour expression, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int d\varpi \cdot c^{-(l+\mu s)\varpi \sqrt{-1}} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{0}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot c^{\varpi \sqrt{-1}} + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) \cdot c^{2\varpi \sqrt{-1}} + \dots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right) \cdot c^{n\varpi \sqrt{-1}} \right\}^s$$

prise depuis $\varpi = -\pi$, jusqu'à $\varpi = \pi$. En suivant exactement l'analyse précédente, on aura

$$\mu = \frac{2n^2 \cdot k''}{k};$$

et en faisant

$$\mathcal{C}' = \frac{k}{\sqrt{k k'' - 2k''^2}},$$

la probabilité que la somme des carrés des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\frac{2k''}{k} \cdot a^2 s \pm a^2 r \cdot \sqrt{s}$, sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \mathcal{C}' dr \cdot c^{-\frac{\mathcal{C}'^2 \cdot r^2}{4}}.$$

La somme la plus probable est celle qui répond à r nul; elle est donc $\frac{2k''}{k} \cdot a^2 \cdot s$. Si s est un très-grand nombre, le résultat des observations s'écartera très-peu de cette valeur, et par conséquent il fera connaître à très-peu près le facteur $\frac{a^2 \cdot k''}{k}$.

20. Lorsque l'on veut corriger un élément déjà connu à fort peu près, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, on forme des équations de condition de la manière suivante. Soit z la correction de l'élément, et $\mathcal{C}$ l'observation; l'expression analytique de celle-ci sera une fonction de l'élément. En y substituant, au lieu de l'élément, sa valeur approchée, plus la correction z ; en réduisant en série par rapport à z , et négligeant le carré de z ;
cette

cette fonction prendra la forme $h + pz$; en l'égalant à la quantité observée $\mathcal{C}$, on aura

$$\mathcal{C} = h + pz;$$

z serait donc déterminé, si l'observation était rigoureuse; mais comme elle est susceptible d'erreur, en nommant ε cette erreur, on a exactement, aux quantités près de l'ordre z^2 ,

$$\mathcal{C} + \varepsilon = h + pz;$$

et en faisant $\mathcal{C} - h = \alpha$, on a

$$\varepsilon = pz - \alpha.$$

Chaque observation fournit une équation semblable, que l'on peut représenter pour l'observation $(i+1)^{\text{ième}}$, par celle-ci

$$\varepsilon^{(i)} = p^{(i)} \cdot z - \alpha^{(i)}.$$

En réunissant toutes ces équations, on a

$$S \cdot \varepsilon^{(i)} = z \cdot S \cdot p^{(i)} - S \cdot \alpha^{(i)}, \quad (1)$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$, s étant le nombre total des observations. En supposant nulle la somme des erreurs, cette équation donne

$$z = \frac{S \cdot \alpha^{(i)}}{S \cdot p^{(i)}};$$

c'est ce que l'on nomme ordinairement, *résultat moyen des observations*.

On a vu dans le n° 18, que la probabilité que la somme des erreurs des s observations sera comprise dans les limites $\pm ar \cdot \sqrt{s}$, est

$$\sqrt{\frac{k}{k''\pi}} \cdot fdr \cdot c - \frac{kr^2}{4k''}.$$

Nommons $\pm u$ l'erreur du résultat z ; en substituant dans l'équation (1), $\pm ar \cdot \sqrt{s}$ au lieu de $S \cdot \varepsilon^{(i)}$, et $\frac{S \cdot \alpha^{(i)}}{S \cdot p^{(i)}} \pm u$ au lieu de z , elle donne

$$r = \frac{u \cdot S \cdot p^{(i)}}{a \cdot \sqrt{s}};$$

la probabilité que l'erreur du résultat z , sera comprise dans les limites $\pm u$ est donc ,

$$\sqrt{\frac{k}{k''s\pi}} \cdot S.p^{(i)} \cdot \int \frac{du}{a} \cdot c - \frac{ku^2 \cdot (S.p^{(i)})^2}{4k'' \cdot a^2 s}$$

Au lieu de supposer nulle la somme des erreurs, on peut supposer nulle une fonction quelconque linéaire de ces erreurs, que nous représenterons ainsi,

$$m \cdot \epsilon + m^{(1)} \cdot \epsilon^{(1)} + m^{(2)} \cdot \epsilon^{(2)} \dots + m^{(i-1)} \cdot \epsilon^{(i-1)}, \quad (m)$$

$m, m^{(1)}, m^{(2)}$, etc. étant des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant dans cette fonction (m) , au lieu de $\epsilon, \epsilon^{(1)}$, etc., leurs valeurs données par les équations de condition, elle devient

$$z \cdot S.m^{(i)}p^{(i)} - S.m^{(i)}\alpha^{(i)};$$

en égalant donc à zéro, la fonction (m) , on a

$$z = \frac{S.m^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.m^{(i)}p^{(i)}}.$$

Soit u l'erreur de ce résultat, ensorte que l'on ait

$$z = \frac{S.m^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.m^{(i)}p^{(i)}} + u;$$

la fonction (m) devient

$$u \cdot S.m^{(i)}p^{(i)}.$$

Déterminons la probabilité de l'erreur u , lorsque les observations sont en grand nombre.

Pour cela, considérons le produit

$$\int \phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot c^{m x^2 \sqrt{-1}} \times \int \phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot c^{m^{(1)} x^2 \sqrt{-1}} \dots \times \int \phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot c^{m^{(i-1)} x^2 \sqrt{-1}},$$

le signe $\int$ s'étendant à toutes les valeurs de x , depuis la valeur négative extrême de x , jusqu'à sa valeur positive extrême.

$\phi\left(\frac{x}{a}\right)$ est, comme dans les numéros précédens, la probabilité d'une erreur x , dans chaque observation; x étant supposé, ainsi que a ,

formé d'une infinité de parties prises pour unité. Il est clair que le coefficient d'une exponentielle quelconque $c^{l\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de ce produit, sera la probabilité que la somme des erreurs des observations, multipliées respectivement par $m, m^{(1)}$, etc., c'est-à-dire, la fonction (m) , sera égale à l ; en multipliant donc le produit précédent par $c^{-l\varpi\sqrt{-1}}$, le terme indépendant de $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de ses puissances, dans ce nouveau produit, exprimera cette probabilité. Si l'on suppose, comme nous le ferons ici, la probabilité des erreurs positives, la même que celle des erreurs négatives; on pourra, dans la somme $\int \phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot c^{mx\varpi\sqrt{-1}}$, réunir les termes multipliés, l'un par $c^{mx\varpi\sqrt{-1}}$, et l'autre par $c^{-mx\varpi\sqrt{-1}}$; alors cette somme prend la forme $2\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos mx\varpi$. Il en est de même de toutes les sommes semblables. De là il suit que la probabilité que la fonction (m) sera égale à l , est égale à

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int l d\varpi \cdot \left\{ c^{-l\varpi\sqrt{-1}} \times 2\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos mx\varpi \right. \\ \left. \times 2\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos m^{(1)}x\varpi \dots \times 2\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos m^{(n-1)}x\varpi \right\}; \quad (1)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. On a en réduisant les cosinus en séries,

$$\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos mx\varpi = \phi\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} \cdot m^2 a^2 \cdot \varpi^2 \cdot \int \frac{x^2}{a^2} \cdot \phi\left(\frac{x}{a}\right) + \text{etc.}$$

Si l'on fait $\frac{x}{a} = x'$, et si l'on observe que la variation de x étant l'unité, on a $dx' = \frac{1}{a}$; on aura

$$\phi\left(\frac{x}{a}\right) = a \cdot \int dx' \cdot \phi(x').$$

Nommons, comme dans les numéros précédens, k l'intégrale $\int dx' \cdot \phi(x')$, prise depuis x' nul jusqu'à sa valeur positive extrême; nommons pareillement k'' l'intégrale $\int x'^2 dx'$, prise dans les mêmes limites, et ainsi de suite; nous aurons

$$2\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos mx\varpi = ak \cdot \left(1 - \frac{k''}{k} \cdot m^2 a^2 \cdot \varpi^2 + \frac{k^{(4)}}{12k} \cdot m^4 a^4 \varpi^4 - \text{etc.}\right).$$

Le logarithme du second membre de cette équation est

$$-\frac{k''}{k} \cdot m^2 a^2 \varpi^2 + \frac{kk^{iv} - 6k''^2}{12k^2} \cdot m^4 a^4 \varpi^4 - \text{etc.} + \log ak,$$

ak ou $2a \cdot f dx' \cdot \phi(x')$ exprime la probabilité que l'erreur de chaque observation, sera comprise dans ses limites, ce qui est certain; on a donc $ak = 1$; ce qui réduit le logarithme précédent à

$$-\frac{k''}{k} \cdot m^2 a^2 \varpi^2 + \frac{kk^{iv} - 6k''^2}{12k^2} \cdot m^4 a^4 \varpi^4 - \text{etc.}$$

De là il est aisé de conclure que le produit

$$2f\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos mx\varpi \times 2f\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos m^{(1)}x\varpi \dots \times 2f\phi\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \cos m^{(i-1)}x\varpi,$$

est

$$\left(1 + \frac{kk^{iv} - 6k''^2}{12k^2} \cdot a^4 \varpi^4 \cdot S \cdot m^{(i)4} + \text{etc.}\right) \cdot c^{-\frac{k''}{k} \cdot a^2 \varpi^2 \cdot S \cdot m^{(i)2}};$$

L'intégrale précédente (i) se réduit donc à

$$\frac{1}{2\pi} \cdot f d\varpi \cdot \left\{1 + \frac{kk^{iv} - 6k''^2}{12k^2} \cdot a^4 \varpi^4 \cdot S \cdot m^{(i)4} + \text{etc.}\right\} \\ \times c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a} - \frac{k''}{k} \cdot a^2 \varpi^2 \cdot S \cdot m^{(i)2}}.$$

En faisant $sa^2\varpi^2 = t^2$, cette intégrale devient

$$\frac{1}{2a\pi \cdot \sqrt{s}} \cdot f dt \cdot \left\{1 + \frac{kk^{iv} - 6k''^2}{12k^2} \cdot \frac{S \cdot m^{(i)4}}{s^2} \cdot t^4 + \text{etc.}\right\} \\ \times c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} - \frac{k''}{k} \cdot \frac{S \cdot m^{(i)2}}{s} \cdot t^2};$$

$S \cdot m^{(i)2}$, $S \cdot m^{(i)4}$, etc. sont évidemment des quantités de l'ordre s ; ainsi $\frac{S \cdot m^{(i)4}}{s^2}$ est de l'ordre $\frac{1}{s}$; en négligeant donc les termes de ce dernier ordre, vis-à-vis de l'unité, la dernière intégrale se réduit à

$$\frac{1}{2a\pi \cdot \sqrt{s}} \cdot f dt \cdot c^{-\frac{lt\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} - \frac{k''}{k} \cdot \frac{S \cdot m^{(i)2}}{s} \cdot t^2}.$$

L'intégrale relative à ϖ devant être prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -a\pi \cdot \sqrt{s}$ jusqu'à $t = a\pi \cdot \sqrt{s}$; et dans ces cas, l'exponentielle sous le signe f est insensible à ces deux limites, soit parce que s est un grand nombre, soit parce que a est ici supposé divisé dans une infinité de parties prises pour unité; on peut donc prendre l'intégrale depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Faisons

$$t' = \sqrt{\frac{k'' \cdot S \cdot m^{(i)2}}{hs}} \cdot \left\{ t + \frac{l \cdot \sqrt{-1} \cdot k \cdot \sqrt{s}}{2a \cdot k'' \cdot S \cdot m^{(i)2}} \right\},$$

la fonction intégrale précédente devient

$$\frac{c^{-\frac{kl^2}{4k'' \cdot a^2 \cdot S \cdot m^{(i)2}}}}{2a\pi \cdot \sqrt{\frac{k''}{k} \cdot S \cdot m^{(i)2}}} \cdot f dt' \cdot c^{-t'^2}.$$

L'intégrale relative à t' doit être prise, comme l'intégrale relative à t , depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$; ce qui réduit la quantité précédente à celle-ci,

$$\frac{c^{-\frac{kl^2}{4k'' \cdot a^2 \cdot S \cdot m^{(i)2}}}}{2a \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{k''}{k} \cdot S \cdot m^{(i)2}}}.$$

Si l'on fait $l = ar \cdot \sqrt{s}$, et si l'on observe que la variation de l étant l'unité, l'on a $adr = 1$, on aura

$$\frac{\sqrt{s}}{2 \cdot \sqrt{\frac{k''\pi}{k} \cdot S \cdot m^{(i)2}}} \cdot f dr \cdot c^{-\frac{kr^2 \cdot s}{4k'' \cdot S \cdot m^{(i)2}}},$$

pour la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites zéro et $ar \cdot \sqrt{s}$, l'intégrale étant prise depuis r nul.

Nous avons besoin ici de connaître la probabilité de l'erreur u , de l'élément déterminé en faisant nulle la fonction (m). Cette fonction étant supposée égale à l ou à $ar \cdot \sqrt{s}$; on aura, par ce qui précède,

$$u \cdot S \cdot m^{(i)} p^{(i)} = ar \cdot \sqrt{s};$$

en substituant cette valeur dans la fonction intégrale précédente, elle devient

$$\frac{S \cdot m^{(i)} p^{(i)}}{2a \cdot \sqrt{\frac{k''}{k} \pi} \cdot S \cdot m^{(i)2}} \cdot \int du \cdot c^{-\frac{ku^2 \cdot (S \cdot m^{(i)} p^{(i)})^2}{4k'' \cdot a^2 \cdot S \cdot m^{(i)2}}};$$

c'est l'expression de la probabilité que la valeur de u sera comprise dans les limites zéro et u : c'est aussi l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et $-u$. Si l'on fait

$$u = 2at \cdot \sqrt{\frac{k''}{k}} \cdot \frac{\sqrt{S \cdot m^{(i)2}}}{S \cdot m^{(i)} p^{(i)}},$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt \cdot c^{-t^2}.$$

Maintenant la probabilité restant la même, t reste le même, et l'intervalle des deux limites de u , se resserre d'autant plus que $a \cdot \sqrt{\frac{k''}{k}} \cdot \frac{\sqrt{S \cdot m^{(i)2}}}{S \cdot m^{(i)} p^{(i)}}$ est plus petit. Cet intervalle restant le même, la valeur de t , et par conséquent la probabilité que l'erreur de l'élément tombe dans cet intervalle, est d'autant plus grande, que la même quantité $a \cdot \sqrt{\frac{k''}{k}} \cdot \frac{\sqrt{S \cdot m^{(i)2}}}{S \cdot m^{(i)} p^{(i)}}$ est plus petite; il faut donc choisir le système de facteurs $m^{(i)}$, qui rend cette quantité un *minimum*; et comme a , k , k'' sont les mêmes dans tous ces systèmes, il faut choisir le système qui rend $\frac{\sqrt{S \cdot m^{(i)2}}}{S \cdot m^{(i)} p^{(i)}}$ un *minimum*.

On peut parvenir au même résultat, de cette manière. Reprenons l'expression de la probabilité que u sera compris dans les limites zéro et u . Le coefficient de du dans la différentielle de cette expression, est l'ordonnée de la courbe des probabilités des erreurs u de l'élément, erreurs représentées par l'abscisse u de cette courbe, que l'on peut étendre à l'infini, de chaque côté de l'ordonnée qui répond à u nul. Cela posé, toute erreur, soit positive, soit négative, doit être considérée comme un désavantage ou une perte réelle, à un jeu quelconque; or, par les principes de la théorie

des probabilités, exposés au commencement de ce Livre, on évalue ce désavantage, en prenant la somme de tous les produits de chaque désavantage par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre en plus, est donc la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité; elle est par conséquent égale à l'intégrale

$$\frac{\int u du . S . m^{(i)} p^{(i)} . c \cdot \frac{ku^2 . (S . m^{(i)} . p^{(i)})^2}{4k'' . a^2 . S . m^{(i)2}}}{2a . \sqrt{\frac{k''}{k} \pi} . S . m^{(i)2}},$$

prise depuis u nul jusqu'à u infini; ainsi cette erreur est

$$a . \sqrt{\frac{k''}{k\pi}} \cdot \frac{\sqrt{S . m^{(i)2}}}{S . m^{(i)} p^{(i)}}.$$

Cette quantité prise avec le signe —, donne l'erreur moyenne à craindre en moins. Il est visible que le système des facteurs $m^{(i)}$ qu'il faut choisir, doit être tel que ces erreurs soient des *minima*, et par conséquent tel que $\frac{\sqrt{S . m^{(i)2}}}{S . m^{(i)} p^{(i)}}$ soit un *minimum*.

Si l'on différentie cette fonction par rapport à $m^{(i)}$, on aura en égalant sa différentielle à zéro, par la condition du *minimum*,

$$\frac{m^{(i)}}{S . m^{(i)2}} = \frac{p^{(i)}}{S . m^{(i)} p^{(i)}}.$$

Cette équation a lieu quel que soit i ; et comme la variation de i ne fait point changer la fraction $\frac{S . m^{(i)2}}{S . m^{(i)} p^{(i)}}$; en nommant μ cette fraction, on aura

$$m = \mu . p, \quad m^{(i)} = \mu . p^{(i)}, \dots m^{(i-1)} = \mu . p^{(i-1)};$$

et l'on peut, quels que soient p , $p^{(i)}$, etc., prendre μ tel que les nombres m , $m^{(i)}$, etc. soient des nombres entiers, comme l'analyse précédente le suppose. Alors on a

$$z = \frac{S . p^{(i)} . p^{(i)}}{S . p^{(i)2}},$$

et l'erreur moyenne à craindre devient

$$\pm \frac{a \cdot \sqrt{\frac{k''}{k\pi}}}{\sqrt{S \cdot p^{(i)^2}} ;$$

c'est dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les facteurs m , $m^{(i)}$, etc., la plus petite erreur moyenne possible.

Si l'on fait les valeurs de m , $m^{(i)}$, etc. égales à ± 1 ; l'erreur moyenne à craindre sera plus petite lorsque le signe $\pm$ sera déterminé de manière que $m^{(i)}p^{(i)}$ soit positif; ce qui revient à supposer $1 = m = m^{(i)} = \text{etc.}$, et à préparer les équations de condition, de sorte que le coefficient de z dans chacune d'elles, soit positif; c'est ce que l'on fait dans la méthode ordinaire. Alors le résultat moyen des observations est

$$z = \frac{S \cdot a^{(i)}}{S \cdot p^{(i)}} ,$$

et l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, est

$$\pm \frac{a \cdot \sqrt{\frac{k'' \cdot s}{k\pi}}}{S \cdot p^{(i)}} ;$$

mais cette erreur surpasse la précédente qui, comme on l'a vu, est la plus petite possible. On peut s'en convaincre d'ailleurs de cette manière. Il suffit de faire voir que l'on a l'inégalité

$$\frac{\sqrt{s}}{S \cdot p^{(i)}} > \frac{1}{\sqrt{S \cdot p^{(i)^2}}} ,$$

ou

$$s \cdot S \cdot p^{(i)^2} > (S \cdot p^{(i)})^2 .$$

En effet, $2pp^{(i)}$ est moindre que $p^2 + p^{(i)^2}$, puisque $(p^{(i)} - p)^2$ est une quantité positive; on peut donc, dans le second membre de l'inégalité précédente, substituer pour $2pp^{(i)}$, $p^2 + p^{(i)^2} - f$, f étant une quantité positive. En faisant des substitutions semblables pour tous les produits semblables, ce second membre sera égal au premier, moins une quantité positive.

Le

Le résultat

$$z = \frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}},$$

auquel correspond le *minimum* d'erreur moyenne à craindre, est celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; car la somme de ces carrés étant

$$(p.z - \alpha)^2 + (p^{(1)}.z - \alpha^{(1)})^2 \dots + (p^{(r-1)}.z - \alpha^{(r-1)})^2;$$

la condition du *minimum* de cette fonction, en faisant varier z , donne pour cette variable, l'expression précédente; cette méthode doit donc être employée de préférence, quelle que soit la loi de facilité des erreurs, loi dont dépend le rapport $\frac{k''}{k}$.

Ce rapport est $\frac{1}{6}$, si $\phi(x)$ est une constante; il est moindre que $\frac{1}{6}$, si $\phi(x)$ est variable, et tel qu'il diminue à mesure que x augmente, comme il est naturel de le supposer. En adoptant la loi moyenne des erreurs que nous avons donnée dans le n° 15, et suivant laquelle $\phi(x)$ est égal à $\frac{1}{2a} \cdot \log \frac{a}{x}$, on a $\frac{k''}{k} = \frac{1}{18}$. Quant aux limites $\pm a$, on peut prendre pour ces limites, les écarts du résultat moyen, qui feraient rejeter une observation.

Mais on peut, par les observations mêmes, déterminer le facteur $a \cdot \sqrt{\frac{k''}{k}}$ de l'expression de l'erreur moyenne. En effet, on a vu dans le n° précédent, que la somme des carrés des erreurs des observations, est à très-peu près $2s \cdot \frac{a^2 k''}{k}$, et que si elles sont en grand nombre, il devient extrêmement probable que la somme observée ne s'écartera pas de cette valeur, d'une quantité sensible; on peut donc les évaluer; or la somme observée est égale à $S.\epsilon^{(i)2}$, ou à $S.(p^{(i)}.z - \alpha^{(i)})^2$, en substituant pour z sa valeur $\frac{S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2}}$; on trouve ainsi,

$$2s \cdot \frac{a^2 k''}{k} = \frac{S.p^{(i)2} \cdot S.\alpha^{(i)2} - (S.p^{(i)}\alpha^{(i)})^2}{S.p^{(i)2}}.$$

L'expression précédente de l'erreur moyenne à craindre sur le

résultat z , devient alors

$$\pm \frac{\sqrt{S.p^{(i)2}.S.\alpha^{(i)2} - (S.p^{(i)}\alpha^{(i)})^2}}{S.p^{(i)2}.\sqrt{2s\pi}}.$$

expression dans laquelle il n'y a rien qui ne soit donné par les observations et par les coefficients des équations de condition.

21. Supposons maintenant que l'on ait deux élémens à corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations. En nommant z et z' les corrections respectives de ces élémens, on formera, comme dans le numéro précédent, des équations de condition, qui seront comprises dans cette forme générale

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)}.z + q^{(i)}.z' - \alpha^{(i)},$$

$\epsilon^{(i)}$ étant, comme dans ce numéro, l'erreur de l'observation $(i+1)^{i\text{me}}$. Si l'on multiplie respectivement par $m, m^{(1)}, \dots, m^{(s-1)}$ ces équations, et que l'on ajoute ensemble ces produits, on aura une première équation finale

$$S.m^{(i)}\epsilon^{(i)} = z.S.m^{(i)}p^{(i)} + z'.S.m^{(i)}q^{(i)} - S.m^{(i)}\alpha^{(i)}.$$

En multipliant encore les mêmes équations respectivement par $n, n^{(1)}, \dots, n^{(s-1)}$, et ajoutant ces produits, on aura une seconde équation finale

$$S.n^{(i)}\epsilon^{(i)} = z.S.n^{(i)}p^{(i)} + z'.S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}\alpha^{(i)},$$

le signe S s'étendant ici, comme dans le numéro précédent, à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s-1$.

Si l'on suppose nulles les deux fonctions $S.m^{(i)}\epsilon^{(i)}$, $S.n^{(i)}\epsilon^{(i)}$, fonctions que nous désignerons respectivement par (m) et (n) ; les deux équations finales précédentes donneront les corrections z et z' des deux élémens. Mais ces corrections sont susceptibles d'erreurs relatives à celle dont la supposition que nous venons de faire, est elle-même susceptible. Concevons donc que les fonctions (m) et (n) , au lieu d'être nulles, soient respectivement l et l' , et nommons u et u' les erreurs correspondantes des corrections z et z' , détermi-

nées par ce qui précède; les deux équations finales deviendront

$$\begin{aligned} l &= u.S.m^{(1)}p^{(1)} + u'.S.m^{(1)}q^{(1)}, \\ l' &= u.S.n^{(1)}p^{(1)} + u'.S.n^{(1)}q^{(1)}. \end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer les facteurs $m, m^{(1)}, \text{etc.}; n, n^{(1)}, \text{etc.}$, de manière que l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément, soit un *minimum*. Pour cela, considérons le produit

$$\begin{aligned} &f\phi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-(m\varpi+n\varpi')x}\sqrt{-1} \times f\phi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-(m^{(1)}\varpi+n^{(1)}\varpi')x}\sqrt{-1} \dots \\ &\dots \times f\phi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-(m^{(i-1)}\varpi+n^{(i-1)}\varpi')x}\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

le signe f se rapportant à toutes les valeurs de x , depuis $x = -a$ jusqu'à $x = a$, $\phi\left(\frac{x}{a}\right)$ étant, comme dans le numéro précédent, la probabilité de l'erreur x , ainsi que de l'erreur $-x$. La fonction précédente devient, en réunissant les deux exponentielles relatives à x et à $-x$,

$$\begin{aligned} &2f\phi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m\varpi+n\varpi') \times 2f\phi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m^{(1)}\varpi+n^{(1)}\varpi') \dots \\ &\dots \times 2f\phi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m^{(i-1)}\varpi+n^{(i-1)}\varpi'), \end{aligned}$$

le signe f s'étendant ici à toutes les valeurs de x , depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$; x étant supposé, ainsi que a , divisé dans une infinité de parties prises pour unité. Présentement, il est clair que le terme indépendant des exponentielles, dans le produit de la fonction précédente, par $c^{-l\varpi}\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1}$, est la probabilité que la somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par $m, m^{(1)}, \text{etc.}$ ou la fonction (m) , sera égal à l , en même tems que la fonction (n) , somme des erreurs de chaque observation, multipliées respectivement par $n, n^{(1)}, \text{etc.}$, sera égal à l' ; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint d\varpi.d\varpi'.c^{-l\varpi}\sqrt{-1}-l'\varpi'\sqrt{-1} \cdot \left\{ \begin{aligned} &2f\phi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m\varpi+n\varpi')x \dots \dots \dots \\ &\dots \times 2f\phi\left(\frac{x}{a}\right).\cos(m^{(i-1)}\varpi+n^{(i-1)}\varpi')x \end{aligned} \right\}$$

les intégrales étant prises depuis ϖ et ϖ' égaux à $-\pi$, jusqu'à ϖ et ϖ' égaux à π . Cela posé ;

En suivant exactement l'analyse du numéro précédent, on trouve que la fonction précédente se réduit à très-peu près à

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint d\varpi. d\varpi'. c \frac{-l\varpi\sqrt{-1} - l'\varpi'\sqrt{-1} - \frac{k''}{k}.a^2.[\varpi^2.S.m^{(i)2} + 2\varpi\varpi'.S.m^{(i)}n^{(i)} + \varpi'^2.S.n^{(i)2}]}{k},$$

k et k'' ayant ici la même signification que dans le numéro cité. On voit encore, par le même numéro, que les intégrales peuvent s'étendre depuis $a\varpi = -\infty$, $a\varpi' = -\infty$, jusqu'à $a\varpi = \infty$ et $a\varpi' = \infty$. Si l'on fait

$$t = a\varpi + \frac{a\tau'.S.m^{(i)}n^{(i)}}{S.m^{(i)2}} + \frac{kl.\sqrt{-1}}{2k''a.S.m^{(i)2}},$$

$$t' = a\varpi' - \frac{k}{2k''a} \cdot \frac{(l.S.m^{(i)}n^{(i)} - l'.S.m^{(i)2}).\sqrt{-1}}{S.m^{(i)2}.S.n^{(i)2} - (S.m^{(i)}n^{(i)})^2};$$

si l'on fait ensuite

$$E = S.m^{(i)2}.S.n^{(i)2} - (S.m^{(i)}n^{(i)})^2;$$

la double intégrale précédente devient

$$c \frac{k}{4k''a^2} \cdot E \cdot [l^2.S.n^{(i)2} - 2ll'.S.m^{(i)}n^{(i)} + l'^2.S.m^{(i)2}]$$

$$\times \iint \frac{dt. dt'}{4\pi^2.a^2} \cdot c \frac{-\frac{k''t^2}{k}.S.m^{(i)2} - \frac{k't'^2.E}{k.S.m^{(i)2}}}{k}.$$

En prenant les intégrales dans les limites infinies positives et négatives, comme celles relatives à $a\varpi$ et $a\varpi'$, on aura

$$\frac{1}{4k''\pi.a^2\sqrt{E}} \cdot c \frac{-\frac{k}{4k''a^2} \cdot \frac{l^2.S.n^{(i)2} - 2ll'.S.m^{(i)}n^{(i)} + l'^2.S.m^{(i)2}}{E}}{k}. \quad (o)$$

Il faut maintenant, pour avoir la probabilité que les valeurs de l et de l' seront comprises dans des limites données, multiplier cette quantité par $dl. dl'$, et l'intégrer ensuite dans ces limites. En nommant X cette quantité, la probabilité dont il s'agit sera donc

$\iint X dl. dl'$. Mais pour avoir la probabilité que les erreurs u et u' des corrections des élémens seront comprises dans des limites données, il faut substituer dans cette intégrale, au lieu de l et de l' , leurs valeurs en u et u' . Or si l'on différentie les expressions de l et de l' , en supposant l' constant, on a

$$\begin{aligned} dl &= du \cdot S.m^{(i)}p^{(i)} + du' \cdot S.m^{(i)}q^{(i)}, \\ 0 &= du \cdot S.n^{(i)}p^{(i)} + du' \cdot S.n^{(i)}q^{(i)}; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$dl = \frac{du \cdot [S.m^{(i)}p^{(i)} \cdot S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}p^{(i)} \cdot S.m^{(i)}q^{(i)}]}{S.n^{(i)}q^{(i)}}.$$

Si l'on différentie ensuite l'expression de l' , en supposant u constant, on a

$$dl' = du' \cdot S.n^{(i)}q^{(i)};$$

on aura donc

$$dl. dl' = [S.m^{(i)}p^{(i)} \cdot S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}p^{(i)} \cdot S.m^{(i)}q^{(i)}] \cdot du. du'.$$

En faisant ensuite

$$\begin{aligned} F &= S.n^{(i)2} \cdot (S.m^{(i)}p^{(i)})^2 - 2S.m^{(i)}n^{(i)} \cdot S.m^{(i)}p^{(i)} \cdot S.n^{(i)}p^{(i)} \\ &\quad + S.m^{(i)2} \cdot (S.n^{(i)}p^{(i)})^2, \\ G &= S.n^{(i)2} \cdot S.m^{(i)}p^{(i)} \cdot S.m^{(i)}q^{(i)} + S.m^{(i)2} \cdot S.n^{(i)}p^{(i)} \cdot S.n^{(i)}q^{(i)} \\ &\quad - S.m^{(i)}n^{(i)} \cdot [S.n^{(i)}p^{(i)} \cdot S.m^{(i)}q^{(i)} + S.m^{(i)}p^{(i)} \cdot S.n^{(i)}q^{(i)}], \\ H &= S.n^{(i)2} \cdot (S.m^{(i)}q^{(i)})^2 - 2S.m^{(i)}n^{(i)} \cdot S.m^{(i)}q^{(i)} \cdot S.n^{(i)}q^{(i)} \\ &\quad + S.m^{(i)2} \cdot (S.n^{(i)}q^{(i)})^2, \\ I &= S.m^{(i)}p^{(i)} \cdot S.n^{(i)}q^{(i)} - S.n^{(i)}p^{(i)} \cdot S.m^{(i)}q^{(i)}, \end{aligned}$$

la fonction (o) devient

$$\iint \frac{k}{4k''\pi} \cdot \frac{I}{\sqrt{E}} \cdot \frac{du du'}{a^2} \cdot c - \frac{k \cdot (Fu^2 + 2Guu' + Hu'^2)}{4k'' \cdot a^2 \cdot E}$$

Intégrons d'abord cette fonction depuis $u' = -\infty$ jusqu'à $u' = \infty$. Si l'on fait

$$t = \frac{\sqrt{\frac{k \cdot H}{4k''}} \cdot \left(u' + \frac{Gu}{H}\right)}{a \cdot \sqrt{E}},$$

et si l'on prend l'intégrale depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, on aura en ne considérant que la variation de u' ,

$$\int \sqrt{\frac{k}{4k''\pi}} \cdot \frac{du}{a} \cdot \frac{I}{\sqrt{H}} \cdot c - \frac{ku^2}{4k''a^2} \cdot \frac{FH - G^2}{EH}.$$

Or on a

$$\frac{FH - G^2}{E} = I^2;$$

l'intégrale précédente devient donc

$$\int \frac{I}{\sqrt{H}} \cdot \frac{du}{a} \cdot \sqrt{\frac{k}{4k''\pi}} \cdot c - \frac{k}{4k''} \cdot \frac{I^2 u^2}{a^2 \cdot H}.$$

On aura, par le numéro précédent, l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, sur la correction du premier élément, en multipliant la quantité sous le signe $\int$ par $\pm u$, et prenant l'intégrale depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, ce qui donne pour cette erreur,

$$\pm \frac{a \cdot \sqrt{H}}{I \cdot \sqrt{\frac{k\pi}{k''}}};$$

le signe $+$ indiquant l'erreur moyenne à craindre en plus, et le signe $-$, l'erreur moyenne à craindre en moins.

Déterminons présentement les facteurs $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$, de manière que cette erreur soit un *minimum*. En faisant varier $m^{(i)}$ seul, on a

$$d \cdot \log \frac{\sqrt{H}}{I} = dm^{(i)} \cdot \frac{[-p^{(i)} \cdot S \cdot n^{(i)} q^{(i)} + q^{(i)} \cdot S \cdot n^{(i)} p^{(i)}]}{I} \\ + dm^{(i)} \cdot \frac{\left\{ \begin{array}{l} q^{(i)} \cdot S \cdot n^{(i)2} \cdot S \cdot m^{(i)} q^{(i)} - n^{(i)} \cdot S \cdot m^{(i)} q^{(i)} \cdot S \cdot n^{(i)} q^{(i)} \\ - q^{(i)} \cdot S \cdot m^{(i)} n^{(i)} \cdot S \cdot n^{(i)} q^{(i)} + m^{(i)} \cdot (S \cdot n^{(i)} q^{(i)})^2 \end{array} \right\}}{H}.$$

Il est facile de voir que cette différentielle disparaît, si l'on suppose dans les coefficients de $dm^{(i)}$,

$$m^{(i)} = \mu \cdot p^{(i)}, \quad n^{(i)} = \mu \cdot q^{(i)},$$

μ étant un coefficient arbitraire indépendant de i , et au moyen duquel on peut rendre $m^{(i)}$ et $n^{(i)}$ des nombres entiers; la suppo-

sition précédente rend donc nulle la différentielle de $\frac{\sqrt{H}}{I}$, prise par rapport à $m^{(i)}$. On verra de la même manière, que cette supposition rend nulle la différentielle de la même quantité, prise par rapport à $n^{(i)}$. Ainsi cette supposition rend un *minimum*, l'erreur moyenne à craindre sur la correction du premier élément; et l'on verra de la même manière, qu'elle rend encore un *minimum*, l'erreur moyenne à craindre sur la correction du second élément, erreur que l'on obtient en changeant dans l'expression de la précédente, H en F . Dans cette supposition, les corrections des deux élémens sont

$$z = \frac{S.q^{(i)2} \cdot S.p^{(i)}\alpha^{(i)} - S.p^{(i)}q^{(i)} \cdot S.q^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2} \cdot S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2},$$

$$z' = \frac{S.p^{(i)2} \cdot S.v^{(i)}\alpha^{(i)} - S.p^{(i)}q^{(i)} \cdot S.p^{(i)}\alpha^{(i)}}{S.p^{(i)2} \cdot S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}.$$

Il est facile de voir que ces corrections sont celles que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, ou du *minimum* de la fonction

$$S.(p^{(i)}z + q^{(i)}z' - \alpha^{(i)})^2;$$

d'où il suit que cette méthode a généralement lieu, quel que soit le nombre des élémens à déterminer; car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'élémens.

En substituant pour $\alpha \cdot \sqrt{\frac{k''}{k\pi}}$, la quantité $\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}}$, à laquelle on peut, par le n° 20, le supposer égal, ϵ , $\epsilon^{(i)}$, etc. étant ce qui reste dans les équations de condition, après y avoir substitué les corrections données par la méthode des moindres carrés des erreurs; l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}} \cdot \sqrt{S.q^{(i)2}}}{\sqrt{S.p^{(i)2} \cdot S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}}.$$

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur le second élément, est

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}} \cdot \sqrt{S.p^{(i)2}}}{\sqrt{S.p^{(i)2} \cdot S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}},$$

d'où l'on voit que le premier élément est plus ou moins bien déterminé que le second, suivant que $S.q^{(i)2}$ est plus petit ou plus grand que $S.p^{(i)2}$.

Si les r premières équations de condition ne renferment point q , et si les $s-r$ dernières ne renferment point p ; alors $S.p^{(i)}q^{(i)}=0$, et les formules précédentes coïncident avec celle du numéro précédent.

On peut obtenir ainsi l'erreur moyenne à craindre sur chaque élément déterminé par la méthode des moindres carrés des erreurs, quel que soit le nombre des élémens, pourvu que l'on considère un grand nombre d'observations. Soient z, z', z'', z''' , etc., les corrections de chaque élément, et représentons généralement les équations de condition, par la suivante,

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)}.z + q^{(i)}.z' + r^{(i)}.z'' + t^{(i)}.z''' + \text{etc.} - a^{(i)}.$$

Dans le cas d'un seul élément, l'erreur moyenne à craindre est, comme on l'a vu,

$$\pm \sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S.v^{(i)2}}}. \quad (a)$$

Lorsqu'il y a deux élémens, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans la fonction (a), $S.p^{(i)2}$ dans $S.p^{(i)2} - \frac{(S.p^{(i)}q^{(i)})^2}{S.q^{(i)2}}$; ce qui donne pour cette erreur,

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}} \cdot \sqrt{S.q^{(i)2}}}{\sqrt{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2} - (S.p^{(i)}q^{(i)})^2}}. \quad (a')$$

Lorsqu'il y a trois élémens, on aura l'erreur à craindre sur le premier élément, en changeant dans cette expression (a'), $S.q^{(i)2}$ dans $S.p^{(i)2} - \frac{(S.p^{(i)}r^{(i)})^2}{S.r^{(i)2}}$, $S.p^{(i)}q^{(i)}$ dans $S.p^{(i)}q^{(i)} - \frac{S.p^{(i)}r^{(i)}.S.q^{(i)}r^{(i)}}{S.r^{(i)2}}$, et $S.q^{(i)2}$ dans $S.q^{(i)2} - \frac{(S.q^{(i)}r^{(i)})^2}{S.r^{(i)2}}$; ce qui donne pour cette erreur,

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{S.\epsilon^{(i)2}}{2s\pi}} \cdot \sqrt{S.q^{(i)2}.S.r^{(i)2} - (S.q^{(i)}r^{(i)})^2}}{\sqrt{\frac{S.p^{(i)2}.S.q^{(i)2}.S.r^{(i)2} - S.p^{(i)2}.(S.q^{(i)}r^{(i)})^2 - S.q^{(i)2}.(S.p^{(i)}r^{(i)})^2}{-S.r^{(i)2}.(S.p^{(i)}q^{(i)})^2 + 2.S.p^{(i)}q^{(i)}.S.p^{(i)}r^{(i)}.S.q^{(i)}r^{(i)}}}}. \quad (a'')$$

Dans

Dans le cas de quatre élémens, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, en changeant dans cette expression (α''), $S.p^{(i)2}$, dans $S.p^{(i)2} - \frac{(S.p^{(i)}l^{(i)})^2}{S.l^{(i)2}}$; $S.p^{(i)}q^{(i)}$, dans $S.p^{(i)}q^{(i)} - \frac{S.p^{(i)}l^{(i)}.S.q^{(i)}l^{(i)}}{S.l^{(i)2}}$, etc. En continuant ainsi, on aura l'erreur moyenne à craindre sur le premier élément, quel que soit le nombre des élémens. En changeant dans l'expression de cette erreur, ce qui est relatif au premier élément, dans ce qui est relatif au second, et réciproquement; on aura l'erreur moyenne à craindre sur le second élément, et ainsi des autres.

De là résulte un moyen simple de comparer entre elles diverses tables astronomiques, du côté de la précision. Ces tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvemens, et les coefficients de leurs argumens; car si l'une d'elles, par exemple, contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer dans celles-ci, ce coefficient nul. Maintenant, si l'on comparait ces tables à la totalité des bonnes observations, en les rectifiant par cette comparaison; ces tables ainsi rectifiées, satisferaient, par ce qui précède, à la condition que la somme des carrés des erreurs qu'elles laisseraient subsister encore, soit un *minimum*. Les tables qui approcheraient le plus de remplir cette condition, mériteraient donc la préférence; d'où il suit qu'en comparant ces diverses tables, à un nombre considérable d'observations, la présomption d'exactitude doit être en faveur de celle dans laquelle la somme des carrés des erreurs est plus petite que dans les autres.

22. Jusqu'ici nous avons supposé les facilités des erreurs positives, les mêmes que celles des erreurs négatives. Considérons maintenant le cas général dans lequel ces facilités peuvent être différentes. Nommons α l'intervalle dans lequel les erreurs de chaque observation peuvent s'étendre, et supposons-le partagé dans un nombre infini $n + n'$ de parties égales et prises pour l'unité, n étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs négatives, et n' étant le nombre des parties qui répondent aux erreurs positives.

Sur chaque point de l'intervalle α , élevons une ordonnée qui exprime la probabilité de l'erreur correspondante, et désignons par $\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$, l'ordonnée correspondante à l'erreur x . Cela posé, considérons la suite

$$\begin{aligned} & \phi\left(\frac{-n}{n+n'}\right) \cdot c^{-qn\varpi} V^{-1} + \phi\left(\frac{-(n-1)}{n+n'}\right) \cdot c^{-q(n-1)\varpi} V^{-1} \dots \\ & \dots + \phi\left(\frac{-1}{n+n'}\right) \cdot c^{-q\varpi} V^{-1} + \phi\left(\frac{0}{n+n'}\right) + \phi\left(\frac{1}{n+n'}\right) \cdot c^{q\varpi} V^{-1} \dots \\ & \dots + \phi\left(\frac{n'-1}{n+n'}\right) \cdot c^{q(n'-1)\varpi} V^{-1} + \phi\left(\frac{n'}{n+n'}\right) \cdot c^{qn'\varpi} V^{-1}. \end{aligned}$$

Représentons cette suite par $f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{qx\varpi} V^{-1}$, le signe f s'étendant à toutes les valeurs de x , depuis $x = -n$ jusqu'à $x = n'$. Le terme indépendant de $c^{\varpi} V^{-1}$ et de ses puissances, dans le développement de la fonction

$$\begin{aligned} c^{-(l+\mu)\varpi} V^{-1} \times f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{qx\varpi} V^{-1} \times f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{q^{(1)}x\varpi} V^{-1} \dots \\ \dots \times f\phi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot c^{q^{(l-1)}x\varpi} V^{-1}, \end{aligned}$$

sera, par le n° 21, la probabilité que la fonction

$$q\epsilon + q^{(1)}\epsilon^{(1)} \dots + q^{(l-1)}\epsilon^{(l-1)}, \quad (m)$$

sera égale à $l + \mu$; cette probabilité est donc

$$\frac{1}{2\pi} \cdot f d\varpi \cdot c^{-l\varpi} V^{-1} \cdot c^{-\mu\varpi} V^{-1} \times f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{qx\varpi} V^{-1} \times \text{etc.}, \quad (1)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. Le logarithme de la fonction

$$c^{-\mu\varpi} V^{-1} \times f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{qx\varpi} V^{-1} \times f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{q^{(1)}x\varpi} V^{-1} \times \text{etc.}, \quad (2)$$

est

$$-\mu\varpi V^{-1} + \log \left[f\phi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot c^{qx\varpi} V^{-1} \right] + \text{etc.},$$

n et n' étant supposés des nombres infinis, si l'on fait

$$\frac{x}{n+n'} = x', \quad \frac{1}{n+n'} = dx';$$

si de plus on suppose

$$k = \int dx' \cdot \varphi(x'), \quad k' = \int x' dx' \cdot \varphi(x'), \quad k'' = \int x'^2 dx' \cdot \varphi(x'), \quad \text{etc.},$$

les intégrales étant prises depuis $x' = -\frac{n}{n+n'}$ jusqu'à $x' = \frac{n'}{n+n'}$; on aura

$$\int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right) \cdot e^{q x \varpi} \sqrt{-1} = (n+n') \cdot k \cdot \left\{ 1 + \frac{k'}{k} \cdot q \cdot (n+n') \cdot \varpi \sqrt{-1} \right. \\ \left. - \frac{k''}{2k} \cdot q^2 \cdot (n+n')^2 \cdot \varpi^2 + \text{etc.} \right\}.$$

L'erreur de chaque observation devant tomber dans les limites $-n$ et $+n'$, et la probabilité que cela aura lieu étant $\int \varphi\left(\frac{x}{n+n'}\right)$, ou $(n+n') \cdot k$, cette quantité doit être égale à l'unité. De là il est facile de conclure que le logarithme de la fonction (2) est, en faisant $\mu' = \frac{\mu}{n+n'}$,

$$\left(\frac{k'}{k} \cdot S \cdot q^{(i)} - \mu' \right) \cdot (n+n') \cdot \varpi \sqrt{-1} - \frac{k k'' - k'^2}{2k^2} \cdot S \cdot q^{(i)^2} \cdot (n+n')^2 \cdot \varpi^2 + \text{etc.},$$

le signe S embrassant toutes les valeurs de i , depuis i nul jusqu'à $i = s-1$. On fera disparaître la première puissance de ϖ , en faisant

$$\mu' = \frac{k'}{k} \cdot S \cdot q^{(i)};$$

et si l'on ne considère que sa seconde puissance, ce que l'on peut faire par ce qui précède, lorsque s est un très-grand nombre, on aura, pour le logarithme de la fonction (2),

$$- \frac{k k'' - k'^2}{2k^2} \cdot S \cdot q^{(i)^2} \cdot (n+n')^2 \cdot \varpi^2.$$

En repassant des logarithmes aux nombres, la fonction (2) se transforme dans la suivante,

$$c^{- \frac{k k'' - k'^2}{2k^2} \cdot (n+n')^2 \cdot \varpi^2 \cdot S \cdot q^{(i)^2}};$$

l'intégrale (1) devient ainsi,

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int d\omega \cdot c \quad - l \omega \sqrt{-1} \quad - \frac{kk'' - k'^2}{2k^2} \cdot (n+n')^2 \cdot \omega^2 \cdot S \cdot q^{(i)2}$$

Supposons

$$l = (n+n') \cdot r \cdot \sqrt{S \cdot q^{(i)2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{(kk'' - k'^2) \cdot S \cdot q^{(i)2}}{2k^2}} \cdot (n+n') \omega - \frac{r \cdot \sqrt{-1}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2k^2}{kk'' - k'^2}}.$$

La variation de l étant l'unité, on aura

$$1 = (n+n') \cdot dr \cdot \sqrt{S \cdot q^{(i)2}};$$

l'intégrale précédente devient ainsi, après l'avoir intégrée depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$,

$$\frac{kdr}{\sqrt{2 \cdot (kk'' - k'^2)} \cdot \pi} \cdot c \quad - \frac{k^2 r^2}{2 (kk'' - k'^2)}$$

Ainsi la probabilité que la fonction (m) sera comprise dans les limites

$$\frac{ak'}{k} \cdot S \cdot q^{(i)} \pm ar \cdot \sqrt{S \cdot q^{(i)2}},$$

est égale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \frac{kdr}{\sqrt{2 \cdot (kk'' - k'^2)}} \cdot c \quad - \frac{k^2 r^2}{2 (kk'' - k'^2)},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul.

$\frac{ak'}{k}$ est l'abscisse de l'ordonnée qui passe par le centre de gravité de l'aire de la courbe des probabilités des erreurs de chaque observation; le produit de cette abscisse par $S \cdot q^{(i)}$, est donc le résultat moyen vers lequel la fonction (m) converge sans cesse. Si l'on suppose $1 = q = q^{(i)} = \text{etc.}$; la fonction (m) devient la somme des erreurs, et alors $S \cdot q^{(i)}$ devient s ; en divisant donc par s la somme des erreurs, pour avoir l'erreur moyenne; cette erreur converge sans cesse vers l'abscisse du centre de gravité, de manière qu'en

prenant de part et d'autre un intervalle quelconque aussi petit que l'on voudra, la probabilité que l'erreur moyenne tombera dans cet intervalle, finira, en multipliant indéfiniment les observations, par ne différer de la certitude, que d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.

25. Nous venons de rechercher le résultat moyen que des observations nombreuses et non faites encore, doivent indiquer avec le plus d'avantage, et la loi de probabilité des erreurs de ce résultat. Considérons présentement le résultat moyen des observations déjà faites, et dont on connaît les écarts respectifs. Pour cela, concevons un nombre s d'observations du même genre, c'est-à-dire, telles que la loi des erreurs soit la même pour toutes. Nommons A le résultat de la première; $A + q$, celui de la seconde; $A + q^{(1)}$, celui de la troisième, et ainsi de suite; q , $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, etc. étant des quantités positives et croissantes, ce que l'on peut toujours obtenir par une disposition convenable des observations. Désignons encore par $\phi(z)$, la probabilité de l'erreur z pour chaque observation, et supposons que $A + x$ soit le vrai résultat. L'erreur de la première observation est alors $-x$; $q - x$, $q^{(1)} - x$, etc. sont les erreurs de la seconde, de la troisième, etc. La probabilité de l'existence simultanée de toutes ces erreurs, est le produit de leurs probabilités respectives; elle est donc

$$\phi(-x) \cdot \phi(q-x) \cdot \phi(q^{(1)}-x) \cdot \text{etc.}$$

Maintenant, x étant susceptible d'une infinité de valeurs; en les considérant comme autant de causes de l'événement observé, la probabilité de chacune d'elles sera, par le n° 1,

$$\frac{dx \cdot \phi(-x) \cdot \phi(q-x) \cdot \phi(q^{(1)}-x) \cdot \text{etc.}}{\int dx \cdot \phi(-x) \cdot \phi(q-x) \cdot \phi(q^{(1)}-x) \cdot \text{etc.}}$$

l'intégrale du dénominateur étant prise pour toutes les valeurs dont x est susceptible. Nommons $\frac{1}{H}$ ce dénominateur. Cela posé, imaginons une courbe dont x soit l'abscisse, et dont l'ordonnée y soit

$$H \cdot \phi(-x) \cdot \phi(q-x) \cdot \phi(q^{(1)}-x) \cdot \text{etc.};$$

cette courbe sera celle des probabilités des valeurs de x . La valeur qu'il faut choisir pour résultat moyen, est celle qui rend l'erreur moyenne à craindre, un *minimum*. Toute erreur, soit positive, soit négative, devant être considérée comme un désavantage, ou une perte réelle au jeu; on a le désavantage moyen, en prenant la somme des produits de chaque désavantage, par sa probabilité; la valeur moyenne de l'erreur à craindre, est donc la somme des produits de chaque erreur, abstraction faite du signe, par sa probabilité. Déterminons l'abscisse qu'il faut choisir pour que cette somme soit un *minimum*. Pour cela, donnons aux abscisses, pour origine, la première extrémité de la courbe précédente, et nommons x' et y' les coordonnées de la courbe, à partir de cette origine. Soit l la valeur qu'il faut choisir. Il est clair que si le vrai résultat était x' , l'erreur du résultat l serait, abstraction faite du signe, $l - x'$, tant que x' serait moindre que l ; or y' est la probabilité que x' est le résultat vrai; la somme des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, multipliées par leur probabilité, est donc pour toutes les valeurs de x' , moindres que l , $\int (l - x') \cdot y' dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = l$. On verra de la même manière, que pour les valeurs de x' supérieures à l , la somme des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité, est $\int (x' - l) \cdot y' dx'$, l'intégrale étant prise depuis $x' = l$ jusqu'à l'abscisse x' correspondante à la dernière extrémité de la courbe; la somme entière des erreurs à craindre, abstraction faite du signe, et multipliées par leurs probabilités respectives, est donc

$$\int (l - x') \cdot y' dx' + \int (x' - l) \cdot y' dx'.$$

La différentielle de cette fonction, prise par rapport à l , est

$$dl \cdot \int y' dx' - dl \cdot \int y' dx';$$

car on a la différentielle de $\int (l - x') \cdot y' dx'$, en différentiant d'abord la valeur de l sous le signe $\int$, et en ajoutant à cette différentielle, l'accroissement qui résulte de la variation de la limite de l'intégrale, limite qui se change en $l + dl$. Cet accroissement est égal à l'élément $(l - x') \cdot y' dx'$, à la limite où $x' = l$; il est donc nul, et $dl \cdot \int y' dx'$ est la différentielle de l'intégrale $\int (l - x') \cdot y' dx'$. On

verra de la même manière, que $-dl \cdot f y' dx'$ est la différentielle de l'intégrale $f(x' - l) \cdot y' dx'$. La somme de ces différentielles est nulle relativement à l'abscisse l , pour laquelle l'erreur moyenne à craindre est un *minimum*; on a donc, relativement à cette abscisse,

$$f y' dx' = f y' dx',$$

la première intégrale étant prise depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = l$, et la seconde étant prise depuis $x' = l$ jusqu'à la valeur extrême de x' .

Il suit de là que l'abscisse qui rend l'erreur moyenne à craindre, un *minimum*, est celle dont l'ordonnée divise l'aire de la courbe en deux parties égales. Ce point jouit encore de la propriété d'être celui en deçà duquel il est aussi probable que le vrai résultat tombe, qu'au-delà; et par cette raison, il peut encore être nommé *milieu de probabilité*. Des géomètres célèbres ont pris pour le milieu qu'il faut choisir, celui qui rend le résultat observé, le plus probable, et par conséquent l'abscisse qui répond à la plus grande ordonnée de la courbe; mais le milieu que nous adoptons, est évidemment indiqué par la théorie des probabilités.

Si l'on met $\varphi(x)$ sous la forme d'exponentielle, et qu'on le désigne par $c^{-\downarrow(x^2)}$, afin qu'il puisse également convenir aux erreurs positives et négatives; on aura

$$y = H \cdot c^{-\downarrow(x^2) - \downarrow(x-q)^2 - \downarrow(x-q^{(1)})^2 - \text{etc.}} \quad (1)$$

Si l'on fait $x = a + z$, et que l'on développe l'exposant de c par rapport aux puissances de z , y prendra cette forme,

$$y = H \cdot c^{-M - 2Nz - Pz^2 - Qz^3 - \text{etc.}},$$

expression dans laquelle on a

$$\begin{aligned} M &= \downarrow(a^2) + \downarrow(a-q)^2 + \downarrow(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.}, \\ N &= a \cdot \downarrow'(a^2) + (a-q) \cdot \downarrow'(a-q)^2 + (a-q^{(1)}) \cdot \downarrow'(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.}, \\ P &= \downarrow'(a^2) + \downarrow'(a-q)^2 + \downarrow'(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.} + 2a^2 \cdot \downarrow''(a^2) \\ &\quad + 2(a-q)^2 \cdot \downarrow''(a-q)^2 + 2(a-q^{(1)})^2 \cdot \downarrow''(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

$\psi'(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi(t)$, $\psi''(t)$ étant le coefficient de dt dans la différentielle de $\psi'(t)$, et ainsi de suite.

Supposons le nombre s des observations, très-grand, et déterminons a par l'équation $N=0$ que donne la condition du *maximum* de y ; alors on a

$$y = H \cdot c^{-M - Pz^2 - Qz^3 - \text{etc.}}$$

M, P, Q , etc. sont de l'ordre s ; or, si z est très-petit de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, Qz^3 devient de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{s}}$, et l'exponentielle $c^{-Qz^3 - \text{etc.}}$ peut se réduire à l'unité. Ainsi dans l'intervalle depuis $z=0$ jusqu'à $z = \frac{r}{\sqrt{s}}$, on peut supposer

$$y = H \cdot c^{-M - Pz^2}.$$

Au-delà, et lorsque z est de l'ordre $s^{-\frac{m}{2}}$, m étant plus petit que l'unité, Pz^2 devient de l'ordre s^{1-m} ; par conséquent c^{-Pz^2} devient ainsi que y , insensible; ensorte que l'on peut, dans toute l'étendue de la courbe, supposer

$$y = H \cdot c^{-M - Pz^2}.$$

La valeur de a donnée par l'équation $N=0$, ou

$$0 = a \cdot \psi'(a^2) + (a-q) \cdot \psi'(a-q)^2 + (a-q^{(1)}) \cdot \psi'(a-q^{(1)})^2 + \text{etc.},$$

est alors l'abscisse x correspondante à l'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en parties égales. La condition que l'aire entière de la courbe doit représenter la certitude ou l'unité, donne

$$\frac{1}{H} = \int dz \cdot c^{-M - Pz^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, ce qui donne

$$H = \frac{c^M \cdot \sqrt{P}}{\sqrt{\pi}}.$$

L'erreur

L'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, en prenant a pour résultat moyen des observations, est $\pm \int z y dz$, l'intégrale étant prise depuis z nul jusqu'à z infini, ce qui donne pour cette erreur

$$\pm \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot P}}.$$

Mais l'ignorance entière où l'on est de la loi $e^{-\psi(x^2)}$ des erreurs de chaque observation, ne permet pas de former l'équation

$$0 = a \cdot \psi'(a^2) + (a-q) \cdot \psi'(a-q)^2 + \text{etc.}$$

Ainsi la connaissance des valeurs de q , $q^{(1)}$, etc., ne donnant à *posteriori*, aucune lumière sur le résultat moyen a des observations; il faut s'en tenir au résultat le plus avantageux déterminé à *priori*, et que l'on a vu être celui que fournit la méthode des moindres carrés des erreurs.

Cherchons la fonction $\psi(x^2)$ qui donne constamment la règle des milieux arithmétiques, admise par les observateurs. Pour cela, concevons que sur les s observations, les i premières coïncident, ainsi que les $s-i$ dernières. L'équation $N = 0$ devient alors

$$0 = i \cdot a \cdot \psi'(a^2) + (s-i) \cdot (a-q) \cdot \psi'(a-q)^2.$$

La règle des milieux arithmétiques donne

$$a = \frac{s-i}{s} \cdot q;$$

L'équation précédente devient ainsi

$$\psi' \left[\left(\frac{s-i}{s} \right)^2 \cdot q^2 \right] = \psi' \left(\frac{i^2}{s^2} \cdot q^2 \right).$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient $\frac{i}{s}$ et q , il est nécessaire que $\psi'(t)$ soit indépendant de t , ce qui donne

$$\psi'(t) = k,$$

k étant une constante. En intégrant, on a

$$\psi(t) = kt - L,$$

L étant une constante arbitraire ; partant,

$$e^{-\frac{1}{2}(x^2)} = e^{L-kx^2}.$$

Telle est donc la fonction qui peut seule, donner généralement la règle des milieux arithmétiques. La constante L doit être déterminée de manière que l'intégrale $\int dx \cdot e^{L-kx^2}$, prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, soit égale à l'unité ; car il est certain que l'erreur x d'une observation doit tomber dans ces limites ; on a donc

$$e^L = \sqrt{\frac{k}{\pi}};$$

par conséquent la probabilité de l'erreur x est $\sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot e^{-kx^2}$.

A la vérité, cette expression donne l'infini pour la limite des erreurs, ce qui n'est pas admissible ; mais, vu la rapidité avec laquelle ce genre d'exponentielles diminue à mesure que x augmente, on peut prendre k assez grand, pour qu'au-delà de la limite admissible des erreurs, leurs probabilités soient insensibles, et puissent être supposées nulles.

La loi précédente des erreurs donne pour l'expression générale (1) de y ,

$$y = \sqrt{\frac{sk}{\pi}} \cdot e^{-ks \cdot u^2};$$

en déterminant H de manière que l'intégrale entière $\int y dx$ soit l'unité, et faisant

$$x = \frac{S \cdot q^{(i)}}{s} + u.$$

L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales, est celle qui répond à $u = 0$, et par conséquent à

$$x = \frac{S \cdot q^{(i)}}{s};$$

c'est donc la valeur de x qu'il faut choisir pour résultat moyen des observations ; or, cette valeur est celle que donne la règle des milieux arithmétiques ; la loi précédente des erreurs de chaque

observation, donne donc constamment les mêmes résultats que cette règle, et l'on a vu qu'elle est la seule loi qui jouisse de cette propriété.

En adoptant cette loi, la probabilité de l'erreur $\epsilon^{(i)}$ de l'observation $(i+1)^{ième}$, est

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot c^{-k \cdot \epsilon^{(i)2}};$$

or on a vu dans le n° 20, que z étant la correction d'un élément, cette observation fournit l'équation de condition

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)} \cdot z - \alpha^{(i)}.$$

La probabilité de la valeur de $p^{(i)} \cdot z - \alpha^{(i)}$, est donc

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot c^{-k \cdot (p^{(i)}z - \alpha^{(i)})^2};$$

la probabilité de l'existence simultanée des s valeurs $p \cdot z - \alpha$, $p^{(1)} \cdot z - \alpha^{(1)}, \dots, p^{(s-1)} \cdot z - \alpha^{(s-1)}$, sera donc

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right)^{s-1} \cdot c^{-k \cdot S \cdot (p^{(i)}z - \alpha^{(i)})^2}.$$

Cette probabilité varie avec z ; on aura donc la probabilité d'une valeur quelconque de z , en multipliant cette quantité par dz , et divisant le produit par l'intégrale de ce produit, prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$. Soit

$$z = \frac{S \cdot p^{(i)} \alpha^{(i)}}{S \cdot p^{(i)2}} + u,$$

cette probabilité devient

$$du \cdot \sqrt{\frac{k \cdot S \cdot p^{(i)2}}{\pi}} \cdot c^{-ku^2 \cdot S \cdot p^{(i)2}};$$

ensorte que si l'on décrit une courbe dont le coefficient de du soit l'ordonnée, et dont u soit l'abscisse; cette courbe étendue depuis $u = -\infty$ jusqu'à $u = \infty$, peut être considérée comme la courbe des probabilités des erreurs u , dont le résultat

$$z = \frac{S \cdot p^{(i)} \alpha^{(i)}}{S \cdot p^{(i)2}}$$

est susceptible. L'ordonnée qui divise l'aire de la courbe en deux parties égales, est celle qui répond à $u = 0$, et par conséquent à z égal à $\frac{S \cdot p^{(1)} x^{(1)}}{S \cdot p^{(1)2}}$; ce résultat est donc celui qu'il faut choisir; or, il est le même que celui que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; la loi précédente des erreurs de chaque observation, conduit donc aux mêmes résultats que cette méthode.

La méthode des moindres carrés des erreurs devient nécessaire, lorsqu'il s'agit de prendre un milieu entre plusieurs résultats donnés, chacun, par l'ensemble d'un grand nombre d'observations de divers genres. Supposons qu'un même élément soit donné, 1°. par le résultat moyen de s observations d'un premier genre, et qu'il soit par ces observations, égal à A ; 2°. par le résultat moyen de s' observations d'un second genre, et qu'il soit égal à $A + q$; 3°. par le résultat moyen de s'' observations d'un troisième genre, et qu'il soit égal à $A + q'$, et ainsi du reste. Si l'on représente par $A + x$, l'élément vrai; l'erreur du résultat des observations s sera $-x$; en supposant donc $\mathcal{E}$ égal à

$$\sqrt{\frac{k}{k^s}} \cdot \frac{\sqrt{S \cdot p^{(1)2}}}{2a},$$

si l'on fait usage de la méthode des moindres carrés des erreurs, pour déterminer le résultat moyen; ou à

$$\sqrt{\frac{k}{k^{s'}}} \cdot \frac{S \cdot p^{(1)}}{2a \cdot \sqrt{s}},$$

si l'on fait usage de la méthode ordinaire; la probabilité de cette erreur sera, par le n° 20,

$$\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mathcal{E}^2 \cdot x^2}.$$

L'erreur du résultat des observations s' sera $q - x$, et en désignant par $\mathcal{E}'$ pour ces observations, ce que nous avons nommé $\mathcal{E}$ pour les observations s , la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\mathcal{E}'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mathcal{E}'^2 \cdot (x-q)^2}.$$

Pareillement l'erreur du résultat des observations s'' sera $q' - x$; et en nommant pour elles, ϵ'' , ce que nous avons nommé ϵ pour les observations s ; la probabilité de cette erreur sera

$$\frac{\epsilon''}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\epsilon''^2 \cdot (x-q')^2},$$

et ainsi de suite. Le produit de toutes ces probabilités sera la probabilité que $-x$, $q - x$, $q' - x$, etc. seront les erreurs des résultats moyens des observations s , s' , s'' , etc. En le multipliant par dx , et prenant l'intégrale depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, on aura la probabilité que les résultats moyens des observations s' , s'' , etc., surpasseront respectivement de q , q' , etc., le résultat moyen des observations s .

Si l'on prend l'intégrale dans des limites déterminées, on aura la probabilité que la condition précédente étant remplie, l'erreur du premier résultat sera comprise dans ces limites; en divisant cette probabilité par celle de la condition elle-même, on aura la probabilité que l'erreur du premier résultat sera comprise dans des limites données, lorsqu'on est certain que la condition a effectivement lieu; cette probabilité est donc

$$\frac{\int dx \cdot e^{-\epsilon^2 x^2 - \epsilon'^2 \cdot (x-q)^2 - \epsilon''^2 \cdot (x-q')^2 - \text{etc.}}}{\int dx \cdot e^{-\epsilon^2 x^2 - \epsilon'^2 \cdot (x-q)^2 - \epsilon''^2 \cdot (x-q')^2 - \text{etc.}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans les limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$.

On a

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 x^2 + \epsilon'^2 \cdot (x-q)^2 + \epsilon''^2 \cdot (x-q')^2 + \text{etc.} \\ &= (\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}) \cdot x^2 - 2x \cdot (\epsilon'^2 q + \epsilon''^2 q' + \text{etc.}) \\ &+ \epsilon'^2 q^2 + \epsilon''^2 q'^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Soit

$$x = \frac{\epsilon'^2 q + \epsilon''^2 q' + \text{etc.}}{\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}} + t;$$

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{\int dt \cdot e^{-(\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}) \cdot t^2}}{\int dt \cdot e^{-(\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}) \cdot t^2}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise dans des limites données, et celle du dénominateur étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Cette dernière intégrale est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}}}$$

En faisant donc

$$t' = t \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}};$$

la probabilité précédente devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot f dt' \cdot e^{-t'^2}.$$

La valeur de t' la plus probable, est celle qui répond à t' nul; d'où il suit que la valeur de x la plus probable, est celle qui répond à $t = 0$, ainsi la correction du premier résultat, que l'ensemble de toutes les observations $s, s', s'', \text{etc.}$ donne avec le plus de probabilité, est

$$\frac{\epsilon'^2 q + \epsilon''^2 q' + \text{etc.}}{\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}}.$$

Cette correction ajoutée au résultat A , donne pour le résultat qu'il faut choisir,

$$\frac{A \cdot \epsilon^2 + (A + q) \cdot \epsilon'^2 + (A + q') \cdot \epsilon''^2 + \text{etc.}}{\epsilon^2 + \epsilon'^2 + \epsilon''^2 + \text{etc.}}.$$

La correction précédente est celle qui rend un *minimum*, la fonction

$$(\epsilon \cdot x)^2 + (\epsilon' \cdot \overline{x - q})^2 + (\epsilon'' \cdot \overline{x - q'})^2 + \text{etc.}$$

Or la plus grande ordonnée de la courbe des probabilités du premier résultat est, comme on vient de le voir, $\frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}$; celle de la courbe des probabilités du second résultat, est $\frac{\epsilon'}{\sqrt{\pi}}$, et ainsi de suite; le milieu qu'il faut choisir entre les divers résultats, est donc celui qui rend un *minimum*, la somme des carrés de l'erreur de chaque résultat, multipliée par la plus grande ordonnée de sa courbe de probabilité. Ainsi la loi du *minimum* des carrés

des erreurs, devient nécessaire, lorsque l'on doit prendre un milieu entre des résultats donnés, chacun, par un grand nombre d'observations.

24. On a vu précédemment, que de toutes les manières de combiner les équations de condition, pour en former des équations finales linéaires, nécessaires à la détermination des élémens; la plus avantageuse est celle qui résulte de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations, du moins lorsque les observations sont en grand nombre. Si au lieu de considérer le *minimum* des carrés des erreurs, on considérerait le *minimum* d'autres puissances des erreurs, ou même de toute autre fonction des erreurs; les équations finales cesseraient d'être linéaires, et leur résolution deviendrait impraticable, si les observations étaient en grand nombre. Cependant il est un cas qui mérite une attention particulière, en ce qu'il donne le système dans lequel la plus grande erreur, abstraction faite du signe, est moindre que dans tout autre système. Ce cas est celui du *minimum* des puissances infinies et paires des erreurs. Ne considérons ici que la correction d'un seul élément; et z exprimant cette correction, représentons, comme précédemment, les équations de condition, par la suivante,

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)}.z - \alpha^{(i)},$$

i pouvant varier depuis zéro jusqu'à $s - 1$, s étant le nombre des observations. La somme des puissances $2n$ des erreurs, sera $S.(\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z)^{2n}$, le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i . On peut supposer, dans cette somme, toutes les valeurs de $p^{(i)}$ positives; car si l'une d'elles était négative, elle deviendrait positive en changeant, comme on peut le faire, les signes des deux termes du binôme élevé à la puissance $2n$, auquel elle correspond. Nous supposerons donc les quantités $\alpha - p.z$, $\alpha^{(1)} - p^{(1)}.z$, $\alpha^{(2)} - p^{(2)}.z$, etc.; disposées de manière que les quantités p , $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, etc. soient positives et croissantes. Cela posé, si $2n$ est infini, il est clair que le plus grand terme de la somme $S.(\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z)^{2n}$, sera la somme entière, à moins qu'il n'y ait un ou plusieurs autres termes qui lui soient égaux, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas du

minimum de la somme. En effet, s'il n'y avait qu'une seule quantité la plus grande, abstraction faite du signe, telle que $\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z$; on pourrait la diminuer en faisant varier z convenablement, et alors la somme $S.(\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z)^{2n}$ diminuerait et ne serait pas un *minimum*. Il faut de plus que si $\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z$ et $\alpha^{(i')} - p^{(i')}.z$ sont, abstraction faite du signe, les deux quantités les plus grandes et égales entre elles, elles soient de signe contraire. En effet, la somme $(\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z)^{2n} + (\alpha^{(i')} - p^{(i')}.z)^{2n}$ devant être alors un *minimum*, sa différentielle $-2ndz.[p^{(i)}.(\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z)^{2n-1} + p^{(i')}.(\alpha^{(i')} - p^{(i')}.z)^{2n-1}]$ doit être nulle, ce qui ne peut être lorsque n est infini, que dans le cas où $\alpha^{(i)} - p^{(i)}.z$ et $\alpha^{(i')} - p^{(i')}.z$ sont infiniment peu différens, et de signe contraire. S'il y a trois quantités les plus grandes, et égales entre elles abstraction faite du signe; on verra de la même manière que leurs signes ne peuvent être les mêmes.

Maintenant, considérons la suite

$$\alpha^{(i-1)} - p^{(i-1)}.z, \alpha^{(i-2)} - p^{(i-2)}.z, \alpha^{(i-3)} - p^{(i-3)}.z, \dots, \alpha - p.z, \quad (o) \\ -x + p.z, \dots, -\alpha^{(i-3)} + p^{(i-3)}.z, -\alpha^{(i-2)} + p^{(i-2)}.z, -\alpha^{(i-1)} + p^{(i-1)}.z.$$

Si l'on suppose $z = -\infty$, le premier terme de la suite surpasse les suivans, et continue de les surpasser en faisant croître z , jusqu'au moment où il devient égal à l'un d'eux. Alors celui-ci, par l'accroissement de z , devient le plus grand de tous; et à mesure que l'on fait croître z , il continue toujours de surpasser ceux qui le précèdent. Pour déterminer ce terme, on formera la suite des quotiens

$$\frac{\alpha^{(i-1)} - \alpha^{(i-2)}}{p^{(i-1)} - p^{(i-2)}}, \frac{\alpha^{(i-1)} - \alpha^{(i-3)}}{p^{(i-1)} - p^{(i-3)}}, \dots, \frac{\alpha^{(i-1)} - \alpha}{p^{(i-1)} - p}, \frac{\alpha^{(i-1)} + \alpha}{p^{(i-1)} + p}, \dots, \frac{\alpha^{(i-1)} + \alpha^{(i-1)}}{p^{(i-1)} + p^{(i-1)}}.$$

Supposons que $\frac{\alpha^{(i-1)} - \alpha^{(i)}}{p^{(i-1)} - p^{(i)}}$ soit le plus petit de ces quotiens en ayant égard au signe, c'est-à-dire en regardant une quantité négative plus grande, comme plus petite qu'une autre quantité négative moindre. S'il y a plusieurs quotiens les plus petits et égaux, nous considérerons celui qui se rapporte au terme le plus éloigné du premier dans la suite (o); ce terme sera le plus grand de tous, jusqu'au moment où, par l'accroissement de z , il devient égal à l'un des suivans,

suivans, qui commence alors à être le plus grand. Pour déterminer ce nouveau terme, on formera la nouvelle suite de quotiens

$$\frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(1-1)}}{p^{(1)} - p^{(1-1)}}, \frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(1-2)}}{p^{(1)} - p^{(1-2)}}, \dots, \frac{\alpha^{(1)} - \alpha}{p^{(1)} - p}, \frac{\alpha^{(1)} + \alpha}{p^{(1)} + p}, \text{ etc. ;}$$

le terme de la suite (o), auquel répond le plus petit de ces quotiens, sera le nouveau terme. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'un des deux termes qui deviennent égaux et les plus grands, soit dans la première moitié de la suite (o), et l'autre dans la seconde moitié. Soient $\alpha^{(1)} - p^{(1)}.z$ et $-\alpha^{(1')} + p^{(1')}.z$ ces deux termes; alors la valeur de z qui correspond au système du *minimum* de la plus grande des erreurs, abstraction faite du signe, est

$$z = \frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(1')}}{p^{(1)} + p^{(1')}}.$$

S'il y a plusieurs élémens à corriger, les équations de condition qui déterminent leurs corrections, renferment plusieurs inconnues, et la recherche du système de correction, dans lequel la plus grande erreur est, abstraction faite du signe, plus petite que dans tout autre système, devient plus compliquée. J'ai considéré ce cas d'une manière générale, dans le troisième Livre de la Mécanique Céleste. J'observerai seulement ici, qu'alors la somme des puissances $2n$ des erreurs des observations est, comme dans le cas d'une seule inconnue, un *minimum*, lorsque $2n$ est infini; d'où il est facile de conclure que dans le système dont il s'agit, il doit y avoir autant d'erreurs plus une, égales, et les plus grandes abstraction faite du signe, qu'il y a d'élémens à corriger. On conçoit que les résultats correspondans à $2n$ égal à un grand nombre, doivent peu différer de ceux que donne $2n$ infini. Il n'est pas même nécessaire pour cela, que la puissance $2n$ soit fort élevée, et j'ai reconnu par beaucoup d'exemples, que dans le cas même où cette puissance ne surpasse pas le carré, les résultats diffèrent peu de ceux que donne le système du *minimum* des plus grandes erreurs; ce qui est un nouvel avantage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Depuis longtems, les géomètres prennent un milieu arithmétique entre leurs observations; et pour déterminer les élémens qu'ils

veulent connaître, ils choisissent les circonstances les plus favorables pour cet objet, savoir, celles dans lesquelles les erreurs des observations altèrent le moins qu'il est possible, la valeur de ces éléments. Mais Côtes est, si je ne me trompe, le premier qui ait donné une règle générale pour faire concourir à la détermination d'un élément, plusieurs observations, proportionnellement à leur influence. En considérant chaque observation comme une fonction de l'élément, et regardant l'erreur de l'observation comme une différentielle infiniment petite; elle sera égale à la différentielle de la fonction, prise par rapport à cet élément. Plus le coefficient de la différentielle de l'élément sera considérable, moins il faudra faire varier l'élément, pour que le produit de sa variation, par ce coefficient, soit égal à l'erreur de l'observation; ce coefficient exprimera donc l'influence de l'observation sur la valeur de l'élément. Cela posé, Côtes représente toutes les valeurs de l'élément, données par chaque observation, par les parties d'une droite indéfinie, toutes ces parties ayant une commune origine. Il conçoit ensuite, à leurs autres extrémités, des poids proportionnels aux influences respectives des observations. La distance de l'origine commune des parties, au centre commun de gravité de tous ces poids, est la valeur qu'il choisit pour l'élément.

Reprenons l'équation de condition du n° 20,

$$\epsilon^{(i)} = p^{(i)} \cdot z - \alpha^{(i)},$$

$\epsilon^{(i)}$ étant l'erreur de l'observation $(i+1)^{ième}$, et z étant la correction de l'élément déjà connu à fort peu près; $p^{(i)}$ que l'on peut toujours supposer positif, exprimera l'influence de l'observation correspondante. $\frac{\alpha^{(i)}}{p^{(i)}}$ étant la valeur de z résultante de l'observation, la règle de Côtes revient à multiplier cette valeur par $p^{(i)}$, à faire une somme de tous les produits relatifs aux diverses valeurs, et à la diviser par la somme de tous les $p^{(i)}$, ce qui donne

$$z = \frac{S \cdot \alpha^{(i)}}{S \cdot p^{(i)}}.$$

C'était en effet la correction adoptée par les observateurs, avant

l'usage de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations.

Cependant on ne voit pas que depuis cet excellent géomètre, on ait employé sa règle, jusqu'à Euler qui dans sa première pièce de Jupiter et Saturne, me paraît s'être servi le premier, des équations de condition, pour déterminer les élémens du mouvement elliptique de ces deux planètes. Presqu'en même tems, Tobie Mayer en fit usage dans ses belles recherches sur la libration de la lune, et ensuite pour former ses Tables lunaires. Depuis, les meilleurs astronomes ont suivi cette méthode, et le succès des Tables qu'ils ont construites à son moyen, en a constaté l'avantage.

Quand on n'a qu'un élément à déterminer, cette méthode ne laisse aucun embarras; mais lorsque l'on doit corriger à la fois plusieurs élémens, il faut avoir autant d'équations finales formées par la réunion de plusieurs équations de condition, et au moyen desquelles on détermine par l'élimination, les corrections des élémens. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition, pour former les équations finales? C'est ici que les observateurs s'abandonnaient à des tâtonnemens arbitraires qui devaient les conduire à des résultats différens, quoique déduits des mêmes observations. Pour éviter ces tâtonnemens, M. Legendre eut l'idée simple de considérer la somme des carrés des erreurs des observations, et de la rendre un *minimum*; ce qui fournit directement autant d'équations finales, qu'il y a d'élémens à corriger. Ce savant géomètre est le premier qui ait publié cette méthode; mais on doit à M. Gauss la justice d'observer qu'il avait eu, plusieurs années avant cette publication, la même idée dont il faisait un usage habituel, et qu'il avait communiquée à plusieurs astronomes. M. Gauss, dans sa Théorie du Mouvement elliptique, a cherché à rattacher cette méthode à la Théorie des Probabilités, en faisant voir que la même loi des erreurs des observations, qui donne généralement la règle du milieu arithmétique entre plusieurs observations, admise par les observateurs, donne pareillement la règle des moindres carrés des erreurs des observations; et c'est ce qu'on a vu dans le n° 23. Mais comme rien ne prouve

que la première de ces règles donne le résultat le plus avantageux, la même incertitude existe par rapport à la seconde. La recherche de la manière la plus avantageuse de former les équations finales, est sans doute une des plus utiles de la Théorie des Probabilités : son importance dans la physique et l'astronomie, me porta à m'en occuper. Pour cela, je considérai que toutes les manières de combiner les équations de condition, pour en former une équation finale linéaire, revenaient à les multiplier respectivement par des facteurs qui étaient nuls relativement aux équations que l'on n'employait point, et à faire une somme de tous ces produits ; ce qui donne une première équation finale. Un second système de facteurs donne une seconde équation finale, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales, que d'éléments à corriger. Maintenant, il est visible qu'il faut choisir les systèmes de facteurs, de sorte que l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins sur chaque élément, soit un *minimum* ; l'erreur moyenne étant la somme des produits de chaque erreur par sa probabilité. Lorsque les observations sont en petit nombre, le choix de ces systèmes dépend de la loi des erreurs de chaque observation. Mais si l'on considère un grand nombre d'observations, ce qui a lieu le plus souvent dans les recherches astronomiques ; ce choix devient indépendant de cette loi ; et l'on a vu dans ce qui précède, que l'analyse conduit alors directement aux résultats de la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Ainsi cette méthode qui n'offrait d'abord que l'avantage de fournir, sans tâtonnement, les équations finales nécessaires à la correction des éléments, donne en même tems les corrections les plus précises, du moins lorsqu'on ne veut employer que des équations finales qui soient linéaires, condition indispensable, lorsque l'on considère à la fois un grand nombre d'observations ; autrement, l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

CHAPITRE V.

Application du Calcul des Probabilités, à la recherche des phénomènes et de leurs causes.

25. **L**ES phénomènes de la nature se présentent le plus souvent accompagnés de tant de circonstances étrangères ; un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence, qu'il est très-difficile, lorsqu'ils sont très-petits, de les reconnaître. On ne peut alors y parvenir, qu'en multipliant les observations, afin que les effets étrangers venant à se détruire, le résultat moyen des observations ne laisse plus apercevoir que ces phénomènes. On conçoit par ce qui précède, que cela n'a lieu rigoureusement, que dans le cas d'un nombre infini d'observations. Dans tout autre cas, les phénomènes ne sont indiqués par les résultats moyens, que d'une manière probable, mais qui l'est d'autant plus, que les observations sont en plus grand nombre. La recherche de cette probabilité est donc très-importante pour la physique, l'astronomie, et généralement pour toutes les sciences naturelles. On va voir qu'elle rentre dans les méthodes que nous venons d'exposer. Dans le chapitre précédent, l'existence du phénomène était certaine ; son étendue seule a été l'objet du Calcul des Probabilités : ici l'existence du phénomène et son étendue, sont l'objet de ce calcul.

Prenons pour exemple, la variation diurne du baromètre, que l'on observe entre les tropiques, et qui devient sensible même dans nos climats, lorsque l'on choisit et que l'on multiplie convenablement les observations. On a reconnu qu'en général, vers neuf heures du matin, le baromètre est plus élevé que vers quatre heures du soir ; ensuite il remonte jusque vers onze heures du soir, et il redescend jusque vers quatre heures du matin, pour revenir à son *maximum* de hauteur, vers neuf heures. Supposons

que l'on ait observé la hauteur du baromètre vers neuf heures du matin et vers quatre heures du soir, pendant le nombre s de jours; et pour éviter la trop grande influence des causes perturbatrices, choisissons ces jours de manière que dans l'intervalle de neuf heures à quatre heures, le baromètre n'ait pas varié au-delà de quatre millimètres. Supposons ensuite qu'en faisant la somme des s hauteurs du matin, et la somme des s hauteurs du soir, la première de ces sommes surpasse la seconde de la quantité q ; cette différence indiquera une cause constante qui tend à élever le baromètre vers neuf heures du matin, et à l'abaisser vers quatre heures du soir. Pour déterminer avec quelle probabilité cette cause est indiquée, concevons que cette cause n'existe point, et que la différence observée q , résulte des causes perturbatrices accidentelles, et des erreurs des observations. La probabilité qu'alors la différence observée entre les sommes des hauteurs du matin et du soir, doit être au-dessous de q , est, par le n° 18, égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k\pi}{4k''}}} \cdot \int dr \cdot e^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = -\infty$ jusqu'à $r = \frac{q}{a \cdot \sqrt{s}}$, k et k'' étant des constantes dépendantes de la loi de probabilité des différences entre les hauteurs du matin et du soir, et $\pm a$ étant les limites de ces différences, a étant ici égal à quatre millimètres. $\frac{k}{k''}$ étant au moins égal à six, comme on l'a vu dans le n° 20

$\frac{k}{4k''}$ ne peut pas être supposé moindre que $\frac{3}{4}$; en faisant donc $s=400$, et supposant l'étendue de la variation diurne, d'un millimètre, ce qui est à peu près ce que M. Ramond a trouvé dans nos climats, par la comparaison d'un très-grand nombre d'observations, on aura $q=400^m$. Ainsi $r=5$, et $\frac{kr^2}{4k''}$ est au moins égal à 37,5; en faisant donc

$$t^2 = \frac{kr^2}{4k''},$$

la probabilité précédente devient au moins

$$1 - \frac{\int dt . c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = \sqrt{37,5}$ jusqu'à $t = \infty$. Cette intégrale est à fort peu près, par le n° 27 du premier Livre,

$$1 - \frac{c^{-37,5}}{2\sqrt{37,5 \cdot \pi}};$$

et elle approche tellement de l'unité ou de la certitude, qu'il est extrêmement probable que s'il n'existait point de cause constante de l'excès observé de la somme des hauteurs barométriques du matin, sur celles des hauteurs du soir, cet excès serait plus petit que 400^{mi} ; il indique donc avec une extrême vraisemblance, l'existence d'une cause constante qui l'a produit.

Le phénomène d'une variation diurne étant ainsi bien constaté, déterminons la valeur la plus probable de son étendue, et l'erreur que l'on peut commettre sur son évaluation. Supposons pour cela, que cette valeur soit $\frac{q}{s} \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$; la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir, sera comprise dans ces limites, est, par le n° 18,

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{k}{k\pi}}} \int dr . c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$.

On peut éliminer $\frac{k''}{k}$, en observant que par le n° 20, cette fraction est à peu près égale à $\frac{S \cdot \epsilon^{(i)^2}}{2a^2 \cdot s}$; $\pm \epsilon^{(i)}$ étant la différence de $\frac{q}{s}$ à l'étendue observée le $(i+1)^{ieme}$ jour, et le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s - 1$; en faisant donc

$$ar = t \cdot \sqrt{\frac{2S \cdot \epsilon^{(i)^2}}{s}},$$

la probabilité que l'étendue de la variation diurne du matin au soir, est comprise dans les limites $\frac{q}{s} \pm \frac{t}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{\frac{2S \cdot \epsilon^{(1)2}}{s}}$, sera $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt \cdot e^{-t^2}$, l'intégrale étant prise depuis t nul.

La variation diurne des hauteurs du baromètre, dépend uniquement du soleil; mais ces hauteurs sont encore affectées par les marées aériennes que produit l'attraction du soleil et de la lune sur notre atmosphère, et dont j'ai donné la théorie dans le quatrième Livre de la Mécanique Céleste. Il est donc nécessaire de considérer à la fois ces deux variations, et de déterminer leurs grandeurs et leurs époques respectives, en formant des équations de condition analogues à celles dont les astronomes font usage, pour corriger les élémens des mouvemens célestes. Ces variations étant principalement sensibles à l'équateur, et les causes perturbatrices y étant extrêmement petites; on pourra, au moyen d'excellens baromètres, les déterminer avec une grande précision; et je ne doute point que l'on ne reconnaisse alors, dans l'ensemble d'un très-grand nombre d'observations, les lois qu'indique la théorie de la pesanteur dans les marées atmosphériques, et qui se manifestent d'une manière si frappante dans les observations des marées de l'Océan, que j'ai discutées avec étendue, dans le Livre cité de la Mécanique Céleste.

On voit, par ce qui précède, que l'on peut reconnaître l'effet très-petit d'une cause constante, par une longue suite d'observations dont les erreurs peuvent excéder cet effet lui-même. Mais alors, il faut avoir soin de varier les circonstances de chaque observation, de manière que le résultat moyen de leur ensemble, n'en soit point altéré sensiblement, et soit presque entièrement l'effet de la cause dont il s'agit: il faut ensuite multiplier les observations, jusqu'à ce que l'analyse indique une très-grande probabilité que l'erreur de ce résultat sera comprise dans des limites très-rapprochées.

Supposons, par exemple, que l'on veuille reconnaître par l'observation, la petite déviation à l'est, produite par la rotation de la terre, dans la chute des corps. J'ai fait voir dans le dixième Livre de la Mécanique Céleste, que si du sommet d'une tour fort élevée, on abandonne

abandonne un corps à sa pesanteur; il retombera sur un plan horizontal passant par le pied de la tour, à une petite distance à l'est du point de contact de ce plan avec une boule suspendue par un fil dont le point de suspension est celui du départ du corps. J'ai donné dans le Livre cité, l'expression de cette déviation, et il en résulte qu'en faisant abstraction de la résistance de l'air, elle est uniquement vers l'est; qu'elle est proportionnelle au cosinus de la latitude, et à la racine carrée du cube de la hauteur, et qu'à la latitude du point de départ, elle s'élève à 5,1 millimètres, lorsque la hauteur de la tour est de 50 mètres. La résistance de l'air change ce dernier résultat: j'en ai donné pareillement l'expression dans ce cas, au Livre cité.

On a déjà fait un grand nombre d'expériences pour confirmer, par ce moyen, le mouvement de rotation de la terre, qui d'ailleurs est démontré par tant d'autres phénomènes, que cette confirmation devient inutile. Les petites erreurs de ces expériences très-déliées, ont souvent excédé l'effet que l'on voulait déterminer; et ce n'est qu'en multipliant considérablement les expériences, que l'on peut ainsi constater son existence et fixer sa valeur. Nous allons soumettre cet objet à l'analyse des probabilités.

Si l'on prend pour origine des coordonnées, le point de contact du plan et de la boule suspendue par un fil dont le sommet de suspension est celui du départ d'une balle que l'on fait tomber; si l'on marque ensuite sur ce plan, les divers points où la balle va toucher le plan dans chaque expérience; en déterminant le centre commun de gravité de ces points, la ligne menée de l'origine des coordonnées à ce centre, déterminera le sens et la quantité moyenne dont la balle s'est écartée de cette origine; et l'un et l'autre seront déterminés avec d'autant plus d'exactitude, que les expériences seront plus nombreuses et plus précises.

Considérons maintenant, comme axe des abscisses, la ligne menée de l'origine des coordonnées, à l'est; et désignons par $x, x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(s-1)}, y, y^{(1)}, y^{(2)} \dots y^{(s-1)}$ les coordonnées respectives des points déterminés par les expériences dont le nombre est s . En exprimant par X et Y les coordonnées du centre de gravité de

tous ces points; on aura

$$X = S \cdot \frac{x^{(i)}}{s}, \quad Y = S \cdot \frac{y^{(i)}}{s},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i , depuis $i=0$ jusqu'à $i=s-1$. Cela posé, en désignant par $\pm a$ les limites des erreurs de chaque expérience, dans le sens des x ; la probabilité que l'écart moyen de la balle, du point origine des coordonnées, est compris dans les limites $X \pm \frac{ar}{\sqrt{s}}$, sera, par le n° 18,

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{k\pi}{4k''}}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{kr^2}{4k''}},$$

k et k'' étant des constantes qui dépendent de la loi de facilité des erreurs de chaque expérience dans le sens des x .

Pareillement, $\pm a'$ étant les limites des erreurs de chaque expérience dans le sens des y ; la probabilité que la valeur moyenne de la déviation dans le sens des y , est comprise dans les limites

$$Y \pm \frac{a'r}{\sqrt{s}}, \text{ sera}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{\bar{k}\pi}{4\bar{k}''}}} \cdot \int dr \cdot c^{-\frac{\bar{k}r^2}{4\bar{k}''}},$$

$\bar{k}$ et $\bar{k}''$ étant des constantes dépendantes de la loi des erreurs des expériences dans le sens des y . Les fractions $\frac{k}{4k''}$ et $\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''}$ étant, par ce qui précède, plus grandes que $\frac{3}{2}$; on pourra juger du degré d'approximation et de probabilité des valeurs de X et de Y , et déterminer la probabilité de l'écart au sud et au nord, indiqué par les observations.

L'analyse précédente peut encore être appliquée à la recherche des petites inégalités des mouvemens célestes, dont l'étendue est comprise dans les limites, soit des erreurs des observations, soit des perturbations produites par les causes accidentelles. C'est à peu près ainsi que Ticho-Brahé reconnut que l'équation du tems, relative au soleil et aux planètes, n'était point applicable à la lune,

et qu'il fallait en retrancher la partie dépendante de l'anomalie du soleil, et même une quantité beaucoup plus grande; ce qui conduisit Flamsteed à la découverte de l'inégalité lunaire que l'on nomme *équation annuelle*. C'est encore dans les résultats d'un grand nombre d'observations, que Mayer reconnut que l'équation de la précession, relative aux planètes et aux étoiles, n'était point applicable à la lune; il évalua à 12" décimales environ, la quantité dont il fallait alors la diminuer, quantité que Mason éleva ensuite à près de 24", par la comparaison de toutes les observations de Bradley, et que M. Burg a réduite à 21", au moyen d'un bien plus grand nombre d'observations de Maskeline. Cette inégalité, quoiqu'indiquée par les observations, était négligée par le plus grand nombre des astronomes; parce qu'elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur universelle. Mais ayant soumis son existence au calcul des probabilités, elle me parut indiquée avec une probabilité si forte, que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait résulter que de l'ellipticité du sphéroïde terrestre, que l'on avait négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles; et j'en conclus qu'il était extrêmement vraisemblable que ces termes devenaient sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Ayant déterminé ces termes par une analyse particulière, que j'ai exposée dans le septième Livre de la Mécanique Céleste; je découvris d'abord l'inégalité du mouvement de la lune en latitude, et qui est proportionnelle au sinus de sa longitude: par son moyen, je reconnus que la théorie de la pesanteur donne effectivement la diminution observée par les astronomes cités, dans l'inégalité de la précession, applicable au mouvement lunaire en longitude. La quantité de cette diminution, et le coefficient de l'inégalité en latitude dont je viens de parler, sont donc très-propres à déterminer l'aplatissement de la terre. Ayant fait part de mes recherches à M. Burg qui s'occupait alors de ses Tables de la Lune; je le priai de déterminer avec un soin particulier, les coefficients de ces deux inégalités. Par un concours remarquable, les coefficients qu'il a déterminés, s'accordent à donner à la terre, l'aplatissement $\frac{1}{305}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu

des mesures des degrés du méridien et du pendule ; mais qui vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices, sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par les inégalités lunaires. M. Burckhardt qui vient de former de nouvelles Tables de la Lune, très-précises, sur l'ensemble des observations de Bradley et de Maskeline, a trouvé le même coefficient que M. Burg, pour l'inégalité lunaire en latitude : il trouve un trente-quatrième à ajouter au coefficient de l'inégalité en longitude, ce qui réduit l'aplatissement à $\frac{1}{301}$, par cette inégalité. La différence très-légère de ces résultats, prouve qu'en fixant à $\frac{1}{304}$, cet aplatissement, l'erreur est insensible.

L'analyse des probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. La difficulté d'en reconnaître la loi, et de les ramener à la théorie de l'attraction universelle, avait fait conjecturer qu'elles étaient dues aux actions passagères des comètes ; mais un théorème auquel j'étais parvenu sur l'attraction mutuelle des planètes, me fit rejeter cette hypothèse, en m'indiquant l'attraction mutuelle des deux planètes, comme la vraie cause de ces irrégularités. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère en vertu de quelque grande inégalité à très-longue période ; celui de Saturne doit se ralentir de la même manière, et ce ralentissement est à l'accélération de Jupiter, comme le produit de la masse de cette dernière planète, par la racine carrée du grand axe de son orbite, est au produit semblable relatif à Saturne. Ainsi en prenant pour unité, le ralentissement de Saturne, l'accélération correspondante de Jupiter doit être 0,40884 ; or Halley avait trouvé, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, que l'accélération de Jupiter correspondait au ralentissement de Saturne, et qu'elle était 0,44823 de ce ralentissement. Ces résultats, si bien d'accord avec la théorie, me portèrent à penser qu'il existe dans les mouvemens de ces planètes, deux grandes inégalités correspondantes et de signe contraire, qui produisaient ces phénomènes. J'avais reconnu que l'action mutuelle des planètes ne pouvait point occasionner dans leurs moyens mouvemens, des variations toujours croissantes, ou

périodiques , mais d'une période indépendante de leur configuration mutuelle ; c'était donc dans le rapport des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne , que je devais chercher celle dont il s'agit ; or en examinant ce rapport , il est facile de reconnaître que deux fois le moyen mouvement de Jupiter ne surpasse que d'une quantité très-petite , cinq fois celui de Saturne ; ainsi les inégalités qui dépendent de cette différence , et dont la période est d'environ neuf siècles , peuvent devenir fort grandes par les intégrations successives qui leur donnent pour diviseur , le carré du coefficient très-petit du tems , dans l'argument de ces inégalités. En fixant vers l'époque de Tycho-Brahé , l'origine de cet argument ; je voyais que Halley avait dû trouver par la comparaison des observations modernes aux anciennes , les altérations qu'il avait observées ; tandis que la comparaison des observations modernes entre elles , devait présenter des altérations contraires et pareilles à celles que Lambert avait remarquées. L'existence des inégalités dont je viens de parler , me parut donc extrêmement vraisemblable , et je n'hésitai point à entreprendre le calcul long et pénible , nécessaire pour m'en assurer complètement. Le résultat de ce calcul , non-seulement les confirma , mais il me fit connaître beaucoup d'autres inégalités dont l'ensemble a porté les Tables de Jupiter et de Saturne , au degré de précision des observations mêmes.

On voit par là combien il faut être attentif aux indications de la nature , lorsqu'elles sont le résultat d'un grand nombre d'observations , quoique d'ailleurs elles soient inexplicables par les moyens connus. J'engage ainsi les astronomes à suivre avec une attention particulière , l'inégalité lunaire à longue période , qui dépend principalement du mouvement du périée de la lune , ajouté au double du moyen mouvement de ses nœuds ; inégalité dont j'ai parlé dans le septième Livre de la Mécanique Céleste , et que déjà les observations indiquent avec beaucoup de vraisemblance. Les cas précédens ne sont pas les seuls dans lesquels les observations ont redressé les analystes. Le mouvement du périée lunaire et l'accélération du mouvement de la lune , qui n'étaient point donnés d'abord par les approximations , ont fait sentir la nécessité de rectifier ces approximations. Ainsi , l'on peut

dire que la nature elle-même a concouru à la perfection analytique des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle ; et c'est à mon sens , une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

On peut encore , par l'analyse des probabilités , vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instrumens que nous pouvons employer pour connaître les agens imperceptibles de la nature , les plus sensibles sont les nerfs , surtout lorsque leur sensibilité est exaltée par des circonstances particulières. C'est à leur moyen , que l'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes ; ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus , ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent que l'on a nommé *magnétisme animal* , sur l'action du magnétisme ordinaire et l'influence du soleil et de la lune , dans quelques affections nerveuses ; enfin , sur les impressions que peut faire naître la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très-faible , et peut facilement être troublée par un grand nombre de circonstances accidentelles ; ainsi de ce que , dans quelque cas , elle ne s'est point manifestée , on ne doit pas conclure qu'elle n'existe jamais. Nous sommes si éloignés de connaître tous les agens de la nature , qu'il serait peu philosophique de nier l'existence des phénomènes , uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse , qu'il paraît plus difficile de les admettre ; et c'est ici que l'analyse des probabilités devient indispensable pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences , pour avoir en faveur de l'existence des agens qu'elles semblent indiquer , une probabilité supérieure à toutes les raisons que l'on peut avoir d'ailleurs de la rejeter.

La même analyse peut être étendue aux divers résultats de la médecine et de l'économie politique , et même à l'influence des

causes morales ; car l'action de ces causes , lorsqu'elle est répétée un grand nombre de fois , offre dans ses résultats , autant de régularité , que les causes physiques.

On peut encore déterminer par l'analyse des probabilités , comparée à un grand nombre d'expériences , l'avantage et le désavantage des joueurs , dans les cas dont la complication rend impossible leur recherche directe. Tel est l'avantage de la main , au jeu du piquet : telles sont encore les possibilités respectives d'amener les différentes faces d'un prisme droit rectangulaire , dont la longueur , la largeur et la hauteur sont inégales ; lorsque le prisme projeté en l'air , retombe sur un plan horizontal.

Enfin , on pourrait faire usage du calcul des probabilités , pour rectifier les courbes ou carrer leurs surfaces. Sans doute , les géomètres n'emploieront pas ce moyen ; mais comme il me donne lieu de parler d'un genre particulier de combinaisons du hasard , je vais l'exposer en peu de mots.

Imaginons un plan divisé par des lignes parallèles , équidistantes de la quantité a ; concevons de plus un cylindre très-étroit dont $2r$ soit la longueur , supposée égale ou moindre que a . On demande la probabilité qu'en le projetant , il rencontrera une des divisions du plan.

Elevons sur un point quelconque d'une de ces divisions , une perpendiculaire prolongée jusqu'à la division suivante. Supposons que le centre du cylindre soit sur cette perpendiculaire , et à la hauteur y au-dessus de la première de ces deux divisions. En faisant tourner le cylindre autour de son centre , et nommant ϕ l'angle que le cylindre fait avec la perpendiculaire , au moment où il rencontre cette division ; 2ϕ sera la partie de la circonférence décrite par chaque extrémité du cylindre , dans laquelle il rencontre la division ; la somme de toutes ces parties sera donc $4\int \phi dy$, ou $4\phi y - 4\int y d\phi$; or on a $y = r \cdot \cos \phi$; cette somme est donc

$$4\phi \cdot y - 4r \cdot \sin \phi + \text{constante.}$$

Pour déterminer cette constante , nous observerons que l'intégrale doit s'étendre depuis y nul jusqu'à $y = r$, et par conséquent depuis

$\phi = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\phi = 0$, ce qui donne

$$\text{constante} = 4r;$$

ainsi la somme dont il s'agit est $4r$. Depuis $y = a - r$ jusqu'à $y = a$, le cylindre peut rencontrer la division suivante, et il est visible que la somme de toutes les parties relatives à cette rencontre, est encore $4r$; $8r$ est donc la somme de toutes les parties relatives à la rencontre de l'une ou l'autre des divisions par le cylindre, dans le mouvement de son centre le long de la perpendiculaire. Mais le nombre de tous les arcs qu'il décrit en tournant en entier sur lui-même, à chaque point de cette perpendiculaire, est $2a\pi$; c'est le nombre de toutes les combinaisons possibles; la probabilité de la rencontre d'une des divisions du plan par le cylindre, est donc $\frac{4r}{a\pi}$. Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan, au nombre total des projections, sera par le n° 16, à très-peu près, la valeur de $\frac{4r}{a\pi}$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π . On aura, par le même numéro, la probabilité que l'erreur de cette valeur sera comprise dans des limites données; et il est facile de voir que le rapport $\frac{2r}{a}$ qui, pour un nombre donné de projections, rend l'erreur à craindre la plus petite, est l'unité; ce qui donne la longueur du cylindre égale à l'intervalle des divisions.

Concevons maintenant le plan précédent divisé encore par des lignes perpendiculaires aux précédentes, et équidistantes d'une quantité b égale ou plus grande que la longueur $2r$ du cylindre. Toutes ces lignes formeront avec les premières, une suite de rectangles dont b sera la longueur et a la hauteur. Considérons un de ces rectangles; supposons que dans son intérieur, on mène à la distance r de chaque côté, des lignes qui lui soient parallèles. Elles formeront d'abord un rectangle intérieur, dont $b - 2r$ sera la longueur, et $a - 2r$ la hauteur. Ensuite deux petits rectangles, dont r sera la hauteur, et $b - 2r$ la longueur; puis deux autres
petits

petits rectangles dont r sera la longueur, et $a-2r$ la hauteur; enfin, quatre petits carrés dont les côtés seront égaux à r .

Tant que le centre du cylindre sera placé dans le rectangle intérieur, le cylindre en tournant sur son centre, ne rencontrera jamais les côtés du grand rectangle.

Lorsque le centre du cylindre sera placé dans l'intérieur d'un des rectangles dont r est la hauteur et $b-2r$ la longueur; il est facile de voir par ce qui précède, que le produit de $8r$, par la longueur $b-2r$, sera le nombre des combinaisons correspondantes, dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre des côtés b du grand rectangle. Ainsi $8r.(b-2r)$ sera le nombre total des combinaisons correspondantes aux cas dans lesquels le centre du cylindre étant placé dans l'un ou l'autre de ces petits rectangles, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle. Par la même raison, $8r.(a-2r)$ sera le nombre total des combinaisons dans lesquelles le centre du cylindre étant placé dans l'intérieur des petits rectangles dont r et $a-2r$ sont les dimensions, le cylindre rencontre le contour du grand rectangle.

Il nous reste à considérer les quatre petits carrés. Soit $ABCD$ l'un d'eux. De l'angle A commun à ce carré et au grand rectangle, comme centre, et du rayon r , décrivons un quart de circonférence, se terminant aux points B et D . Tant que le centre du cylindre sera compris dans le quart de cercle formé par cet arc, le cylindre en tournant, rencontrera dans toutes ses positions, le contour du grand rectangle; le nombre des combinaisons dans lesquelles cela aura lieu, est donc égal au produit de 2π par la surface du quart de cercle, et par conséquent il est égal à $\frac{\pi^2 \cdot r^2}{2}$. Si le centre du cylindre est dans la partie du carré

qui est au-delà du quart de cercle; le cylindre en tournant autour de son centre, pourra rencontrer l'un ou l'autre des deux côtés AB et AD prolongés, sans jamais les rencontrer tous deux à la fois. Pour déterminer le nombre des combinaisons relatives à cette rencontre, je conçois sur un point quelconque du côté AB , distant de x du point A , une perpendiculaire y dont l'extrémité soit au-delà du quart de cercle. Je place le centre du cylindre sur cette extrémité de laquelle j'abaisse quatre droites égales à r , et

dont deux aboutissent sur le côté AB prolongé, si cela est nécessaire, et deux autres sur le côté AD pareillement prolongé. Je nomme 2ϕ l'angle compris entre les deux premières lignes, et $2\phi'$ l'angle compris entre les deux secondes. Il est visible que le cylindre en tournant sur son centre, rencontrera le côté AB prolongé, tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle 2ϕ , et qu'il rencontre le côté AD prolongé, tant qu'une de ses moitiés sera dans l'angle $2\phi'$; le nombre total des combinaisons dans lesquelles le cylindre rencontrera l'un ou l'autre de ces côtés, est donc $4.(\phi + \phi')$; ainsi ce nombre, relativement à la partie du carré, extérieure au quart de cercle, est

$$4f(\phi + \phi').dx.dy;$$

or on a évidemment,

$$x = r.\cos \phi', \quad y = r.\cos \phi;$$

l'intégrale précédente devient ainsi,

$$4r^2.f(\phi + \phi').d\phi.d\phi'.\sin \phi \sin \phi';$$

et il est facile de voir que l'intégrale relative à ϕ' , doit être prise depuis $\phi' = 0$ jusqu'à $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$, et que l'intégrale relative à ϕ doit être prise depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = \frac{\pi}{2}$; ce qui donne $\frac{1}{2}r^2.(12 - \pi^2)$ pour cette intégrale. En lui ajoutant $\frac{\pi^2 r^2}{2}$, on aura le nombre des combinaisons relatives au carré; et en quadruplant ce nombre, et le réunissant aux nombres précédents des combinaisons relatives à la rencontre du contour du grand rectangle, par le cylindre; on aura, pour le nombre total des combinaisons,

$$8.(a + b).r - 8r^2.$$

Mais le nombre total des combinaisons possibles, est évidemment égal à 2π multiplié par la surface ab du grand rectangle; la probabilité de la rencontre des divisions du plan par le cylindre, est donc

$$\frac{4.(a + b).r - 4r^2}{ab.\pi}.$$

CHAPITRE VI.

*De la probabilité des causes et des événemens futurs ,
tirée des événemens observés.*

26. LA probabilité de la plupart des événemens simples, est inconnue : en la considérant *a priori*, elle nous paraît susceptible de toutes les valeurs comprises entre zéro et l'unité; mais si l'on a observé un résultat composé de plusieurs de ces événemens, la manière dont ils y entrent, rend quelques-unes de ces valeurs plus probables que les autres. Ainsi à mesure que le résultat observé se compose par le développement des événemens simples, leur vraie possibilité se fait de plus en plus connaître, et il devient de plus en plus probable qu'elle tombe dans des limites qui se resserrant sans cesse, finiraient par coïncider, si le nombre des événemens simples devenait infini. Pour déterminer les lois suivant lesquelles cette possibilité se découvre, nous la nommerons x . La théorie exposée dans les chapitres précédens, donnera la probabilité du résultat observé, en fonction de x . Soit y cette fonction; si l'on considère les différentes valeurs de x comme autant de causes de ce résultat, la probabilité de x sera, par le troisième principe du n° 1, égale à une fraction dont le numérateur est y , et dont le dénominateur est la somme de toutes les valeurs de y ; en multipliant donc le numérateur et le dénominateur de cette fraction par dx , cette probabilité sera

$$\frac{ydx}{\int ydx},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$, est par conséquent égale à

$$\frac{\int ydx}{\int ydx}, \quad (1)$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à $x = \theta'$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La valeur de x la plus probable, est celle qui rend y un *maximum*. Nous la désignerons par a . Si aux limites de x , y est nul, alors chaque valeur de y a une valeur égale correspondante de l'autre côté du *maximum*.

Quand les valeurs de x , considérées indépendamment du résultat observé, ne sont pas également possibles; en nommant z la fonction de x qui exprime leur probabilité; il est facile de voir, par ce qui a été dit dans le premier chapitre de ce Livre, qu'en changeant dans la formule (1), y dans yz , on aura la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = \theta$ et $x = \theta'$. Cela revient à supposer toutes les valeurs de x également possibles *a priori*, et à considérer le résultat observé, comme étant formé de deux résultats indépendans, dont les probabilités sont y et z . On peut donc ramener ainsi tous les cas à celui où l'on suppose *a priori*, avant l'événement, une égale possibilité aux différentes valeurs de x , et par cette raison, nous adopterons cette hypothèse dans ce qui va suivre.

Nous avons donné dans les n^{os} 22 et suivans du premier Livre, les formules nécessaires pour déterminer par des approximations convergentes, les intégrales du numérateur et du dénominateur de la formule (1), lorsque les événemens simples dont se compose l'événement observé, sont répétés un très-grand nombre de fois; car alors y a pour facteurs, des fonctions de x élevées à de grandes puissances. Nous allons, au moyen de ces formules, déterminer la loi de probabilité des valeurs de x , à mesure qu'elles s'éloignent de la valeur a , la plus probable, ou qui rend y un *maximum*. Pour cela, reprenons la formule (c) du n^o 27 du premier Livre,

$$\begin{aligned} \int y dx = & Y \cdot \left\{ U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{d^4 U^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.} \right\} \cdot f dt \cdot c^{-t} \\ & + \frac{Y}{2} \cdot c^{-T^2} \cdot \left\{ \frac{d \cdot U^2}{dx} - T \cdot \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + (T^2 + 1) \cdot \frac{d^3 \cdot U^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \text{etc.} \right\}; \quad (2) \\ & - \frac{Y}{2} \cdot c^{-T^2} \cdot \left\{ \frac{d \cdot U^2}{dx} + T \cdot \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + (T^2 + 1) \cdot \frac{d^3 \cdot U^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

ν est égal à $\frac{x-a}{\sqrt{\log Y - \log y}}$, et $U, \frac{d.U^2}{dx}, \frac{d^2.U^3}{dx^2}$, etc. sont ce que deviennent $\nu, \frac{d.\nu^2}{dx}, \frac{d^2.\nu^3}{dx^2}$, etc., lorsqu'on y change après les différentiations, x en a , a étant la valeur de x qui rend y un *maximum*: T est égal à ce que devient la fonction $\sqrt{\log Y - \log y}$, lorsqu'on change x en $a - \theta$ dans y , et T' est ce que devient la même fonction, lorsqu'on y change x dans $a + \theta'$. L'expression précédente de $\int y dx$ donne la valeur de cette intégrale, dans les limites $x = a - \theta$ et $x = a + \theta'$; l'intégrale $\int dt. c^{-t}$ étant prise depuis $t = -T$ jusqu'à $t = T'$.

Le plus souvent, aux limites de l'intégrale $\int y dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, y est nul; ou lorsque y n'est pas nul, il devient si petit à ces limites, qu'on peut le supposer nul. Alors, on peut faire à ces limites T et T' infinis, ce qui donne pour l'intégrale $\int y dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$\int y dx = Y. \left\{ U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4} + \text{etc.} \right\} \cdot \sqrt{\pi};$$

ainsi la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $x = a - \theta$ et $x = a + \theta'$, est égale à

$$\frac{\int dt. c^{-t}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot c^{-T^2} \cdot \left\{ \frac{d.U^2}{dx} - T \cdot \frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + (T^2+1) \cdot \frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3} - \text{etc.} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \cdot c^{-T'^2} \cdot \left\{ \frac{d.U^2}{dx} + T' \cdot \frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + (T'^2+1) \cdot \frac{d^3.U^4}{1.2.3.dx^3} + \text{etc.} \right\} \end{aligned} \right\}}{\left\{ U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2.U^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{d^4.U^5}{1.2.3.4.dx^4} + \text{etc.} \right\} \cdot \sqrt{\pi}}; \quad (3)$$

On voit par le n° 23 du premier Livre, que dans le cas où y a pour facteurs, des fonctions de x élevées à de grandes puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant une fraction extrêmement petite, alors U est le plus souvent de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, ainsi que ses différences successives; $U, \frac{d.U^2}{dx}, \frac{d^2.U^3}{dx^2}$, etc. sont respectivement des ordres $\sqrt{\alpha}$, α , $\alpha^{\frac{3}{2}}$, etc.; d'où il suit que la convergence des séries de la formule (3), exige que T et T' ne soient pas d'un ordre supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Si l'on suppose $\theta = \theta'$; alors on a à fort peu près $T = T'$, et la formule (3) se réduit, en négligeant les termes de l'ordre α , à l'intégrale $\frac{\int dt \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, prise depuis $t = -T$ jusqu'à $t = T'$; ce qui revient en négligeant le carré de la différence $T'^2 - T^2$, à doubler l'intégrale précédente, et à la prendre depuis t nul jusqu'à

$$t = \sqrt{\frac{T'^2 + T^2}{2}};$$

or on a

$$T^2 = \log Y - \log y,$$

et l'on peut supposer

$$\log y = \frac{1}{\alpha} \cdot \log \phi,$$

ϕ étant une fonction de x ou de $\alpha - \theta$, qui ne renferme plus de facteurs élevés à de grandes puissances; en nommant donc $\Phi, \frac{d\phi}{dx}, \frac{d^2\phi}{dx^2}$, etc., ce que deviennent, lorsque θ est nul, $\phi, \frac{d\phi}{dx}, \frac{d^2\phi}{dx^2}$, etc.; en observant ensuite que la condition de Y ou Φ , un *maximum*, donne $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, on aura

$$\alpha T^2 = -\theta^2 \cdot \frac{dd\Phi}{2\Phi \cdot dx^2} + \theta^3 \cdot \frac{d^3\Phi}{6\Phi \cdot dx^3} - \frac{\theta^4}{8} \cdot \left[\frac{d^4\Phi}{24\Phi \cdot dx^4} - \left(\frac{dd\Phi}{\Phi \cdot dx^2} \right)^2 \right] + \text{etc.}$$

En changeant θ dans $-\theta$, on aura la valeur de $\alpha T'^2$; on aura donc, en négligeant les termes de l'ordre α^2 ,

$$\frac{\alpha \cdot (T^2 + T'^2)}{2} = -\theta^2 \cdot \frac{dd\Phi}{2\Phi \cdot dx^2};$$

partant,

$$\sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}} = \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{-\frac{dd\Phi}{2\Phi dx^2}}.$$

Faisons

$$k = \sqrt{-\frac{dd\Phi}{2\Phi \cdot dx^2}} = \sqrt{-\frac{\alpha ddY}{2Y \cdot dx^2}},$$

$$\theta = \frac{t \cdot \sqrt{\alpha}}{k};$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites

$\alpha \pm \frac{t \cdot \sqrt{\alpha}}{k}$, sera

$$\frac{2 \cdot \int dt \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$, et pouvant être obtenue d'une manière fort approchée, par les formules du n° 27 du premier Livre.

Il résulte de cette expression, que la valeur de x la plus probable est α , ou celle qui rend l'événement observé, le plus probable; et qu'en multipliant à l'infini les événemens simples dont l'événement observé se compose, on peut à la fois resserrer les limites $\alpha \pm \frac{t \cdot \sqrt{\alpha}}{k}$, et augmenter la probabilité que la valeur de x tombera entre ces limites; ensorte qu'à l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se confond avec la certitude.

Si l'événement observé dépend d'événemens simples de deux différens genres, en nommant x et x' les possibilités de ces deux genres d'événemens, on verra par les raisonnemens précédens, que y étant alors la probabilité de l'événement composé, la fraction

$$\frac{y dx \cdot dx'}{\iint y dx \cdot dx'}, \quad (4)$$

sera la probabilité des valeurs simultanées de x et de x' , les intégrales du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et depuis $x'=0$ jusqu'à $x'=1$. En nommant a et a' les valeurs de x et de x' qui rendent y un *maximum*, et faisant $x=a+\theta$, $x'=a'+\theta'$, on trouvera, par l'analyse du n° 27 du premier Livre, que si l'on suppose

$$\frac{\theta}{\sqrt{2Y}} \cdot \sqrt{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)} - \theta' \cdot \frac{\left(\frac{ddY}{dx dx'}\right)}{2Y} \cdot \sqrt{\frac{2Y}{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}} = t,$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{-2Y \cdot \left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}} \cdot \sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{ddY}{dx'^2}\right) - \left(\frac{ddY}{dx dx'}\right)^2} = t',$$

la fraction (4) prendra cette forme

$$\frac{dt \cdot dt' \cdot c^{-t^2-t'^2}}{\iint dt \cdot dt' \cdot c^{-t^2-t'^2}}.$$

Les intégrales du dénominateur doivent être prises depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, et depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$; car les intégrales relatives à x et x' de la fraction (4) étant prises depuis $x = 0$ et $x' = 0$ jusqu'à x et x' égaux à l'unité, et à ces limites, les valeurs de θ et de θ' étant $-a$ et $1-a$; $-a'$ et $1-a'$, les limites de t et de t' sont égales à ces dernières limites multipliées par des quantités de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{a}}$: ainsi l'exponentielle $c^{-t^2-t'^2}$ est excessivement petite à ces limites, et l'on peut sans erreur sensible, étendre les intégrales du dénominateur de la fraction précédente, jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives des variables t et t' ; ce dénominateur devient ainsi égal à π ; et la probabilité que les valeurs de θ' et de θ sont comprises dans les limites

$$\theta' = 0, \quad \theta' = \frac{t' \cdot \sqrt{-2Y \cdot \left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{ddY}{dx'^2}\right) - \left(\frac{ddY}{dx dx'}\right)^2}};$$

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{t \cdot \sqrt{2Y}}{\sqrt{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}} + \frac{t' \cdot \left(\frac{ddY}{dx dx'}\right)}{\sqrt{\left(\frac{ddY}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{ddY}{dx'^2}\right) - \left(\frac{ddY}{dx dx'}\right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{21}{-\left(\frac{ddY}{dx^2}\right)}},$$

est égale à

$$\frac{1}{\pi} \iint dt \cdot dt' \cdot c^{-t^2-t'^2},$$

les intégrales étant prises depuis t et t' nuls.

On voit par cette formule, que dans le cas de deux genres différens d'événemens simples, la probabilité que leurs possibilités respectives sont celles qui rendent l'événement composé, le plus probable, devient de plus en plus grande, et finit par se confondre avec la certitude; ce qui a lieu généralement pour un nombre quelconque de genres différens d'événemens simples, qui entrent dans l'événement observé.

Si l'on conçoit une urne renfermant une infinité de boules de plusieurs couleurs différentes, et qu'après en avoir tiré un grand nombre n , p sur ce nombre, aient été de la première couleur, q de la seconde, r de la troisième, etc.; en désignant par x , x' , x'' , etc. les probabilités respectives d'amener dans un seul tirage, une de ces couleurs, la probabilité de l'événement observé sera le terme qui a pour facteur $x^p \cdot x'^q \cdot x''^r$, etc., dans le développement du polynome

$$(x + x' + x'' + \text{etc.})^n,$$

où l'on a

$$x + x' + x'' + \text{etc.} = 1,$$

$$p + q + r + \text{etc.} = n;$$

on pourra donc supposer ici $y = x^p \cdot x'^q \cdot x''^r$, etc.; et alors on a pour les valeurs de x , x' , x'' , etc. qui rendent l'événement observé le plus probable,

$$x = \frac{p}{n}, \quad x' = \frac{q}{n}, \quad x'' = \frac{r}{n}, \quad \text{etc.}$$

Ainsi les valeurs les plus probables sont proportionnelles aux nombres des arrivées des couleurs; et lorsque le nombre n est un grand nombre, les probabilités respectives des couleurs, sont à très-peu près égales aux nombres de fois qu'elles sont arrivées, divisés par le nombre des tirages.

27. Pour donner une application de la formule précédente, considérons le cas où deux joueurs A et B jouent ensemble avec cette condition, que celui qui sur trois coups en aura gagné deux, gagne la partie; et supposons que sur un très-grand nombre n de parties, A en ait gagné un nombre i . En nommant x la probabilité de A pour gagner un coup, et par conséquent $1 - x$, la probabilité correspondante de B ; la probabilité de A pour gagner une partie, sera la somme des deux premiers termes du binome $(x + 1 - x)^3$; et la probabilité correspondante de B , sera la somme des deux derniers termes. Ces probabilités sont donc $x^3 \cdot (3 - 2x)$ et $(1 - x)^3 \cdot (1 + 2x)$; ainsi la probabilité que sur n parties, A en gagnera i , et B , $n - i$, sera proportionnelle à $x^{3i} \cdot (3 - 2x)^i \cdot (1 - x)^{3n - 2i} \cdot (1 + 2x)^{n - i}$; en nommant donc y cette

fonction, et a la valeur de x qui la rend un *maximum*; la probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a - \theta$ et $a + \theta$, sera

$$\frac{\int y dx}{\int y dx},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = a - \theta$ jusqu'à $x = a + \theta$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Si l'on fait

$$\frac{1}{n} = a, \quad \frac{i}{n} = i',$$

on aura par le numéro précédent,

$$\phi = x^{2i'} \cdot (3 - 2x)^{i'} \cdot (1 - x)^{2-2i'} \cdot (1 + 2x)^{1-i'}.$$

La condition du *maximum* de y ou de ϕ , donne $d\phi = 0$; par conséquent a étant la valeur de x correspondante à ce *maximum*, on aura

$$0 = \frac{2i'}{a} - \frac{2i'}{3-2a} - \frac{2 \cdot (1-i')}{1-a} + \frac{2(1-i')}{1+2a};$$

d'où l'on tire

$$i' = a^2 \cdot (3 - 2a), \quad 1 - i' = (1 - a)^2 \cdot (1 + 2a);$$

ensuite on a

$$\frac{-d\phi}{2\phi \cdot dx^2} = \frac{18}{(3-2a) \cdot (1+2a)} = k^2.$$

La probabilité que la valeur de x est comprise dans les limites $a \pm \frac{r}{\sqrt{n}}$, sera donc, par le numéro précédent, égale à

$$\frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi \cdot (3-2a) \cdot (1+2a)}} \cdot \int dr \cdot e^{\frac{-18 \cdot r^2}{(3-2a) \cdot (1+2a)}}.$$

On verra facilement que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons trouvé dans le n° 16, par une analyse moins directe que celle-ci.

La partie finit en deux coups, si A ou B gagne les deux premiers coups, le troisième coup n'étant pas joué, parce qu'il devient

inutile. Ainsi les nombres des parties gagnées par l'un et l'autre des joueurs, n'indiquent pas le nombre des coups joués; mais ils indiquent que ce dernier nombre est contenu dans des limites données, avec une probabilité qui croît sans cesse, à mesure que les parties se multiplient. La recherche de ce nombre et de cette probabilité étant très-propre à éclaircir l'analyse précédente; nous allons nous en occuper.

La probabilité que $\mathcal{A}$ gagnera une partie en deux coups, est x^2 , x exprimant, comme ci-dessus, sa probabilité de gagner à chaque coup. La probabilité qu'il gagnera la partie en trois coups, est $2x^2.(1-x)$. La somme $x^2.(3-2x)$ de ces deux probabilités, est la probabilité que $\mathcal{A}$ gagnera la partie. Ainsi pour avoir la probabilité que sur i parties gagnées par le joueur $\mathcal{A}$, s seront de deux coups, il faut élever à la puissance i , le binôme

$$\frac{x^2}{x^2.(3-2x)} + \frac{2x^2.(1-x)}{x^2.(3-2x)},$$

ou

$$\frac{1}{3-2x} + \frac{2.(1-x)}{3-2x},$$

et le terme $i-s+1$ du développement de cette puissance, sera cette probabilité qui est ainsi égale à

$$\frac{1.2.3\dots i.2^{i-s}.(1-x)^{i-s}}{1.2.3\dots s.1.2.3\dots (i-s).(3-2x)^i}.$$

Le plus grand terme de ce développement est, par le n° 16, celui dans lequel les exposans s et $i-s$ du premier et du second terme du binôme sont à très-peu près dans le rapport de ces termes, ce qui donne

$$s = \frac{i}{3-2x}.$$

Nous nommerons s' cette quantité, et nous ferons

$$s = s' + l;$$

on aura, par le n° 16,

$$\sqrt{\frac{i}{2s' \pi . (i-s')}} . dl . c^{\frac{-il^2}{2s' . (i-s')}}.$$

pour la probabilité de s , correspondante à l'adresse x du joueur A .

On trouvera pareillement, que si l'on nomme z le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B , sur le nombre $n-i$ de parties qu'il a gagnées; la valeur de z la plus probable sera $\frac{n-i}{1+2x}$; et qu'en désignant par z' cette quantité, et faisant

$$z = z' + l',$$

la probabilité de z correspondante à x sera

$$\sqrt{\frac{n-i}{2z' \cdot (n-i-z')}} \cdot dl' \cdot c^{\frac{-(n-i) \cdot l'^2}{2z' \cdot (n-i-z')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités est donc la probabilité correspondante à x , que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur A , sera $s' + l$, tandis que le nombre des parties de deux coups, gagnées par le joueur B , sera $z' + l'$. Soit

$$q = \frac{i}{2s' \cdot (i-s')}, \quad q' = \frac{n-i}{2z' \cdot (n-i-z')};$$

on aura pour cette probabilité composée,

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi} \cdot dl \cdot dl' \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2}.$$

Il faut multiplier cette probabilité par celle de x , qui, comme on l'a vu dans le numéro précédent, est $\frac{ydx}{fydx}$; le produit est

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi} \cdot \frac{ydx}{fydx} \cdot dl \cdot dl' \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2}; \quad (\varepsilon)$$

l'intégrale du dénominateur doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; et par le n° 27 du premier Livre, cette intégrale est à très-peu près,

$$Y \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{-\frac{2Y \cdot dx^2}{dY}}.$$

Si l'on nomme X la fonction

$$\sqrt{qq'} \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2},$$

et que l'on désigne par a' la valeur de x , qui rend Xy un *maximum*, et par X' et Y' , ce que deviennent X et y , lorsqu'on y change x en a' ; on aura, par le numéro précédent, en faisant $x = a' + \theta$,

$$y dx \cdot \sqrt{qq'} \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2} = Y' X' \cdot d\theta \cdot c^{\frac{\theta^2 \cdot d^2 \cdot (X'Y')}{2X'Y' \cdot dx^2}}.$$

Il est facile de voir que a' ne diffère de la valeur a de x , qui rend y un *maximum*, que d'une quantité de l'ordre α , que nous désignerons par $f\alpha$; en substituant dans Y , $a + f\alpha$ au lieu de a' , pour en former Y' , et développant par rapport aux puissances de α , on verra que $\frac{dY}{da}$ étant nul, parce que Y est le *maximum* de y , Y' ne diffère de Y , que de quantités de l'ordre α ; ainsi l'on a, aux quantités près d'un ordre inférieur à celui que l'on conserve, et en observant que $\frac{dX'}{X'dx}$ et $\frac{d^2X'}{X'dx^2}$ peuvent être négligées par rapport à $\frac{dY'}{Y'dx}$;

$$\frac{d^2 \cdot X'Y'}{2X'Y' \cdot dx^2} = \frac{d^2 Y}{2Y \cdot dx^2};$$

la fonction (ϵ) devient par là

$$\frac{\sqrt{qq'}}{\pi \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{-\frac{ddY}{2Y \cdot dx^2}} \cdot dl \cdot dl' \cdot d\theta \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2 + \frac{\theta^2 \cdot ddY}{2Y \cdot dx^2}}. \quad (\epsilon')$$

On doit dans cette fonction, supposer $x = a$, ce qui donne, en substituant pour i , sa valeur $na^2 \cdot (3 - 2a)$,

$$q = \frac{3 - 2a}{4na^2 \cdot (1 - a)}, \quad q' = \frac{1 + 2a}{4na \cdot (1 - a)^2}.$$

Ensuite, x étant égal à $a' + \theta$, il est égal à $a + f\alpha + \theta$; en négligeant donc les quantités de l'ordre α , on aura

$$x = a + \theta.$$

Maintenant le nombre des parties de deux coups, étant

$$\frac{i}{5 - 2x} + \frac{n - i}{1 + 2x} + l + l',$$

ce nombre sera

$$\frac{i}{3-2a} + \frac{n-i}{1+2a} + \left[\frac{2i}{(3-2a)^2} - \frac{2 \cdot (n-i)}{(1+2a)^2} \right] \cdot \theta + l + l'.$$

Faisons

$$t = \left[\frac{2i}{(3-2a)^2} - \frac{2 \cdot (n-i)}{(1+2a)^2} \right] \cdot \theta + l + l';$$

et désignons par q'' la quantité

$$= \frac{ddY}{2Y \cdot dx^2 \cdot \left[\frac{2}{(3-2a)^2} - \frac{2 \cdot (n-i)}{(1+2a)^2} \right]},$$

qui, après toutes les réductions, se réduit à

$$\frac{9 \cdot (3-2a) \cdot (1+2a)}{2n \cdot (1-2a)^2 \cdot (3-2a+2a^2)^2};$$

la fonction (ϵ') deviendra

$$\frac{\sqrt{qq'q''}}{\pi \cdot \sqrt{\pi}} \cdot dt \cdot dl \cdot dl' \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2 - q'' \cdot (t-l-l')^2} \cdot (\epsilon'')$$

En l'intégrant depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, et depuis $l' = -\infty$, jusqu'à $l' = \infty$, on aura la probabilité que le nombre des parties de deux coups, sera égal à

$$\frac{i}{3-2a} + \frac{n-i}{1+2a} + t;$$

or on a

$$\begin{aligned} & \int dl \cdot c^{-ql^2 - q'l'^2 - q'' \cdot (t-l-l')^2} \\ &= \int dl \cdot c^{-\frac{qq''}{q+q''} \cdot (t-l')^2 - q'l'^2 - (q+q'') \cdot \left(l - \frac{q''}{q+q''} \cdot (t-l') \right)^2} \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale, prise depuis $l = -\infty$ jusqu'à $l = \infty$, est, par ce qui précède,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q+q''}} \cdot c^{-\frac{qq''}{q+q''} \cdot (t-l')^2 - q'l'^2}$$

En la multipliant par dl' , et la mettant sous cette forme,

$$\frac{\sqrt{\pi} \cdot dl'}{\sqrt{q+q'}} \cdot c - \frac{qq'q'' \cdot t^2}{qq'+qq''+q'q''} - \frac{qq'+qq''+q'q''}{q+q''} \cdot \left(l' - \frac{qq'' \cdot t}{qq'+qq''+q'q''} \right)^2,$$

et l'intégrant depuis $l' = -\infty$ jusqu'à $l' = \infty$; on aura

$$\frac{\pi}{\sqrt{qq'+qq''+q'q''}} \cdot c - \frac{qq'q'' \cdot t^2}{qq'+qq''+q'q''}.$$

La fonction (ϵ'') intégrée par rapport à l et l' , dans les limites infinies positives et négatives de ces variables, devient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}} \cdot dt \cdot c - \frac{qq'q'' \cdot t^2}{qq'+qq''+q'q''}.$$

Ainsi la probabilité que le nombre de parties de deux coups, sera compris dans les limites

$$\frac{i}{3-2a} + \frac{n-i}{1+2a} \pm t = n \cdot (a^2 + \overline{1-a^2}) \pm t,$$

est égale au double de l'intégrale de la différentielle précédente, prise depuis t nul. On doit observer que q , q' , q'' sont de l'ordre $\frac{1}{n}$, ensorte que la quantité $\frac{qq'q''}{qq'+qq''+q'q''}$ est du même ordre. Représentons-la par $\frac{k'^2}{n}$, et faisons $t = r \cdot \sqrt{n}$; on aura

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int k dr \cdot c^{-k'^2 r^2}, \quad (\epsilon''')$$

pour l'expression de la probabilité que le nombre de parties de deux coups, sera compris dans les limites

$$n \cdot (a^2 + \overline{1-a^2}) \pm r \cdot \sqrt{n},$$

l'intégrale étant prise depuis r nul. L'intervalle de ces deux limites est $2r\sqrt{n}$, et le rapport de cet intervalle au nombre n de parties,

est $\frac{2r}{\sqrt{n}}$; ce rapport diminue sans cesse, à mesure que n augmente, et r peut en même tems croître indéfiniment; de sorte que l'intégrale précédente approche indéfiniment de l'unité.

Le nombre total des coups, est le triple du nombre des parties de trois coups, plus le double du nombre des parties de deux coups, ou le triple du nombre total n des parties, moins le nombre des parties de deux coups; il est donc

$$2n.(1+a-a^2) \mp r.\sqrt{n},$$

l'intégrale (ϵ''') est donc l'expression de la probabilité que le nombre des coups sera compris dans ces limites.

Si au lieu de connaître le nombre i des parties gagnées par le joueur A , et le nombre total n de parties, on connaît le nombre i et le nombre total des coups; la même analyse pourra servir à déterminer le nombre inconnu n des parties. Pour cela, désignons par h , le nombre total des coups; on aura, par ce qui précède, les deux équations

$$\begin{aligned} 3n - \frac{i}{3-2a} - \frac{n-i}{1+2a} &= h \pm r.\sqrt{n}, \\ \frac{i}{a} - \frac{i}{3-2a} &= \frac{n-i}{1-a} - \frac{n-i}{1+2a}. \end{aligned}$$

Ces équations donnent a et n en fonctions de $h \pm r.\sqrt{n}$. Supposons

$$n = i.\downarrow\left(\frac{h \pm r.\sqrt{n}}{i}\right), \quad a = \Gamma\left(\frac{h \pm r.\sqrt{n}}{i}\right);$$

on aura, en réduisant en série,

$$n = i.\downarrow\left(\frac{h}{i}\right) \pm ir.\sqrt{n}.\frac{d.\downarrow\left(\frac{h}{i}\right)}{dh} + \text{etc.};$$

on substituera dans k' , au lieu de n et de a , $i.\downarrow\left(\frac{h}{i}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{h}{i}\right)$; l'intégrale (ϵ''') est alors la probabilité que le nombre n des parties, est compris dans les limites

$$i.\downarrow\left(\frac{h}{i}\right) \pm ir.\sqrt{i.\downarrow\left(\frac{h}{i}\right)}.\frac{d.\downarrow\left(\frac{h}{i}\right)}{dh}.$$

28. C'est principalement aux naissances, que l'analyse précédente est applicable, et l'on peut en déduire non-seulement pour l'espèce humaine, mais pour toutes les espèces d'êtres organisés, des résultats intéressans. Jusqu'ici les observations de ce genre n'ont été faites en grand nombre, que sur l'espèce humaine : nous allons soumettre au calcul, les principales.

Considérons d'abord les naissances observées à Paris, à Londres, et dans le royaume de Naples. Dans l'espace des 40 années écoulées depuis le commencement de 1475, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris, sur les registres, les naissances des deux sexes, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale, 593386 garçons, et 577555 filles, les enfans trouvés étant compris dans ce nombre : cela donne à peu près $\frac{25}{24}$ pour le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles.

Dans l'espace des 95 années écoulées depuis le commencement de 1664 jusqu'à la fin de 1758, il est né à Londres, 757629 garçons, et 698958 filles ; ce qui donne $\frac{19}{18}$ à peu près, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Enfin, dans l'espace des neuf années écoulées depuis le commencement de 1774 jusqu'à la fin de 1782, il est né dans le royaume de Naples, la Sicile non-comprise, 782552 garçons, et 746821 filles ; ce qui donne $\frac{22}{21}$ pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Les plus petits de ces nombres de naissances, sont relatifs à Paris ; d'ailleurs, c'est dans cette ville que les naissances des garçons et des filles, approchent le plus de l'égalité. Par ces deux raisons, la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon surpasse $\frac{1}{2}$, doit y être moindre qu'à Londres et dans le royaume de Naples. Déterminons numériquement cette probabilité.

Nommons p le nombre des naissances masculines observées à Paris, q celui des naissances féminines, et x la possibilité d'une naissance masculine, c'est-à-dire la probabilité qu'un enfant qui doit naître, sera un garçon ; $1 - x$ sera la possibilité d'une naissance féminine, et l'on aura la probabilité que sur $p + q$ naissances,

p seront masculines, et q seront féminines, égale à

$$\frac{1.2.3\dots(p+q)}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots q} \cdot x^p \cdot (1-x)^q;$$

en faisant donc

$$y = x^p \cdot (1-x)^q,$$

la probabilité que la valeur de x est comprise dans des limites données, sera par le n° 26, égale à

$$\frac{\int y dx}{\int y dx},$$

L'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et celle du numérateur étant prise dans les limites données. Si l'on prend zéro et $\frac{1}{2}$ pour ces limites, on aura la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$. La valeur qui correspond au *maximum* de y , est $\frac{p}{p+q}$; et vu la grandeur des nombres p et q , l'excès de $\frac{p}{p+q}$ sur $\frac{1}{2}$, est trop considérable pour employer ici la formule (c) du n° 27 du premier Livre, dans l'approximation de l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$; il faut donc, dans ce cas, faire usage de la formule (A) du n° 22 du même Livre. Ici l'on a

$$v = -\frac{y dx}{dy} = -\frac{x \cdot (1-x)}{p - (p+q) \cdot x};$$

la formule citée (A) donne ainsi pour l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2^{p+q+1} \cdot (p-q)} \cdot \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \text{etc.} \right].$$

Quant à l'intégrale $\int y dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on a, par le n° 26,

$$\int y dx = Y \cdot \left[U + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \cdot U^3}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \text{etc.} \right] \cdot \sqrt{\pi},$$

Y étant ce que devient y à son *maximum*, ou lorsqu'on y substitue

$\frac{p}{p+q}$ pour x . v est ici égal à $\frac{x - \frac{p}{p+q}}{\sqrt{\log Y - \log y}}$; et U , $\frac{d^2 \cdot U^3}{dx^2}$, etc. sont

ce que deviennent v , $\frac{d^2 v^3}{dx^2}$, etc., lorsqu'on y fait, après les différenciations, $x = \frac{p}{p+q}$. On trouve ainsi pour l'intégrale $\int y dx$, prise depuis x nul jusqu'à $x = 1$,

$$\int y dx = \frac{p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 + \frac{\overline{p+q}^2 - 13.pq}{12.pq.(p+q)} + \text{etc.} \right];$$

la probabilité que la valeur de x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, est donc égale à

$$\frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{(p-q) \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2^{p+q+\frac{3}{2}} \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}}} \times \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{\overline{p+q}^2 - 13.pq}{12.pq.(p+q)} - \text{etc.} \right]. \quad (o)$$

Pour appliquer de grands nombres à cette formule, il faudrait avoir les logarithmes de p , q et $p-q$, avec douze décimales au moins : on peut y suppléer de cette manière. On a

$$\log \left[\frac{\left(\frac{p+q}{2} \right)^{p+q}}{p^p \cdot q^q} \right] = -p \cdot \log \left(1 + \frac{p-q}{p+q} \right) - q \cdot \log \left(1 - \frac{p-q}{p+q} \right);$$

Lorsque les logarithmes sont hyperboliques, le second membre de cette équation, réduit en série, devient

$$-(p+q) \cdot \left[\frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^4}{3.4} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^6}{5.6} + \frac{\left(\frac{p-q}{p+q} \right)^8}{7.8} + \text{etc.} \right];$$

on aura donc par cette série très-convergente, le logarithme hyperbolique de $\frac{(p+q)^{p+q}}{2^{p+q} \cdot p^p \cdot q^q}$. En le multipliant par 0,43429448, on le convertira en logarithme tabulaire; et en lui ajoutant le logarithme tabulaire de $\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot (p-q) \cdot \sqrt{2pq\pi}}$, on aura le logarithme tabulaire du facteur qui multiplie la série (o). Si l'on nomme $\frac{1}{\mu}$ ce facteur, et si l'on fait

$$p = 393386, \quad q = 377555;$$

on trouve en logarithme tabulaire

$$\log \mu = 72,2511780,$$

la série (o) devient

$$\frac{1}{\mu} \cdot (1 - 0,0030761 + \text{etc.}).$$

Cette quantité d'une petitesse excessive, retranchée de l'unité, donnera la probabilité qu'à Paris, la possibilité des naissances des garçons, surpasse celle des filles; d'où l'on voit que l'on doit regarder cette probabilité comme étant égale, au moins, à celle des faits historiques les plus avérés.

Si l'on applique la formule (o) aux naissances observées dans les principales villes de l'Europe, on trouve que la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, observée partout depuis Naples jusqu'à Pétersbourg, indique une plus grande possibilité des naissances des garçons, avec une probabilité extrêmement approchante de la certitude; ce résultat paraît donc être une loi générale, du moins en Europe; et si dans quelques petites villes, où l'on n'a observé qu'un nombre peu considérable de naissances, la nature semble s'en écarter; il y a tout lieu de croire que cet écart n'est qu'apparent, et qu'à la longue, les naissances observées dans ces villes offrirait, en se multipliant, un résultat semblable à celui des grandes villes. Plusieurs philosophes, trompés par ces anomalies, ont cherché la cause de phénomènes qui ne sont que l'effet du hasard; ce qui prouve la nécessité de faire précéder de pareilles recherches, par celle de la probabilité avec laquelle les observations indiquent les phénomènes dont on veut déterminer la cause. Je prends pour exemple, la petite ville de Vitteaux, dans laquelle, sur 415 naissances observées pendant cinq années, il est né 203 garçons et 212 filles. p étant ici moindre que q , l'ordre naturel paraît renversé. Voyons quelle est d'après ces observations, la probabilité que les facilités des naissances des garçons surpassent dans cette ville, celles des naissances des filles. Cette probabilité est $\frac{\int y dx}{\int y dx}$, l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, et celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. La formule (o) qui, retranchée de l'unité, donne cette

fraction, devient ici divergente; nous emploierons alors la formule (3) du n° 26, qui se réduit à fort peu près à son premier terme $\frac{\int dt. e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, l'intégrale étant prise depuis la valeur de t qui correspond à $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à la valeur de t qui correspond à $x = 1$. Or on a, par le numéro cité,

$$t^2 = \log Y - \log y,$$

y étant $x^p.(1-x)^q$, et Y étant la valeur de y correspondante au *maximum* de y , qui a lieu lorsque $x = \frac{p}{p+q}$; la valeur de t^2 qui

correspond à $x = \frac{1}{2}$, est $-\log \left[\frac{\left(\frac{p+q}{2} \right)^{p+q}}{p^p \cdot q^q} \right]$, ce logarithme étant hyperbolique, et étant donné, par ce qui précède, par une série très-convergente. La valeur de t^2 qui correspond à $x = 1$, est $t^2 = \infty$; on a donc ainsi les deux limites de l'intégrale $\int dt. e^{-t^2}$, intégrale qu'il sera facile d'obtenir par les formules que nous avons données pour cet objet. On trouve ainsi la probabilité qu'à Vitteaux, les facilités des naissances des garçons l'emportent sur celles des filles, égale à 0,33; la supériorité de la facilité des naissances des filles, est donc indiquée par ces observations, avec une probabilité égale à 0,67, probabilité beaucoup trop faible pour balancer l'analogie qui nous porte à penser qu'à Vitteaux, comme dans toutes les villes où l'on a observé un nombre considérable de naissances, la possibilité des naissances des garçons l'emporte sur celle des naissances des filles.

29. On a vu qu'à Londres, le rapport observé des naissances des garçons à celles des filles, est égal à $\frac{19}{18}$, tandis qu'à Paris, celui des baptêmes des garçons à ceux des filles, n'est que $\frac{25}{24}$. Cela semble indiquer une cause constante de cette différence. Déterminons la probabilité de cette cause.

Soient p et q les nombres des baptêmes des garçons et des filles, faits à Paris dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784; en désignant par x , la possibilité du baptême d'un garçon,

et faisant, comme dans le numéro précédent,

$$y = x^p \cdot (1-x)^q,$$

la valeur de x la plus probable, sera celle qui rend y un *maximum*; elle est donc $\frac{p}{p+q}$; en supposant ensuite

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta;$$

la probabilité de la valeur de θ sera, par le n° 26, égale à

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}} \cdot c - \frac{(p+q)^3}{2pq} \cdot \theta^2$$

En désignant par p' , q' et θ' , ce que deviennent p , q et θ pour Londres, on aura

$$\frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}} \cdot c - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'} \cdot \theta'^2$$

pour la probabilité de θ' ; le produit

$$\frac{d\theta \cdot d\theta'}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{(p+q)^3 \cdot (p'+q')^3}{4pq \cdot p'q'}} \cdot c - \frac{(p+q)^3}{2pq} \cdot \theta^2 - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'} \cdot \theta'^2$$

de ces deux probabilités, sera donc la probabilité de l'existence simultanée de θ et de θ' . Faisons

$$\frac{p'}{p'+q'} + \theta' = \frac{p}{p+q} + \theta + t;$$

la fonction différentielle précédente devient

$$\frac{d\theta \cdot dt}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{(p+q)^3 \cdot (p'+q')^3}{4pq \cdot p'q'}} \cdot c - \frac{(p+q)^3}{2pq} \cdot \theta^2 - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'} \cdot \left(\theta + t - \frac{p'q - pq'}{(p+q) \cdot (p'+q')} \right)^2$$

En l'intégrant pour toutes les valeurs possibles de θ , et ensuite pour toutes les valeurs positives de t ; on aura la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris. Les valeurs de θ peuvent s'étendre depuis θ égal à $-\frac{p}{p+q}$

jusqu'à θ égal à $1 - \frac{p}{p+q}$; mais lorsque p et q sont de très-grands

— $\frac{(p+q)^3}{2pq} \cdot \theta^2$
nombres, le facteur c est si petit à ces deux limites, qu'on peut le regarder comme nul; on peut donc étendre l'intégrale relative à θ , depuis $\theta = -\infty$ jusqu'à $\theta = \infty$. On voit par la même raison, que l'intégrale relative à t , peut être étendue depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$. En suivant le procédé du n° 27 pour ces intégrations multiples, on trouvera facilement que si l'on fait

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(p+q)^3 \cdot (p'+q')^3}{2p'q'(p+q)^3 + 2pq \cdot (p'+q')^3}, \\ h &= \frac{p'q - pq'}{(p+q) \cdot (p'+q')}, \\ \theta + \frac{2pq \cdot k^2}{(p+q)^3} \cdot (t-h) &= t', \end{aligned}$$

ce qui donne $d\theta = dt'$; la différentielle précédente intégrée d'abord par rapport à t' depuis $t' = -\infty$ jusqu'à $t' = \infty$, et ensuite depuis $t = 0$ jusqu'à t infini, donnera

$$\int \frac{k dt}{\sqrt{\pi}} \cdot c^{-k^2 \cdot (t-h)^2}$$

pour la probabilité qu'à Londres, la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Si l'on fait

$$k \cdot (t-h) = t'',$$

cette intégrale devient

$$\int \frac{dt''}{\sqrt{\pi}} \cdot c^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t'' = -kh$ jusqu'à $t'' = \infty$; et il est visible qu'elle est égale à

$$1 - \int \frac{dt''}{\sqrt{\pi}} \cdot c^{-t''^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t'' = kh$ jusqu'à t'' infini. De là il suit, par le n° 27 du premier Livre, que si l'on suppose

$$i^2 = \frac{p'q' \cdot (p+q)^3 + pq \cdot (p'+q')^3}{(p+q) \cdot (p'+q') \cdot (p'q - pq')^2};$$

la probabilité que la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande à Londres qu'à Paris, a pour expression,

$$1 - \frac{i.c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i^2}{1 + \frac{2i^2}{1 + \frac{3i^2}{1 + \frac{4i^2}{1 + \text{etc.}}}}} \cdot (\mu)$$

En faisant dans cette formule,

$$p = 393386, \quad q = 377555,$$

$$p' = 737629, \quad q' = 698958,$$

elle devient

$$1 - \frac{1}{328269}.$$

Il y a donc 328268 à parier contre un, qu'à Londres, la possibilité des baptêmes des garçons est plus grande qu'à Paris. Cette probabilité approche tellement de la certitude, qu'il y a lieu de rechercher la cause de cette supériorité.

Parmi les causes qui peuvent la produire, il m'a paru que les baptêmes des enfans trouvés, qui font partie de la liste annuelle des baptêmes à Paris, devaient avoir une influence sensible sur le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles; et qu'ils devaient diminuer ce rapport, si, comme il est naturel de le croire, les parens des campagnes environnantes, trouvant de l'avantage à retenir près d'eux les enfans mâles, en avaient envoyé à l'hospice des Enfans trouvés de Paris, dans un rapport moindre que celui des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a fait voir avec une très-grande probabilité. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, on y a baptisé 163499 garçons et 159405 filles, nombre dont le rapport est $\frac{39}{38}$, et diffère trop du rapport $\frac{25}{24}$ des baptêmes des garçons et des filles à Paris, pour être attribué au simple hasard.

30. Déterminons, d'après les principes précédens, les probabilités

lités des résultats fondés sur les tables de mortalité ou d'assurance, construites sur un grand nombre d'observations. Supposons d'abord que sur un nombre p d'individus d'un âge donné A , on ait observé qu'il en existe encore le nombre q , à l'âge $A + a$; on demande la probabilité que sur p' individus de l'âge A , il en existera $q' + z$ à l'âge $A + a$, la raison de p' et q' étant la même que celle de p à q .

Soit x la probabilité d'un individu de l'âge A , pour vivre à l'âge $A + a$; la probabilité de l'événement observé est alors le terme du binome $(x + 1 - x)^p$ qui a x^q pour facteur; cette probabilité est donc

$$\frac{1.2.3\dots p}{1.2.3\dots p - q.1.2.3\dots q} \cdot x^q \cdot (1-x)^{p-q};$$

ainsi la probabilité de la valeur de x , prise de l'événement observé est

$$\frac{x^q dx \cdot (1-x)^{p-q}}{\int x^q dx \cdot (1-x)^{p-q}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La probabilité que sur les p' individus de l'âge A , $q' + z$ vivront à l'âge $A + a$, est

$$\frac{1.2.3\dots p'}{1.2.3\dots (q' + z).1.2.3\dots (p' - q' - z)} \cdot x^{q' + z} \cdot (1-x)^{p' - q' - z}.$$

En multipliant cette probabilité par la probabilité précédente de la valeur de x ; le produit intégré depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, sera la probabilité de l'existence de $q' + z$ personnes à l'âge $A + a$; en nommant donc P cette probabilité, on aura

$$P = \frac{1.2.3\dots p' \cdot \int x^{q' + z} dx \cdot (1-x)^{p' - q' - z}}{1.2.3\dots (q' + z).1.2.3\dots (p' - q' - z) \cdot \int x^q dx \cdot (1-x)^{p-q}},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. On a par le n° 28, à très-peu près,

$$\begin{aligned}
 & \int x^{q+q'+z} dx \cdot (1-x)^{p+p'-q-q'-z} \\
 &= \sqrt{2\pi} \cdot \left[(q+q') \cdot \left(1 + \frac{z}{q+q'} \right) \right]^{q+q'+z+\frac{1}{2}} \\
 & \times \frac{\left[(p+p'-q-q') \cdot \left(1 - \frac{z}{p+p'-q-q'} \right) \right]^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{(p+p')^{p+p'+\frac{3}{2}}} \\
 & \int x^q dx \cdot (1-x)^{p-q} = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{q^{q+\frac{1}{2}} \cdot (p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

Ensuite, par le n° 33 du premier Livre, on a

$$\begin{aligned}
 1.2.3 \dots p' &= p^{p'+\frac{1}{2}} \cdot c^{-p'} \cdot \sqrt{2\pi}, \\
 1.2.3 \dots (q'+z) &= q'^{q'+z+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{z}{q'} \right)^{q'+z+\frac{1}{2}} \cdot c^{-q'-z} \cdot \sqrt{2\pi}, \\
 1.2.3 \dots (p'-q'-z) &= (p'-q')^{p'-q'-z+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{z}{p'-q'} \right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}} \cdot c^{-p'+q'+z} \cdot \sqrt{2\pi}
 \end{aligned}$$

enfin on a $q' = \frac{qp'}{p}$. Cela posé, on trouve après toutes les réductions,

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{\frac{p^3}{qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p') \cdot 2\pi}} \\
 & \times \frac{\left(1 + \frac{z}{q+q'} \right)^{q+q'+z+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{z}{p+p'-q-q'} \right)^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{z}{q'} \right)^{q'+z+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{z}{p'-q'} \right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Si l'on prend le logarithme hyperbolique du second membre de cette équation, que l'on réduise ce logarithme en série ordonnée par rapport aux puissances de z , et que l'on néglige les puissances supérieures au carré; on aura en repassant du logarithme à la fonction,

$$P = \sqrt{\frac{p^3}{qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p') \cdot 2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{(2q-p) \cdot p^2 z}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')} \right) \cdot c^{\frac{-p^3 z^2}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')}}$$

p, q, p' étant supposés de très-grands nombres de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, le

coefficient de z est très-petit de l'ordre α ; celui de $-z^2$ est très-petit et du même ordre. Mais si l'on suppose z de l'ordre $\sqrt{\alpha}$, on pourra négliger dans l'expression précédente, le terme dépendant de la première puissance de z , comme très-petit de l'ordre $\sqrt{\alpha}$. De plus, ce terme se détruit lui-même, lorsque l'on a égard à la fois aux valeurs positives et négatives de z . En le négligeant donc, on aura

$$2 \cdot \sqrt{\frac{p^3}{qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p') \cdot 2\pi}} \cdot \int dz \cdot e^{-\frac{p^3 z^2}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')}}.$$

pour l'expression de la probabilité que sur p' individus de l'âge A , le nombre de ceux qui parviendront à l'âge $A+a$ sera compris dans les limites $q' \pm z$, l'intégrale étant prise depuis z nul.

Supposons maintenant que l'on ait trouvé par l'observation, que sur p individus de l'âge A , q vivaient encore à l'âge $A+a$, et r à l'âge $A+a+a'$; on demande la probabilité que sur p' individus du même âge A , $\frac{qp'}{p} + z$ vivront à l'âge $A+a$, et $\frac{rp'}{p} + z'$ vivront à l'âge $A+a+a'$.

La probabilité que sur p' individus de l'âge A , $\frac{qp'}{p} + z$ vivront à l'âge $A+a$ est, par ce qui précède,

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p') \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{p^3 z^2}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')}}.$$

On aura la probabilité que sur $\frac{qp'}{p} + z$ individus de l'âge $A+a$, $(\frac{qp'}{p} + z) \frac{r}{q} + u$ vivront à l'âge $A+a+a'$, en changeant dans la fonction précédente, p' dans $\frac{qp'}{p} + z$, p en q , q en r , et z en u ; ce qui donne, en négligeant z par rapport à $\frac{qp'}{p}$.

$$\sqrt{\frac{qp^2}{2rp' \cdot (q-r) \cdot (p+p') \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{qp^2 \cdot u^2}{2rp' \cdot (q-r) \cdot (p+p')}}.$$

Le produit de ces deux probabilités, est la probabilité de l'existence

simultanée de z et de u ; or on a

$$\left(\frac{qp'}{p} + z\right) \frac{r}{q} + u = \frac{rp'}{p} + z';$$

ce qui donne

$$u = z' - \frac{rz}{q};$$

en faisant donc

$$\mathcal{C}^2 = \frac{p^3}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')},$$

$$\mathcal{C}'^2 = \frac{qp^2}{2rp' \cdot (q-r) \cdot (p+p')}.$$

La probabilité P de l'existence simultanée des valeurs de z et de z' sera

$$P = \int \frac{\mathcal{C}dz}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mathcal{C}'dz'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mathcal{C}^2 \cdot z^2 - \mathcal{C}'^2 \cdot \left(z' - \frac{rz}{q}\right)^2}.$$

En suivant cette analyse, on trouve généralement que si l'on fait

$$\mathcal{C}''^2 = \frac{rp^2}{2sp' \cdot (r-s) \cdot (p+p')},$$

$$\mathcal{C}'''^2 = \frac{sp^2}{2tp' \cdot (s-t) \cdot (p+p')},$$

etc.;

la probabilité P que sur p' individus de l'âge A , les nombres de ceux qui vivront aux âges $A+a$, $A+a+a'$, $A+a+a'+a''$, etc. seront compris dans les limites respectives

$$\frac{qp'}{p}, \frac{qp'}{p} + z; \quad \frac{rp'}{p}, \frac{rp'}{p} + z'; \quad \frac{sp'}{p}, \frac{sp'}{p} + z''; \quad \frac{tp'}{p}, \frac{tp'}{p} + z'''; \quad \text{etc.}$$

est

$$P = \int \frac{\mathcal{C} \cdot dz}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mathcal{C}' \cdot dz'}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mathcal{C}'' \cdot dz''}{\sqrt{\pi}} \cdot \text{etc.} \cdot e^{-\mathcal{C}^2 \cdot z^2 - \mathcal{C}'^2 \cdot \left(z' - \frac{rz}{q}\right)^2 - \mathcal{C}''^2 \cdot \left(z'' - \frac{sz'}{r}\right)^2 - \text{etc.}}$$

On peut apprécier par cette formule, les probabilités respectives des nombres d'une table de mortalité, construite sur un grand nombre d'observations. La manière de former ces tables, est très-simple. On prend sur les registres des naissances et des morts, un

grand nombre d'enfans que l'on suit pendant le cours de leur vie , en déterminant combien il en reste à la fin de chaque année de leur âge; et l'on inscrit ce nombre vis-à-vis de chaque année finissante. Mais comme dans les deux ou trois premières années de la vie, la mortalité est très rapide; il faut, pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge, le nombre des survivans à la fin de chaque demi-année. Si le nombre p des enfans était infini, on aurait ainsi des tables exactes qui représenteraient la vraie loi de la mortalité dans le lieu et à l'époque de leur formation. Mais le nombre d'enfans que l'on choisit étant fini; quelque grand qu'il soit, les nombres de la table sont susceptibles d'erreurs. Représentons par p' , q' , r' , s' , t' , etc., ces divers nombres. Les vrais nombres, pour un nombre p' de naissances, sont $\frac{qp'}{p}$, $\frac{rp'}{p}$, $\frac{s.p'}{p}$; $\frac{tp'}{p}$, etc. Si l'on fait $q' = \frac{qp'}{p} + z$, z sera l'erreur de q' ; pareillement si l'on suppose $r' = \frac{rp'}{p} + z'$, z' sera l'erreur de r' , et ainsi de suite. L'expression précédente de P est donc la probabilité que les erreurs de q' , r' , s' , etc. sont comprises dans les limites zéro et z , zéro et z' , zéro et z'' , etc. Les valeurs de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, etc. dépendent de p , q , r , etc. qui sont inconnues; mais la supposition de p infini donne

$$\mathcal{C}^2 = \frac{p^2}{2qp' \cdot (p - q)}.$$

On peut substituer sans erreur sensible, $\frac{q'}{p'}$ au lieu de $\frac{q}{p}$, ce qui donne

$$\mathcal{C}^2 = \frac{p'}{2q' \cdot (p' - q')}.$$

On aura de la même manière,

$$\mathcal{C}'^2 = \frac{q'}{2r' \cdot (q' - r')},$$

$$\mathcal{C}''^2 = \frac{r'}{2s' \cdot (r' - s')},$$

etc.

Si l'on ne veut considérer que l'erreur d'un des nombres de la table, tel que s' ; alors on intégrera l'expression de P , relativement

à z''' , z'' , etc., depuis les valeurs infinies négatives de ces variables jusqu'à leurs valeurs infinies positives; et alors on a

$$P = \int \frac{\epsilon . dz}{\sqrt{\pi}} . \frac{\epsilon' . dz'}{\sqrt{\pi}} . \frac{\epsilon'' . dz''}{\sqrt{\pi}} . e^{-\epsilon^2 z^2 - \epsilon'^2 \left(z' - \frac{r' z}{q'}\right)^2 - \epsilon''^2 \left(z'' - \frac{s' z'}{r'}\right)^2} . c$$

Les intégrales relatives à z et z' doivent être prises depuis leurs valeurs infinies négatives, jusqu'à leurs valeurs infinies positives; on trouvera ainsi, par le procédé dont nous avons souvent fait usage pour ce genre d'intégrations, que si l'on suppose

$$\gamma^2 = \frac{p'}{2s' . (p' - s')} ,$$

on aura

$$P = \int \frac{\gamma dz''}{\sqrt{\pi}} . e^{-\gamma^2 z''^2}$$

La probabilité que l'erreur d'un nombre quelconque de la table, sera comprise dans les limites zéro et une quantité quelconque, est donc indépendante, soit des nombres intermédiaires, soit des nombres subséquens.

Si l'on fait $\gamma z'' = t$; on aura

$$\frac{z''}{s'} = t . \sqrt{\frac{2 . (p' - s')}{p' s'}} ,$$

et la probabilité P que le rapport de l'erreur du nombre s' de la table, à ce nombre lui-même, sera compris dans les limites $\pm t . \sqrt{\frac{2 . (p' - s')}{p' s'}}$, est

$$P = 2 . \int \frac{dt}{\sqrt{\pi}} . e^{-t^2} ,$$

l'intégrale étant prise depuis t nul. On voit ainsi que la valeur de t , et par conséquent la probabilité P restant les mêmes, ce rapport augmente lorsque s' diminue; ainsi les nombres de la table sont d'autant moins sûrs, qu'ils sont plus éloignés du premier p' . On voit encore que ce rapport diminue à mesure que p' augmente, ou à mesure que l'on multiplie les observations; de manière que l'on peut par cette multiplication, diminuer à la fois ce rapport et

augmenter t ; ce rapport devenant nul lorsque p' est infini, et P devenant alors égal à l'unité.

31. Appliquons l'analyse précédente à la recherche de la population d'un grand empire. L'un des moyens les plus simples et les plus propres à déterminer cette population, est l'observation des naissances annuelles dont on est obligé de tenir compte pour déterminer l'état civil des enfans. Mais ce moyen suppose que l'on connaît à très-peu près le rapport de la population aux naissances annuelles, rapport que l'on obtient en faisant sur plusieurs points de l'empire, le dénombrement exact des habitans, et en le comparant aux naissances correspondantes observées pendant quelques années consécutives : on en conclut ensuite, par une simple proportion, la population de tout l'empire. Le gouvernement a bien voulu, à ma prière, donner des ordres pour avoir avec précision, ces données. Dans trente départemens, distribués sur la surface de la France, de manière à compenser les effets de la variété des climats, on a fait choix des communes dont les maires, par leur zèle et leur intelligence, pouvaient fournir les renseignemens les plus précis. Le dénombrement exact des habitans de ces communes, pour le 22 septembre 1802, s'est élevé à 2037615 individus. Le relevé des naissances, des mariages et des morts, depuis le 22 septembre 1799 jusqu'au 22 septembre 1802, a donné pour ces trois années,

<i>Naissances.</i>	<i>Mariages</i>	<i>Décès.</i>
110312 garçons, 105287 filles,	46037	103659 mâles, 99443 femelles.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, que ce relevé présente, est celui de 22 à 21; et les mariages sont aux naissances, comme 3 à 14 : le rapport de la population aux naissances annuelles est 28,352845. En supposant donc le nombre des naissances annuelles en France, égal à quinze cent mille, ce qui s'éloigne peu de la vérité; on aura, en multipliant par le rapport précédent, ce dernier nombre, la population de la France égale

à 42529267 individus. Voyons l'erreur que l'on peut craindre dans cette évaluation.

Pour cela, concevons une urne qui renferme une infinie de boules blanches et noires dans un rapport inconnu. Supposons ensuite qu'ayant tiré au hasard un grand nombre p de ces boules, q aient été blanches, et que dans un second tirage, sur un nombre inconnu de boules extraites, il y en ait q' de blanches. Pour en déduire ce nombre inconnu, on suppose son rapport à q' , le même que celui de p à q ; ce qui donne $\frac{pq'}{q}$ pour ce nombre. Cherchons la probabilité que le nombre des boules extraites au second tirage, est compris dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$. Nommons x le rapport inconnu du nombre des boules blanches, au nombre total des boules de l'urne. La probabilité de l'événement observé dans le premier tirage, sera exprimée par le terme qui a pour facteur $x^q \cdot (1-x)^{p-q}$ dans le développement du binôme $(x + 1-x)^p$; d'où il est facile de conclure, comme dans le numéro précédent, que la probabilité de x est

$$\frac{x^q dx \cdot (1-x)^{p-q}}{\int x^q dx \cdot (1-x)^{p-q}};$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Concevons maintenant que dans le second tirage, le nombre total des boules extraites est $\frac{pq'}{q} + z$; la probabilité de ce résultat sera

le terme du binôme $(x + 1-x)^{\frac{pq'}{q} + z}$ qui a pour facteur $x^{\frac{pq'}{q} + z - q'} \cdot (1-x)^{q' - \frac{pq'}{q}}$; cette probabilité est donc

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left(\frac{pq'}{q} + z\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left(\frac{pq'}{q} + z - q'\right)} \cdot x^{\frac{pq'}{q} + z - q'} \cdot (1-x)^{q' - \frac{pq'}{q}}.$$

En la multipliant par la probabilité précédente, le produit intégré depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, sera la probabilité que le nombre
total

total des boules extraites, est $\frac{pq'}{q} + z$. On trouvera ainsi, par l'analyse du numéro précédent, cette probabilité égale à

$$\sqrt{\frac{q^3}{2pq' \cdot (p-q) \cdot (q+q') \cdot \pi}} \cdot c - \frac{q^3 z^2}{2pq' \cdot (p-q) \cdot (q+q')};$$

en nommant donc P la probabilité que le nombre des boules extraites dans le second tirage, est compris dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$, on aura

$$P = 1 - 2 \int dz \cdot \sqrt{\frac{q^3}{2pq' \cdot (p-q) \cdot (q+q') \cdot \pi}} \cdot c - \frac{q^3 z^2}{2pq' \cdot (p-q) \cdot (q+q')},$$

l'intégrale étant prise depuis $z = z$ jusqu'à z infini.

Maintenant, le nombre p des boules extraites dans le premier tirage, peut représenter un dénombrement; et le nombre q des boules blanches qui y sont comprises, peut exprimer le nombre des femmes qui, dans ce dénombrement, doivent devenir mères dans l'année, ou le nombre des naissances annuelles, correspondantes au dénombrement. Alors q' exprime le nombre des naissances annuelles observées dans tout l'empire, et d'où l'on conclut la population $\frac{pq'}{q}$. Dans ce cas, la valeur précédente de P exprime la probabilité que cette population est comprise dans les limites $\frac{pq'}{q} \pm z$.

Nous supposerons, conformément aux données précédentes,

$$p = 2037615, \quad q = \frac{110313 + 105287}{3};$$

nous supposerons ensuite

$$q' = 1500000, \quad z = 500000;$$

la formule précédente donne alors

$$P = 1 - \frac{1}{1162}.$$

Il y a donc environ 1161 à parier contre un, qu'en fixant à

42529267, la population correspondante à quinze cent mille naissances, on ne se trompera pas d'un demi-million.

La différence entre la certitude et la probabilité P diminue avec une très-grande rapidité, lorsque z augmente: elle serait insensible, si l'on supposait $z = 700000$.

52. Considérons maintenant la probabilité des événemens futurs, tirée des événemens observés; et supposons qu'ayant observé un événement composé d'un nombre quelconque d'événemens simples, on cherche la probabilité d'un résultat futur, composé d'événemens semblables.

Nommons x la probabilité de chaque événement simple, y la probabilité correspondante du résultat observé, et z celle du résultat futur; la probabilité de x sera, comme on l'a vu,

$$\frac{ydx}{\int ydx},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; $\frac{yzdx}{\int ydx}$ est donc la probabilité du résultat futur, prise de la valeur de x , considérée comme cause de l'événement simple; ainsi en nommant P la probabilité entière de l'événement futur, on aura

$$P = \frac{\int yzdx}{\int ydx},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Supposons, par exemple, qu'un événement étant arrivé m fois de suite, on demande la probabilité qu'il arrivera les n fois suivantes. Dans ce cas, x étant supposé représenter la possibilité de l'événement simple, x^m sera celle de l'événement observé, et x^n celle de l'événement futur; ce qui donne

$$y = x^m, \quad z = x^n;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{m+1}{m+n+1}.$$

Supposons l'événement observé, composé d'un très-grand nombre

d'événemens simples; soit a la valeur de x qui rend y un *maximum*, et Y ce *maximum*; soit a' la valeur de x qui rend yz un *maximum*, et Y' et Z' ce que deviennent y et z à ce *maximum*. On aura par le n° 27 du premier Livre, à très peu près,

$$fydx = \frac{Y^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{ddY}{dx^2}}},$$

$$fyzdx = \frac{(Y'Z')^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{dd(Y'Z')}{dx^2}}}.$$

Le résultat observé étant composé d'un très-grand nombre d'événemens simples, supposons que l'événement futur soit beaucoup moins composé. L'équation qui donne la valeur a' de x , correspondante au *maximum* de yz , est

$$0 = \frac{dy}{ydx} + \frac{dz}{zdx}.$$

$\frac{dy}{ydx}$ est une quantité très-grande, de l'ordre $\frac{1}{a}$; et puisque le résultat futur est très-peu composé par rapport au résultat observé, $\frac{dz}{zdx}$ sera d'un ordre moindre, que nous désignerons par $\frac{1}{a^{1-\lambda}}$;

ainsi a étant la valeur de x qui satisfait à l'équation $0 = \frac{dy}{ydx}$; la différence entre a et a' sera très-petite de l'ordre a^λ , et l'on pourra supposer

$$a' = a + a^\lambda \cdot \mu.$$

Cette supposition donne

$$Y' = Y + a^\lambda \cdot \mu \cdot \frac{dY}{dx} + \frac{a^{2\lambda} \cdot \mu^2}{1.2} \cdot \frac{d^2Y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Mais on a $\frac{dY}{dx} = 0$, et il est facile d'en conclure que $\frac{d^n Y}{dx^n}$ est d'un ordre égal ou moindre que $\frac{1}{a^n}$; le terme $\frac{a^{\lambda n} \cdot \mu^n}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{d^n Y}{dx^n}$ sera par

conséquent au plus de l'ordre $\alpha^{n(\lambda - \frac{1}{2})}$. Ainsi la convergence de l'expression de Y' en série, exige que λ surpasse $\frac{1}{2}$; et dans ce cas, Y' ne diffère de Y , que de quantités de l'ordre $\alpha^{2\lambda-1}$.

Si l'on nomme Z ce que devient z lorsqu'on y fait $x = a$; on s'assurera de la même manière que Z' peut se réduire à Z . Enfin, on prouvera par un raisonnement semblable, que $\frac{d^2(Z'Y')}{dx^2}$ se réduit à très-peu près à $Z \cdot \frac{d^2Y}{dx^2}$. En substituant ces valeurs dans l'expression de P , on aura

$$P = Z;$$

c'est-à-dire que l'on peut alors déterminer la probabilité du résultat futur, en supposant x égal à la valeur qui rend le résultat observé, le plus probable. Mais il faut pour cela que le résultat futur soit assez peu composé, pour que les exposans des facteurs de z soient d'un ordre de grandeur plus petit que la racine carrée des facteurs de y ; autrement, la supposition précédente exposerait à des erreurs sensibles.

Si le résultat futur est une fonction du résultat observé, z sera une fonction de y , que nous représenterons par $\phi(y)$. La valeur de x , qui rend zy un *maximum* est, dans ce cas, la même qui rend y un *maximum*; ainsi l'on a $a' = a$; et si l'on désigne $\frac{d\phi(y)}{dy}$ par $\phi'(y)$, l'expression de P deviendra, en observant que $\frac{dY}{x} = 0$,

$$P = \frac{\phi(Y)}{\sqrt{1 + \frac{Y \cdot \phi'(Y)}{\phi(Y)}}}.$$

Si $\phi(y) = y^n$, ensorte que l'événement futur soit n fois la répétition de l'événement observé; on aura

$$P = \frac{Y^n}{\sqrt{n+1}}.$$

La probabilité P calculée dans la supposition que la possibilité des événemens simples est égale à celle qui rend le résultat observé le plus probable, est Y^n : on voit ainsi que les petites erreurs qui

résultent de cette supposition, s'accumulent à raison des évènements simples qui entrent dans le résultat futur, et deviennent très-sensibles lorsque ces évènements sont en grand nombre.

53. Depuis 1745, époque où l'on a commencé à distinguer à Paris sur les registres, les baptêmes des garçons de ceux des filles, on a constamment observé que le nombre des premiers a été supérieur à celui des seconds. Déterminons la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant un tems donné, par exemple, dans l'espace d'un siècle.

Soit p le nombre observé des baptêmes des garçons ; q celui des filles ; $2n$ le nombre des baptêmes annuels ; x la probabilité que l'enfant qui va naître et être baptisé sera un garçon. En élevant $x + 1 - x$ à la puissance $2n$, et développant cette puissance, on aura

$$x^{2n} + 2n \cdot x^{2n-1} \cdot (1-x) + \frac{2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{2n-2} \cdot (1-x)^2 + \text{etc.}$$

La somme des n premiers termes de ce développement, sera la probabilité que chaque année, le nombre des baptêmes des garçons l'emportera sur celui des baptêmes des filles. Nommons z cette somme ; z^i sera la probabilité que cette supériorité se maintiendra pendant le nombre i d'années consécutives ; donc si l'on désigne par P la probabilité entière que cela aura lieu ; on aura par le numéro précédent ,

$$P = \frac{\int x^p dx \cdot z^i \cdot (1-x)^q}{\int x^p dx \cdot (1-x)^q},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Si l'on nomme a la valeur de x qui rend $x^p \cdot z^i \cdot (1-x)^q$ un *maximum*, et que l'on désigne par Z , $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{d^2Z}{dx^2}$, ce que deviennent z , $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ lorsqu'on y change x en a ; on aura par le n° 26,

$$\int x^p dx \cdot z^i \cdot (1-x)^q = \frac{a^{p+1} \cdot (1-a)^{q+1} \cdot Z^i \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{p \cdot (1-a)^2 + q \cdot a^2 + i \cdot a^2 \cdot (1-a)^2 \cdot \left(\frac{dZ^2 - Z ddZ}{Z^2 \cdot dx^2} \right)}}.$$

z étant la somme des n premiers termes de la fonction

$$x^{2n} \cdot \left[1 + 2n \cdot \frac{(1-x)}{x} + \frac{2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(1-x)^2}{x^2} + \text{etc.} \right],$$

on a par le n° 37 du premier Livre ,

$$z = \frac{\int \frac{u^{n-1} \cdot du}{(1+u)^{2n+1}}}{\int \frac{u^{n-1} \cdot du}{(1+u)^{2n+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u = \frac{1-x}{x}$ jusqu'à $u = \infty$, et celle du dénominateur étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$. Soit $u = \frac{1-s}{s}$, cette valeur de z deviendra

$$z = \frac{\int s^n ds \cdot (1-s)^{n-1}}{\int s^n ds \cdot (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$. De là on tire

$$\frac{dz}{z dx} = \frac{x^n \cdot (1-x)^{n-1}}{\int s^n \cdot ds \cdot (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$. On aura ensuite

$$\frac{ddz}{z dx^2} = \frac{dz}{z dx} \cdot \frac{n - (2n-1) \cdot x}{x \cdot (1-x)}.$$

En changeant x en a dans ces expressions, on aura celles de Z , $\frac{dZ}{Z dx}$, $\frac{ddZ}{Z dx^2}$.

Pour déterminer a , nous observerons que la condition du *maximum* de $x^p \cdot z^i \cdot (1-x)^q$, donne

$$0 = \frac{p}{a} - \frac{q}{1-a} + i \cdot \frac{dZ}{Z dx};$$

d'où l'on tire, en substituant pour $\frac{dZ}{Z dx}$, sa valeur précédente,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i \cdot a^{n+1} \cdot (1-a)^n}{(p+q) \cdot \int s^n ds \cdot (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=a$. Pour conclure a de cette équation, nous observerons que la valeur de s qui rend $s^n \cdot (1-s)^{n-1}$ un *maximum*, est à très-peu près $\frac{1}{2}$, et par conséquent, moindre que $\frac{p}{p+q}$ qui lui-même est plus petit que a . Ainsi n étant supposé un grand nombre, on peut, sans erreur sensible, étendre l'intégrale de cette expression de a , depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$, le terme qui en dépend étant très-petit. Cela donne par le n° 28,

$$\int s^n ds \cdot (1-s)^{n-1} = \frac{n^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} \cdot (n-1)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n} \cdot \sqrt{n}};$$

l'équation qui détermine a devient ainsi à fort peu près,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i \cdot a^{n+1} \cdot (1-a)^n \cdot 2^{2n} \cdot \sqrt{n}}{(p+q) \cdot \sqrt{\pi}}.$$

Pour la résoudre, nous observerons que a diffère très-peu de $\frac{p}{p+q}$: ensorte que si l'on fait

$$a = \frac{p}{p+q} + \mu,$$

μ sera fort petit, et l'on aura d'une manière très approchée,

$$\mu = i \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{p \cdot \left[1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^2 \right]^n}{(p+q)^2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot c - \frac{n\mu \cdot (p+q)(p-q)}{pq} - \frac{(p+q)^2 \cdot n\mu^2}{pq}; \quad (1)$$

on aura ensuite à très-peu près,

$$a^p \cdot (1-a)^q = \left(\frac{p}{p+q} \right)^p \cdot \left(\frac{q}{p+q} \right)^q \cdot c - \frac{(p+q)^3}{2pq} \cdot \mu^2$$

En substituant dans le radical

$$\sqrt{p \cdot (1-a)^2 + q a^2 + i \cdot a^2 \cdot (1-a)^2 \cdot \left(\frac{dZ^2 - Z ddZ}{Z^2 \cdot dx^2} \right)},$$

pour a , sa valeur $\frac{p}{p+q} + \mu$; pour $\frac{dZ}{Z dx}$, sa valeur $\frac{(p+q) \cdot a - p}{ia \cdot (1-a)}$ ou

$\frac{(p+q) \cdot \mu}{ia \cdot (1-a)}$; et pour $\frac{ddZ}{Zdx^2}$, sa valeur $\frac{dZ}{Zdx} \cdot \frac{n - (2n-1) \cdot a}{a \cdot (1-a)}$; ce radical devient à fort peu près,

$$\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(p+q) \cdot \mu}{pq} \cdot [n \cdot (p-q) - p] + \frac{(p+q)^2}{pq} \cdot \mu^2 \cdot \left(2n + \frac{(p+q)}{i}\right)}.$$

Enfin, on a par le n° 27,

$$\int x^p dx \cdot (1-x)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \cdot \sqrt{\frac{pq}{p+q}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{p+q}.$$

Cela posé, l'expression de P deviendra à très-peu près,

$$P = \frac{Z^i \cdot c^{-\frac{(p+q)^2}{2pq} \cdot \mu^2}}{\sqrt{1 + \frac{(p+q) \cdot \mu}{pq} \cdot [n \cdot \overline{p-q} - p] + \frac{(p+q)^2 \cdot \mu^2}{pq} \cdot \left(2n + \frac{(p+q)}{i}\right)}}. \quad (2)$$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer Z . On a

$$Z = \frac{\int s^n \cdot ds \cdot (1-s)^{n-1}}{\int s^n \cdot ds \cdot (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=a$, et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$. Il est facile d'en conclure que l'on a

$$Z = 1 - \frac{\int s^n \cdot ds \cdot (1-s)^{n-1}}{\int s^n \cdot ds \cdot (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s=a$ jusqu'à $s=1$ et celle du dénominateur étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=1$; on aura ainsi à fort peu près, par le n° 28,

$$Z = 1 - \frac{\int dt \cdot c^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad (3)$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis

$$t^2 = \frac{(2n-1)}{2n \cdot (n-1)} \cdot \left(\frac{n \cdot (p-q)}{p+q} - \frac{p}{p+q} + (2n-1) \cdot \mu\right)^2$$

jusqu'à $t^2 = \infty$.

Pour

Pour appliquer des nombres à ces formules, nous observerons que, par ce qui précède, dans l'intervalle du commencement de 1745 à la fin de 1784, on a par le n° 28, relativement à Paris,

$$p = 393386, \quad q = 377555.$$

En divisant par 40 la somme de ces deux nombres, on aura 19273,5 pour le nombre moyen des baptêmes annuels; ce qui donne $n = 9636,75$; nous supposerons de plus $i = 100$. Au moyen de ces valeurs, on déterminera celle de μ , par l'équation (1); on déterminera ensuite la valeur de Z par l'équation (3); enfin l'équation (2) donnera la valeur de P . On trouvera ainsi

$$P = 0,782.$$

Il y avait donc à la fin de 1784, d'après ces données, près de quatre contre un à parier que dans l'espace d'un siècle, les baptêmes des garçons à Paris, l'emporteront, chaque année, sur ceux des filles.

CHAPITRE VII.

De l'influence des inégalités inconnues qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose parfaitement égales.

34. J'AI déjà considéré cette influence dans le n° 1, où l'on a vu que ces inégalités augmentent la probabilité des événemens composés de la répétition des événemens simples. Je vais reprendre ici cet objet important dans les applications de l'analyse des probabilités.

Il résulte du numéro cité, que si au jeu de *croix* et *pile*, il existe une différence inconnue entre les possibilités d'amener l'un ou l'autre ; en nommant α cette différence, ensorte que $\frac{1 \pm \alpha}{2}$ soit la possibilité d'amener *croix*, et par conséquent $\frac{1 \mp \alpha}{2}$ celle d'amener *pile*, celui des deux signes $+$ et $-$ que l'on doit adopter étant inconnu ; la probabilité d'amener *croix* n fois de suite, sera

$$\frac{(1 + \alpha)^n + (1 - \alpha)^n}{2^{n+1}}$$

ou

$$\frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \alpha^2 + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \alpha^4 + \text{etc.} \right). \quad (1)$$

Le jeu de *croix* et *pile* consiste, comme on sait, à projeter en l'air une pièce très-mince, qui retombe nécessairement sur l'une de ses deux faces opposées que l'on nomme *croix* et *pile*. On peut diminuer la valeur de α , en rendant ces deux faces le plus égales qu'il est possible. Mais il est physiquement impossible d'obtenir une égalité parfaite ; et alors, celui qui parie d'amener *croix* deux fois de suite, ou *pile* deux fois de suite, a de l'avantage sur celui qui parie que dans deux coups, *croix* et *pile* alterneront ; sa probabilité étant $\frac{1 + \alpha^2}{2}$.

On peut diminuer l'influence de l'inégalité des deux faces de la pièce, en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Désignons par A cette pièce, et concevons une seconde pièce B semblable à la première. Supposons qu'après avoir projeté cette seconde pièce, on projette la pièce A pour former un premier coup, et déterminons la probabilité que dans n coups pareils consécutifs, la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B . Si l'on nomme p la probabilité d'amener *croix* avec la pièce A , et q la probabilité d'amener *pile*; si l'on désigne ensuite par p' et q' les mêmes probabilités pour la pièce B ; $pp' + qq'$ sera la probabilité que dans un coup, la pièce A présentera les mêmes faces que la pièce B ; ainsi $(pp' + qq')^n$ sera la probabilité que cela aura lieu constamment dans n coups. Soit

$$p = \frac{1+\alpha}{2}, \quad q = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$p' = \frac{1+\alpha'}{2}, \quad q' = \frac{1-\alpha'}{2};$$

on aura

$$(pp' + qq')^n = \frac{1}{2^n} \cdot (1 + \alpha\alpha')^n.$$

Mais comme on ignore quelles sont les faces que les inégalités α et α' favorisent, la probabilité précédente peut être également ou $\frac{1}{2^n} \cdot (1 + \alpha\alpha')^n$, ou $\frac{1}{2^n} \cdot (1 - \alpha\alpha')^n$, suivant que α et α' sont de même signe ou de signes contraires; la vraie valeur de cette probabilité est donc, α et α' étant supposés positifs,

$$\frac{1}{2^{n+1}} \cdot [(1 + \alpha\alpha')^n + (1 - \alpha\alpha')^n]$$

ou

$$\frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot \alpha^2 \alpha'^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \alpha^4 \alpha'^4 + \text{etc.} \right).$$

Si l'on compare cette formule à la formule (1), on voit qu'elle se rapproche plus qu'elle, de $\frac{1}{2^n}$, ou de la probabilité qui aurait lieu, si les faces des pièces étaient parfaitement égales. Ainsi l'inégalité de ces faces, est par là corrigée en grande partie: elle le serait

même en totalité, si α' était nul, ou si les deux faces de la pièce B étaient parfaitement égales.

p représentant la probabilité de *croix*, avec la pièce A , et q celle de *pile*; la probabilité d'amener *croix* un nombre impair de fois dans n coups, sera

$$\frac{1}{2} \cdot [(p+q)^n \mp (p-q)^n],$$

le signe $-$ ayant lieu si n est pair, et le signe $+$ ayant lieu si n est impair. Faisant $p = \frac{1+\alpha}{2}$, $q = \frac{1-\alpha}{2}$, la fonction précédente devient

$$\frac{1}{2} \cdot (1 \mp \alpha^n).$$

Si n est impair et égal à $2i+1$, cette fonction est

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \alpha^{2i+1});$$

mais comme on peut y supposer également α positif ou négatif, il faut prendre la moitié de la somme de ses deux valeurs relatives à ces suppositions; ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour sa véritable valeur; l'inégalité des faces de la pièce ne change donc point alors la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* un nombre impair de fois. Mais si n est pair et égal à $2i$, cette probabilité devient

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha^{2i}), \quad (2)$$

$\pm \alpha$ étant l'inégalité inconnue de probabilité entre *croix* et *pile*; il y a donc du désavantage à parier d'amener *croix* ou *pile* un nombre impair de fois dans $2i$ coups, et par conséquent, il y a de l'avantage à parier d'amener l'un ou l'autre, un nombre pair de fois.

On peut diminuer ce désavantage, en changeant le pari d'amener *croix* un nombre impair de fois en $2i$ coups, dans le pari d'amener dans le même nombre de coups, un nombre impair de ressemblances entre les faces des deux pièces A et B , projetées comme on l'a dit ci-dessus. En effet, la probabilité d'une ressemblance à chaque coup est, comme on l'a vu, $pp' + qq'$, et la probabilité d'une dissemblance est $pq' + p'q$. Nommons P la première de ces deux quantités, et Q la seconde; la probabilité d'amener un nombre

impair de ressemblances dans $2i$ coups, sera

$$\frac{1}{2} \cdot [(P + Q)^{2i} - (P - Q)^{2i}].$$

Si l'on fait, comme précédemment,

$$p = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad q = \frac{1 - \alpha}{2}, \quad p' = \frac{1 + \alpha'}{2}, \quad q' = \frac{1 - \alpha'}{2};$$

on aura

$$P = \frac{1 + \alpha\alpha'}{2}, \quad Q = \frac{1 - \alpha\alpha'}{2};$$

la fonction précédente devient ainsi,

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha^{2i} \cdot \alpha'^{2i}).$$

Cette fonction reste la même, quelque changement que l'on fasse dans les signes de α et de α' ; elle est donc la vraie probabilité d'amener un nombre impair de ressemblances; mais α et α' étant de petites fractions, on voit qu'elle se rapproche de $\frac{1}{2}$, plus que la formule (2); le désavantage d'un nombre impair est donc par là diminué.

On voit par ce qui précède, que l'on peut diminuer l'influence des inégalités inconnues entre des chances que l'on suppose égales, en les soumettant elles-mêmes au hasard. Par exemple, si l'on met dans une urne, les n^{os} 1, 2, 3, ..., n , suivant cet ordre, et qu'ensuite après avoir agité l'urne pour bien mêler ces numéros, on en tire un; s'il y a entre les probabilités de sortie des numéros, une petite différence dépendant de l'ordre suivant lequel ils ont été placés dans l'urne; on la diminuera considérablement, en mettant dans une seconde urne, ces numéros, suivant leur ordre de sortie de la première urne, et en agitant ensuite cette seconde urne, pour en bien mêler les numéros. Alors l'ordre suivant lequel on a placé les numéros dans la première urne, aura extrêmement peu d'influence sur l'extraction du premier numéro qui sortira de la seconde urne. On diminuerait encore cette influence, en considérant de la même manière une troisième urne, une quatrième, etc.

Considérons deux joueurs A et B jouant ensemble, de manière qu'à chaque coup, celui qui perd, donne un jeton à son adversaire, et que la partie dure jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné

tous les jetons de l'autre. Soient p et q leurs adresses respectives; a et b leurs nombres de jetons en commençant. Il résulte de la formule (H) du n° 10, en y faisant i infini, que la probabilité de A , pour gagner la partie, est

$$\frac{p^b \cdot (p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}},$$

Si l'on fait dans cette expression,

$$p = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad q = \frac{1 - \alpha}{2};$$

on aura, en prenant le signe supérieur, la probabilité relative au cas où A est plus fort que B ; et en prenant le signe inférieur, on aura la probabilité relative au cas où A est moins fort que B . Si l'on ignore quel est le plus fort des joueurs, la demi-somme de ces deux probabilités sera la probabilité de A , que l'on trouve ainsi égale à

$$\frac{\frac{1}{2} [(1+\alpha)^a - (1-\alpha)^a] \cdot [(1+\alpha)^b + (1-\alpha)^b]}{(1+\alpha)^{a+b} - (1-\alpha)^{a+b}}; \quad (3)$$

en changeant a en b , et réciproquement, on aura la probabilité de B . Si l'on suppose α infiniment petit ou nul; ces probabilités deviennent $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b}{a+b}$; elles sont donc proportionnelles aux nombres des jetons des joueurs; ainsi pour l'égalité du jeu, leurs mises doivent être dans ce rapport. Mais alors l'inégalité qui peut exister entre eux, est favorable au joueur qui a le plus petit nombre de jetons; car si l'on suppose a moindre que b , il est facile de voir que l'expression (3) est plus grande que $\frac{a}{a+b}$. Si les joueurs conviennent de doubler, de tripler, etc. leurs jetons; l'avantage de A augmente sans cesse, et dans le cas de a et b infinis, sa probabilité devient $\frac{1}{2}$ ou la même que celle de B .

P étant la probabilité d'un événement composé de deux évènements simples dont p et $1-p$ sont les probabilités respectives; si l'on suppose que la valeur de p soit susceptible d'une inégalité inconnue z qui puisse s'étendre depuis $-\alpha$ jusqu'à $+\alpha$; en nommant ϕ la probabilité de $p+z$, ϕ étant fonction de z ; on aura

pour la vraie probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P' \phi dz}{\int \phi dz},$$

P' étant ce que devient P lorsqu'on y change p dans $p+z$, et les intégrales étant prises depuis $z = -\alpha$ jusqu'à $z = \alpha$.

Si l'on n'a d'autres données pour déterminer z , qu'un événement observé, formé des mêmes événemens simples; en nommant Q la probabilité de cet événement, $p+z$ et $1-p-z$ étant les probabilités des événemens simples; l'expression précédente donne, en y changeant ϕ en Q , pour la probabilité de l'événement composé,

$$\frac{\int P' Q dz}{\int Q dz},$$

les intégrales étant prises ici depuis $z = -p$ jusqu'à $z = 1-p$; ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans le chapitre précédent.

CHAPITRE VIII.

Des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.

35. SUPPOSONS que l'on ait suivi sur un très-grand nombre n d'enfans, la loi de mortalité, depuis leur naissance jusqu'à leur extinction totale; on aura leur vie moyenne, en faisant une somme des durées de toutes leurs vies, et en la divisant par le nombre n . Si ce nombre était infini, on aurait exactement la durée de la vie moyenne. Cherchons la probabilité que la vie moyenne des n enfans, ne s'écartera de celle-ci, que dans des limites données.

Désignons par $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$, la probabilité de mourir à l'âge x , a étant la limite de x ; a et x étant supposés renfermer un nombre infini de parties prises pour l'unité. Considérons la puissance

$$\left\{ \varphi\left(\frac{0}{a}\right) + \varphi\left(\frac{1}{a}\right).c^{-\varpi\sqrt{-1}} + \varphi\left(\frac{2}{a}\right).c^{-2\varpi\sqrt{-1}} \dots + \varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-x\varpi\sqrt{-1}} \dots + \varphi\left(\frac{a}{a}\right).c^{-a\varpi\sqrt{-1}} \right\}^n,$$

il est visible que le coefficient de $c^{-(l+n\mu).\varpi\sqrt{-1}}$, dans le développement de cette puissance, est la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfans parviendront, sera $l+n\mu$; en multipliant donc par $c^{(l+n\mu).\varpi\sqrt{-1}}$ la puissance précédente, le terme indépendant des puissances de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le produit, sera cette probabilité qui par conséquent, est égale à

$$d\varpi.c'^{\varpi\sqrt{-1}}.\left\{c^{\mu\varpi\sqrt{-1}}.\left[\varphi\left(\frac{0}{a}\right) + \varphi\left(\frac{1}{a}\right).c^{-\varpi\sqrt{-1}} \dots + \varphi\left(\frac{x}{a}\right).c^{-x\varpi\sqrt{-1}} \dots + \varphi\left(\frac{a}{a}\right).c^{-a\varpi\sqrt{-1}}\right]\right\}^n, \quad (1)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$.

Si

Si l'on prend dans cette intégrale, le logarithme hyperbolique de la quantité sous le signe f , élevée à la puissance n , on aura, en développant les exponentielles en séries, ce logarithme égal à

$$n\mu \cdot \varpi \sqrt{-1} + n \cdot \log \left\{ f\phi\left(\frac{x}{a}\right) - \varpi \sqrt{-1} \cdot f x \cdot \phi\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\varpi^2}{2} \cdot f x^2 \cdot \phi\left(\frac{x}{a}\right) + \text{etc.} \right\}; \quad (2)$$

le signe f se rapportant ici à toutes les valeurs de x , depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. Si l'on fait $\frac{x}{a} = x'$, et si l'on observe que la variation de x étant l'unité, on a $a dx' = 1$; on aura

$$\begin{aligned} f\phi\left(\frac{x}{a}\right) &= a \cdot f dx' \cdot \phi(x'), \\ f x \cdot \phi\left(\frac{x}{a}\right) &= a^2 \cdot f x' dx' \cdot \phi(x'), \\ f x^2 \cdot \phi\left(\frac{x}{a}\right) &= a^3 \cdot f x'^2 dx' \cdot \phi(x'), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

les intégrales relatives à x' étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1$. Nommons $k, k', k'', \text{etc.}$ ces intégrales successives; la probabilité que la durée de la vie d'un enfant, sera comprise dans les limites zéro et a , est $f\phi\left(\frac{x}{a}\right)$ ou $a \cdot f dx' \cdot \phi(x')$; or cette probabilité est la certitude elle-même; on a donc $ak = 1$. Cela posé, la fonction (2) devient

$$n\mu \cdot \varpi \sqrt{-1} + n \cdot \log \left(1 - \frac{k'}{k} \cdot a \varpi \sqrt{-1} - \frac{k''}{k} \cdot \frac{a^2 \varpi^2}{2} + \text{etc.} \right),$$

ou

$$\left(\frac{n\mu}{a} - \frac{nk'}{k} \right) \cdot a \varpi \sqrt{-1} - n \cdot \frac{(kk'' - k'^2)}{2k^2} \cdot a^2 \varpi^2 - \text{etc.}$$

Si l'on fait

$$\mu = \frac{ak'}{k} = \frac{a^2 k'}{ak} = a^2 k',$$

la première puissance de ϖ disparaît; et de plus, n étant supposé un très-grand nombre, on peut s'arrêter à la seconde puissance de ϖ ; la fonction (1) devient ainsi, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{1}{2\pi} \cdot f d\varpi \cdot c \quad l\varpi \sqrt{-1} - n \cdot \frac{(kk'' - k'^2)}{2k^2} \cdot a^2 \varpi^2.$$

Si l'on fait

$$\ell^2 = \frac{k^2}{2(kk'' - k'^2)}, \quad t = \frac{a\pi \cdot \sqrt{n}}{2\ell} - \frac{\ell l \cdot \sqrt{-1}}{a \cdot \sqrt{n}},$$

cette intégrale devient, en la prenant depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$,

$$\frac{\ell}{a \cdot \sqrt{n\pi}} \cdot c^{-\frac{\ell^2 l^2}{a^2 n}}.$$

En la multipliant par dl , et faisant $l = ar \cdot \sqrt{n}$, on aura

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \ell dr \cdot c^{-\ell^2 r^2}$$

pour la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfans parviendront, sera comprise dans les limites $na^2 k' \pm ar \cdot \sqrt{n}$.

La quantité $a^2 k'$ ou $\int x \cdot \phi\left(\frac{x}{a}\right)$ est la somme des produits de chaque âge, par la probabilité d'y parvenir; elle est donc la vraie durée de la vie moyenne; ainsi la probabilité que la somme des âges auxquels les n enfans cesseront de vivre, divisée par leur nombre, est comprise dans ces limites

Vraie durée de la vie moyenne, plus ou moins $\frac{ar}{\sqrt{n}}$,

a pour expression

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \ell dr \cdot c^{-\ell^2 r^2}.$$

La valeur moyenne de r , en plus ou en moins, est par le n° 20,

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int \ell r dr \cdot c^{-\ell^2 r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à r infini. En la multipliant par $\frac{a}{\sqrt{n}}$, on aura l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, lorsqu'on prend pour durée moyenne de la vie, la somme des âges qu'ont vécu les n enfans considérés ci-dessus, divisée par n , quotient que nous désignerons par G ; cette erreur est

donc

$$\pm \frac{a}{2\epsilon \cdot \sqrt{n\pi}}.$$

On a à très-peu près ,

$$a^2 k' = G;$$

et comme $ak = 1$, on aura

$$\frac{k'}{k} = \frac{G}{a}.$$

Si l'on nomme ensuite H , la somme des carrés des âges qu'ont vécu les n enfans, divisée par n ; on trouvera, par l'analyse du n° 19,

$$\frac{k''}{k} \cdot a^2 = H;$$

ces valeurs donnent

$$\epsilon^2 = \frac{a^2}{2 \cdot (H - G^2)} :$$

l'erreur moyenne à craindre en plus ou en moins, sur la durée de la vie, devient ainsi

$$\pm \frac{\sqrt{H - G^2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Il est clair que ces résultats ont également lieu relativement à la durée moyenne de ce qui reste à vivre, lorsqu'au lieu de partir de l'époque de la naissance, on part d'une époque quelconque de la vie.

On peut facilement déterminer, au moyen des tables de mortalité, formées d'année en année, la durée moyenne de ce qui reste à vivre à une personne dont l'âge est d'un nombre entier A d'années. Pour cela, on ajoutera tous les nombres de la table qui suivent celui qui correspond à l'âge A ; on divisera la somme par ce dernier nombre, et l'on ajoutera $\frac{1}{2}$ au quotient. En effet, si l'on désigne par (1), (2), (3), etc., les nombres de la table, correspondans à l'année A et aux années suivantes; le nombre des individus qui meurent dans la première année, à partir de l'année A , sera (1) — (2); mais dans ce court intervalle, la mortalité peut être supposée constante; $\frac{1}{2} \cdot [(1) - (2)]$ est donc la somme des durées de leur vie, à partir de l'âge A . Pareillement $\frac{1}{2} \cdot [(2) - (3)]$, $\frac{5}{2} [(3) - (4)]$, etc. sont les sommes des durées de la vie, à partir

du même âge, de ceux qui meurent dans les seconde, troisième, etc. années comptées depuis l'année A . La réunion de toutes ces sommes est $\frac{(1)}{2} + (2) + (3) + (4) + \text{etc.}$; et en la divisant par (1), on aura la durée moyenne de ce qui reste à vivre à la personne de l'âge A . On formera ainsi une table des durées moyennes de ce qui reste à vivre aux différens âges. On pourra même conclure ces durées les unes des autres, en observant que si F désigne cette durée pour l'âge A , et F' la durée correspondante à l'âge $A + 1$, on a

$$F = \frac{(2)}{(1)} \cdot (F' + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}.$$

39. Déterminons maintenant la durée moyenne de la vie, qui aurait lieu, si l'une des causes de mortalité venait à s'éteindre. Soit U le nombre des enfans qui sur le nombre n de naissances, vivrait encore à l'âge x dans cette hypothèse; u étant celui des enfans vivans à cet âge sur le même nombre de naissances, dans le cas où cette cause de mortalité subsiste. Nommons $z \cdot \Delta x$, la probabilité qu'un individu de l'âge x , périra de cette maladie dans l'intervalle de tems très-court Δx ; $uz \cdot \Delta x$ sera à très-peu près par le n° 25, le nombre des individus u , qui périront de cette maladie dans l'intervalle de tems Δx , si ce nombre est considérable. Pareillement si l'on désigne par $\varphi \cdot \Delta x$ la probabilité qu'un individu de l'âge x périra par les autres causes de mortalité dans l'intervalle Δx ; $u\varphi \cdot \Delta x$ sera le nombre des individus qui périront par ces causes, dans l'intervalle de tems Δx , ce sera donc la valeur de $-\Delta u$; j'affecte Δu du signe $-$, parce que u diminue à mesure que x augmente; on a donc

$$-\Delta u = u \cdot \Delta x \cdot (\varphi + z).$$

On aura pareillement

$$-\Delta U = U \cdot \varphi \cdot \Delta x.$$

En éliminant φ de ces deux équations, on aura

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta u}{u} + z \cdot \Delta x.$$

Δx étant une quantité très-petite, on peut transformer la caractéristique Δ dans la caractéristique différentielle d , et alors l'équation précédente devient

$$\frac{dU}{U} = \frac{du}{u} + zdx;$$

d'où l'on tire en intégrant, et observant qu'à l'âge zéro, $U=u=n$,

$$U = u \cdot e^{\int z dx}; \quad (3)$$

l'intégrale étant prise depuis x nul. On peut obtenir cette intégrale, au moyen des registres de mortalité, dans lesquels on tient compte de l'âge des individus morts, et des causes de leur mort. En effet, $uz \cdot \Delta x$ étant par ce qui précède, le nombre de ceux qui, parvenus à l'âge x , ont péri dans l'intervalle de tems Δx , par la maladie dont il s'agit; on aura à très-peu près l'intégrale $\int z dx$, en supposant Δx égal à une année, et en prenant depuis la naissance des n enfans que l'on a considérés, jusqu'à l'année x , la somme des fractions qui ont pour numérateur le nombre des individus que la maladie a fait périr chaque année, et pour dénominateur, le nombre des n enfans qui vivent encore au milieu de la même année. Ainsi l'on pourra transformer au moyen de l'équation (3), une table de mortalité ordinaire, dans celle qui aurait lieu, si la maladie dont il s'agit, n'existait pas.

La petite vérole a cela de particulier, savoir, que le même individu n'en est jamais deux fois atteint, ou du moins ce cas est si rare, que s'il existe, on peut en faire abstraction. Concevons que sur un très-grand nombre n d'enfans, u parviennent à l'âge x , et que dans le nombre u , y n'aient point eu la petite vérole. Concevons encore que sur ce nombre y , $iy dx$ prennent cette maladie dans l'instant dx , et que sur ce nombre, $ir \cdot y dx$ périssent de cette maladie. En désignant, comme ci-dessus, par ϕ la probabilité de périr à l'âge x , par d'autres causes; on aura évidemment

$$du = -u\phi \cdot dx - ir \cdot y dx.$$

On aura ensuite

$$dy = -y\phi \cdot dx - iy dx.$$

En effet, y diminue par le nombre de ceux qui, dans l'instant dx ,

prennent la petite vérole, et ce nombre est par la supposition, $iydx$. y diminue encore par le nombre des individus compris dans y , qui périssent par d'autres causes, et ce nombre est $y\phi dx$.

Maintenant, si de la première des deux équations précédentes, multipliée par y , on retranche la seconde multipliée par u , et si l'on divise la différence par y^2 , on aura

$$d \cdot \frac{u}{y} = i \cdot \frac{u}{y} \cdot dx - ir dx;$$

ce qui donne, en intégrant depuis x nul, et observant qu'à cette origine, $u = y = n$,

$$\frac{u}{y} = (1 - \int ir dx \cdot c^{-\int id x}) \cdot c^{\int id x}; \quad (4)$$

cette équation fera connaître le nombre d'individus de l'âge x , qui n'ont point encore eu la petite vérole. On a ensuite

$$z dx = \frac{ir \cdot y dx}{u},$$

$z dx$ étant, comme ci-dessus, ceux qui périssent dans le tems dx , de la maladie que l'on considère. En substituant au lieu de $\frac{y}{u}$, sa valeur précédente; on aura, après avoir intégré,

$$c^{\int z dx} = \frac{1}{1 - \int ir dx \cdot c^{-\int id x}};$$

L'équation (3) donnera donc

$$U = \frac{u}{1 - \int ir dx \cdot c^{-\int id x}}. \quad (5)$$

Cette valeur de U suppose que l'on connaît par l'observation i et r . Si ces nombres étaient constans, il serait facile de les déterminer; mais comme ils peuvent varier d'âge en âge, les élémens de la formale (5) sont plus aisés à connaître, et cette formule me semble plus propre à déterminer la loi de mortalité qui aurait lieu, si la petite vérole était éteinte. En lui appliquant les données que l'on a pu se procurer sur la mortalité causée par cette maladie, aux

divers âges de la vie ; on trouve que son extinction au moyen de la vaccine , augmenterait de plus de trois années , la durée de la vie moyenne , si d'ailleurs cette durée n'était point restreinte par la diminution relative des subsistances , due à un plus grand accroissement de population.

37. Considérons présentement la durée moyenne des mariages. Pour cela concevons un grand nombre n de mariages entre n garçons de l'âge a , et n filles de l'âge a' ; et déterminons le nombre de ces mariages subsistans après x années écoulées depuis leur origine. Nommons ϕ la probabilité qu'un garçon qui se marie à l'âge a , parviendra à l'âge $a+x$; et ψ la probabilité qu'une fille qui se marie à l'âge a' , parviendra à l'âge $a'+x$. La probabilité que leur mariage subsistera après sa $x^{\text{ième}}$ année , sera $\phi\psi$; donc si l'on développe le binome $(\phi\psi + 1 - \phi\psi)^n$, le terme $H.(\phi\psi)^i.(1-\phi\psi)^{n-i}$ de ce développement , exprimera la probabilité que sur les n mariages , i subsisteront après x années. Le plus grand terme du développement est , par le n° 16 , celui dans lequel i est égal au plus grand nombre entier contenu dans $\overline{n+1}.\phi\psi$; et par le même numéro , il est extrêmement probable que le nombre des mariages subsistans ne s'écartera que très-peu en plus ou en moins de ce nombre. Ainsi , en désignant par i , le nombre des mariages subsistans ; on pourra supposer à très-peu près ,

$$i = n.\phi\psi.$$

$n\phi$ est à fort peu près le nombre des n maris vivans à l'âge $a+x$. Les tables de mortalité le feront connaître d'une manière fort approchée , si elles ont été formées sur des listes nombreuses de mortalité ; car si l'on désigne par p' le nombre des hommes vivans à l'âge a , sur l'ensemble de ces listes , et par q' le nombre des survivans à l'âge $a+x$; on aura à fort peu près , par le n° 29 ,

$$n.\phi = \frac{n.q'}{p'}.$$

Si l'on nomme pareillement p'' le nombre des femmes vivantes à l'âge a' , et par q'' le nombre des survivantes à l'âge $a'+x$; on

aura à très-peu près,

$$n \cdot \psi = \frac{n \cdot q''}{p''};$$

donc

$$i = \frac{n \cdot q' q''}{p' p''};$$

On formera ainsi d'année en année, une table des valeurs de i . En faisant ensuite une somme de tous les nombres de cette table, et en la divisant par n ; on aura la durée moyenne des mariages faits à l'âge a pour les garçons, et à l'âge a' pour les filles.

Cherchons maintenant la probabilité que l'erreur de la valeur précédente de i , sera comprise dans des limites données. Supposons pour simplifier le calcul, que les deux conjoints soient du même âge, et que la probabilité de la vie des hommes soit la même que celle des femmes; alors on a

$$a' = a, \quad q'' = q', \quad p'' = p', \quad \phi = \psi;$$

et l'expression précédente de i devient

$$i = \frac{n \cdot q'^2}{p'^2}.$$

Concevons que la valeur de i soit $\frac{n \cdot q'^2}{p'^2} + s$; s sera l'erreur de cette expression de i . On a vu dans le n° 50, que si l'on a observé que sur un très-grand nombre p d'individus de l'âge a , q sont parvenus à l'âge $a + x$; la probabilité que sur p' autres individus de l'âge a , $\frac{p'q}{p} + z$ parviendront à l'âge $a + x$, est

$$\sqrt{\frac{p^3}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')} \pi} \cdot e^{-\frac{p^3 \cdot z^2}{2qp' \cdot (p-q) \cdot (p+p')}}.$$

Si l'on suppose p et q infinis, on aura évidemment

$$\phi = \frac{q}{p},$$

et si l'on fait

$$\frac{p'q}{p} + z = q';$$

on

on aura

$$\phi = \frac{q'}{p'} - \frac{z}{p'};$$

ce qui donne à très-peu près, en négligeant le carré $\frac{n \cdot z^2}{p'^2}$,

$$n\phi^2 = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2};$$

ainsi la probabilité précédente de z , est en même tems la probabilité de cette expression de $n\phi^2$. Supposons maintenant $i = n\phi^2 + l$; en considérant le binôme $(\phi^2 + 1 - \phi^2)^n$, la probabilité de cette expression de i est par le n° 16,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2n\phi^2 \cdot (1 - \phi^2)}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2n\phi^2 \cdot (1 - \phi^2)}}.$$

Mais la valeur précédente de i devient, en y substituant pour $n\phi^2$ sa valeur,

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l;$$

la probabilité de cette dernière expression de i est égale au produit de celles de i et de z , trouvées ci-dessus; elle est donc égale à

$$\frac{\frac{z^2}{2p' \cdot \phi(1 - \phi)} - \frac{l^2}{2n\phi^2 \cdot (1 - \phi^2)}}{2\pi \cdot \sqrt{np' \cdot \phi^3 \cdot (1 - \phi)^2 \cdot (1 + \phi)}}.$$

Ayant supposé précédemment $i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s$, on aura $s = l - \frac{2nq'z}{p'^2}$; en substituant donc pour l sa valeur tirée de cette équation, et observant que l'on a à très-peu près $\frac{q'}{p'} = \phi$; on aura pour la probabilité que la valeur de s sera comprise dans des limites données, l'expression intégrale

$$\frac{\int \int dz \cdot ds \cdot e^{-\frac{z^2}{2\phi(1 - \phi) \cdot p'} - \frac{(s + \frac{2nq'z}{p'^2})^2}{2n\phi^2 \cdot (1 - \phi^2)}}}{2\pi \cdot \sqrt{np' \cdot \phi^3 \cdot (1 - \phi)^2 \cdot (1 + \phi)}},$$

l'intégrale relative à z pouvant être prise depuis $z = -\infty$ jusqu'à

$z = \infty$. De là il est facile de conclure par les méthodes exposées précédemment, que si l'on fait

$$k^2 = \frac{p'}{2n\phi^2 \cdot (1-\phi) \cdot [p' + (p' + 4n)\phi]} ;$$

l'intégrale précédente devient

$$\int \frac{kds}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2 s^2} ;$$

ainsi la probabilité que l'erreur de l'expression $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ sera $\pm s$, est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int kds \cdot e^{-k^2 s^2},$$

l'intégrale étant prise depuis s nul.

L'analyse précédente s'applique également à la durée moyenne d'un grand nombre d'associations formées de trois individus, ou de quatre individus, etc. Soit n ce nombre, et supposons que tous les associés soient du même âge a au moment de l'association; désignons par p le nombre des individus de la table de mortalité, de l'âge a , et par q le nombre des individus de l'âge $a+x$; le nombre i des associations existantes après x années écoulées depuis l'origine des associations, sera à fort peu près

$$i = \frac{n \cdot q^r}{p^r},$$

r étant le nombre des individus de chaque association. On trouvera par la même analyse, la probabilité que ce nombre sera renfermé dans des limites données. La somme des valeurs de i correspondantes à toutes les valeurs de x , divisée par n , sera la durée moyenne de ce genre d'associations.

CHAPITRE IX.

Des bénéfices dépendans de la probabilité des événemens futurs.

38. CONCEVONS que l'arrivée d'un événement procure le bénéfice ν , et que sa non-arrivée cause la perte μ . Une personne A attend l'arrivée d'un nombre s d'événemens semblables, tous également probables, mais indépendans les uns des autres; on demande quel est son avantage.

Soit q la probabilité de l'arrivée de chaque événement, et par conséquent $1 - q$ celle de sa non-arrivée; si l'on développe le binome $(q + 1 - q)^s$, le terme

$$\frac{1.2.3\dots s}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots(s-i)} \cdot q^i \cdot (1-q)^{s-i}$$

de ce développement, sera la probabilité que sur les s événemens, i arriveront. Dans ce cas, le bénéfice de A est $i\nu$, et sa perte est $(s-i)\mu$; la différence est $i(\nu + \mu) - s\mu$; en la multipliant par sa probabilité exprimée par le terme précédent, et prenant la somme de ces produits pour toutes les valeurs de i , on aura l'avantage de A , qui par conséquent est égal à

$$-s\mu \cdot (q + 1 - q)^s + (\nu + \mu) \cdot S \cdot \frac{i.1.2.3\dots s}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots s-i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{s-i},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i . On a

$$\begin{aligned} & S \cdot \frac{i.1.2.3\dots s}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots s-i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{s-i} \\ &= \frac{d}{dt} \cdot S \cdot \frac{1.2.3\dots s}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots s-i} \cdot q^i \cdot t^i \cdot (1-q)^{s-i} = \frac{d}{dt} \cdot (qt + 1 - q)^s, \end{aligned}$$

pourvu que l'on suppose $t = 1$, après la différentiation, ce qui réduit ce dernier membre à qs ; l'avantage de $\mathcal{A}$ est donc $s.(qv - 1 - q.\mu)$. Cet avantage est nul, si $qv = \mu.(1 - q)$; c'est-à-dire, si le bénéfice de l'arrivée de l'événement, multiplié par sa probabilité, est égal à la perte causée par sa non-arrivée, multipliée par sa probabilité. L'avantage devient négatif, et se change en désavantage, si le second produit surpasse le premier. Dans tous les cas, l'avantage ou le désavantage de $\mathcal{A}$ est proportionnel au nombre s des événemens.

On déterminera par l'analyse du n° 16, la probabilité que le bénéfice réel de $\mathcal{A}$ sera compris dans des limites données, si s est un grand nombre. Suivant cette analyse, la somme des divers termes du binôme $(q + 1 - q)^l$ compris entre les deux termes distans de $l + 1$, de part d'autre du plus grand, est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{f dt \cdot c^{-t^2}}{\sqrt{2s\pi q \cdot (1-q)}} + \frac{1}{\sqrt{2s\pi q \cdot (1-q)}} \cdot c^{-\frac{l^2}{2sq \cdot (1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{l}{\sqrt{2sq \cdot (1-q)}}$. L'exposant de q dans le plus grand terme, est à très-peu près par le même numéro, égal à sq ; et les exposans de q , correspondans aux termes extrêmes compris dans l'intervalle précédent, sont respectivement $sq - l$ et $sq + l$. Les bénéfices correspondans à ces trois termes sont

$$\begin{aligned} & s.(qv - 1 - q.\mu) - l(v + \mu), \\ & s.(qv - 1 - q.\mu), \\ & s.(qv - 1 - q.\mu) + l(v + \mu); \end{aligned}$$

en faisant donc $l = r.\sqrt{s}$, la probabilité que le bénéfice réel de $\mathcal{A}$ n'excédera pas les limites $s.(qv - 1 - q.\mu) \pm r.\sqrt{s} \cdot (v + \mu)$, est égal à

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{f dr \cdot c^{-\frac{r^2}{2q \cdot (1-q)}}}{\sqrt{2q \cdot (1-q)}} + \frac{1}{\sqrt{2s\pi q \cdot (1-q)}} \cdot c^{-\frac{r^2}{2q \cdot (1-q)}},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$, et le dernier terme pouvant être négligé. On voit par cette formule que si $qv - 1 - q.\mu$ n'est pas

nul, le bénéfice réel augmente sans cesse, et devient infiniment grand et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événemens.

On peut étendre par l'analyse suivante, ce résultat, au cas où les probabilités des s événemens sont différentes, ainsi que les bénéfices et les pertes qui y sont attachés. Soient $q, q^{(1)}, q^{(2)} \dots q^{(s-1)}$ les probabilités respectives de ces événemens; $\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)} \dots \nu^{(s-1)}$ les bénéfices que procurent leurs arrivées. On peut, pour simplifier, faire abstraction des pertes que causent leurs non-arrivées, en comprenant dans le bénéfice que procure l'arrivée de chaque événement, la quantité que $\mathcal{A}$ perdrait par sa non-arrivée, et en retranchant ensuite de l'avantage total de $\mathcal{A}$, la somme de ces dernières quantités; car il est facile de voir que cela ne change point la position de $\mathcal{A}$.

Cela posé, considérons le produit

$$(1-q+q \cdot c^{\nu \varpi} V^{-1}) \cdot (1-q^{(1)}+q^{(1)} \cdot c^{\nu^{(1)} \varpi} V^{-1}) \cdot \dots \\ \dots (1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)} \cdot c^{\nu^{(s-1)} \varpi} V^{-1}).$$

Il est clair que la probabilité que la somme des bénéfices sera $f+l'$, est égal au coefficient de $c^{(f+l') \varpi} V^{-1}$ dans le développement de ce produit; elle est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi} \cdot f d\varpi \cdot c^{-(f+l') \varpi} V^{-1} \cdot (1-q+q \cdot c^{\nu \varpi} V^{-1}) \cdot \dots \\ \dots (1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)} \cdot c^{\nu^{(s-1)} \varpi} V^{-1}), \quad (a)$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, et les nombres $\nu, \nu^{(1)}$, etc. étant supposés, comme on peut le faire, des nombres entiers. Prenons le logarithme du produit

$$c^{-f \varpi} V^{-1} \cdot (1-q+q \cdot c^{\nu \varpi} V^{-1}) \cdot \dots (1-q^{(s-1)}+q^{(s-1)} \cdot c^{\nu^{(s-1)} \varpi} V^{-1}); \quad (b)$$

en le développant suivant les puissances de ϖ , il devient

$$(S \cdot q^{(i), (i)} - f) \cdot \varpi \cdot V^{-1} - \frac{\varpi^2}{2} \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot \nu^{(i)2} - \text{etc.},$$

le signe S se rapportant à toutes les valeurs de i , depuis $i = 0$ jusqu'à $i = s-1$. La supposition de f égal à $S \cdot q^{(i), (i)}$ fait dispa-

raître la première puissance de ϖ ; et la considération de s , un très-grand nombre, rend insensibles les termes dépendans des puissances de ϖ , supérieures au carré; en repassant donc des logarithmes aux nombres dans le développement précédent, le produit (b) devient à très-peu près,

$$c \frac{\varpi^2}{2} \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2};$$

ce qui change l'intégrale (a) dans celle-ci,

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int d\varpi \cdot c \left(-l' \varpi \sqrt{-1} - \frac{\varpi^2}{2} \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2} \right).$$

L'intégrale devant être prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, et $S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}$ étant un grand nombre de l'ordre s ; il est clair que cette intégrale peut être étendue sans erreur sensible, jusqu'aux valeurs infinies positives et négatives de ϖ . En faisant donc

$$\varpi \cdot \sqrt{\frac{S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}}{2}} + \frac{l' \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{2 \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}}} = t,$$

et intégrant depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$, l'intégrale (a) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}}} \cdot c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l'^2}{2 \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}} dt.$$

Si l'on multiplie cette quantité par $2dl'$, et qu'ensuite on l'intègre depuis $l' = 0$, cette intégrale sera l'expression de la probabilité que le bénéfice de $\mathcal{A}$ sera compris dans les limites $f \pm l'$, ou $S \cdot q^{(i)} \cdot v^{(i)} \pm l'$; en faisant ainsi

$$l' = r \cdot \sqrt{2 \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}}$$

la probabilité que le bénéfice de $\mathcal{A}$ sera compris dans les limites

$$S \cdot q^{(i)} \cdot v^{(i)} \pm r \cdot \sqrt{2 \cdot S \cdot q^{(i)} \cdot (1-q^{(i)}) \cdot v^{(i)2}},$$

est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dr \cdot c^{-r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$.

Maintenant il faut, par ce qui précède, changer dans les limites précédentes, $\nu^{(i)}$ dans $\nu^{(i)} + \mu^{(i)}$, et en retrancher $S \cdot \mu^{(i)}$; la probabilité que le bénéfice réel de $\mathcal{A}$ sera compris dans les limites

$$S \cdot (q^{(i)} \nu^{(i)} - (1 - q^{(i)}) \cdot \mu^{(i)}) \pm r \cdot \sqrt{2S \cdot q^{(i)} \cdot (1 - q^{(i)}) \cdot (\nu^{(i)} + \mu^{(i)})^2},$$

est donc

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dr \cdot e^{-r^2}.$$

On voit par cette formule, que pour peu que l'espérance mathématique de chaque événement, surpasse zéro; en multipliant les événements à l'infini, le premier terme de l'expression des limites étant de l'ordre s , tandis que le second n'est que de l'ordre $\sqrt{s}$, le bénéfice réel s'accroît sans cesse, et devient à la fois infiniment grand et certain, dans le cas d'un nombre infini d'événemens.

39. Considérons maintenant le cas où, à chaque événement, la personne $\mathcal{A}$ a un nombre quelconque de chances à espérer ou à craindre. Supposons, par exemple, qu'une urne renferme des boules de diverses couleurs; que l'on tire une boule de cette urne, en la remettant dans l'urne après le tirage, et que le bénéfice de $\mathcal{A}$ soit ν , si la boule extraite est de la première couleur; qu'il soit ν' , si la boule extraite est de la seconde couleur; qu'il soit ν'' , si la boule extraite est de la troisième couleur, et ainsi de suite; les bénéfices devenant négatifs, lorsque $\mathcal{A}$ est forcé de donner au lieu de recevoir. Nommons $a, a', a'',$ etc. les probabilités que la boule extraite à chaque tirage, sera de la première, ou de la seconde, ou de la troisième, etc. couleur, et supposons que l'on ait ainsi s tirages; on aura d'abord

$$a + a' + a'' + \text{etc.} = 1.$$

En multipliant ensuite les termes du premier membre de cette équation, respectivement par $c^{\nu \sqrt{-1}}, c^{\nu' \sqrt{-1}}, c^{\nu'' \sqrt{-1}},$ etc., le terme indépendant des puissances de $c^{\sqrt{-1}}$, dans le développement de la fonction

$$c^{-(l+s\mu) \cdot \sqrt{-1}} \cdot [a \cdot c^{\nu \sqrt{-1}} + a' \cdot c^{\nu' \sqrt{-1}} + a'' \cdot c^{\nu'' \sqrt{-1}} + \text{etc.}]^s,$$

sera, par ce qui précède, la probabilité que dans s tirages, le bénéfice de $\mathcal{A}$ sera $s\mu + l$; cette probabilité est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int d\varpi \cdot c^{-l\varpi \sqrt{-1}} \cdot [c^{-\mu\varpi \sqrt{-1}} \cdot (a \cdot c^{\nu\varpi \sqrt{-1}} + a' \cdot c^{\nu'\varpi \sqrt{-1}} + \text{etc.})]; \quad (c)$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$. Si l'on développe par rapport aux puissances de ϖ , le logarithme hyperbolique de la quantité élevée à la puissance s , sous le signe $\int$, et si l'on observe que $a + a' + a'' + \text{etc.} = 1$, on aura pour ce logarithme,

$$\begin{aligned} & \varpi \cdot \sqrt{-1} \cdot [a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.} - \mu] \\ & - \frac{\varpi^2}{2} \cdot \left[-\frac{a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \text{etc.}}{(a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.})^2} \right] - \text{etc.} \end{aligned}$$

On fera disparaître la première puissance de ϖ , en faisant

$$\mu = a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.};$$

Si l'on suppose ensuite

$$2k^2 = a\nu^2 + a'\nu'^2 + a''\nu''^2 + \text{etc.} - (a\nu + a'\nu' + a''\nu'' + \text{etc.})^2,$$

et si l'on observe que s étant supposé un grand nombre, on peut négliger les puissances de ϖ supérieures au carré; on aura, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$[c^{-\mu\varpi \sqrt{-1}} \cdot (a \cdot c^{\nu\varpi \sqrt{-1}} + a' \cdot c^{\nu'\varpi \sqrt{-1}} + a'' \cdot c^{\nu''\varpi \sqrt{-1}} + \text{etc.})] = c^{-sk^2 \varpi^2};$$

ce qui change l'intégrale (c) dans celle-ci,

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int d\varpi \cdot c^{-l\varpi \sqrt{-1} - sk^2 \varpi^2},$$

qui devient en intégrant comme dans le numéro précédent,

$$\frac{1}{2k \cdot \sqrt{s\pi}} \cdot c^{-\frac{l^2}{4sk^2}}.$$

En la multipliant par $2dl$, et intégrant le produit depuis $l=0$, on aura la probabilité que le bénéfice réel de $\mathcal{A}$, sera compris dans
les

les limites

$$s.(av + a'v' + a''v'' + \text{etc.}) \pm l;$$

en faisant donc

$$l = 2kr' \cdot \sqrt{s},$$

cette probabilité sera, en prenant l'intégrale depuis $r' = 0$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dr' \cdot e^{-r'^2}.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède, les probabilités des événemens, connues; examinons le cas où elles sont inconnues. Supposons que sur m événemens semblables attendus, n soient arrivés, et que A attende s pareils événemens dont chacun lui procure par son arrivée, le bénéfice ν , la non-arrivée lui causant la perte μ . Si l'on représente par $\frac{n}{m} \cdot s + z$, le nombre d'événemens qui arriveront sur les s événemens attendus, la probabilité que z sera contenu dans les limites $\pm kt$, sera par le n° 30,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dt \cdot e^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$; k étant égal à

$$\frac{2ns \cdot (m - n) \cdot (m + s)}{m^3}.$$

Mais $\frac{n}{m} \cdot s + z$ étant le nombre des événemens arrivés, le bénéfice réel de A est

$$\left(\frac{n\nu}{m} - \frac{(m - n) \cdot \mu}{m} \right) \cdot s + z \cdot (\nu + \mu);$$

l'intégrale précédente est donc la probabilité que le bénéfice réel de A sera compris dans les limites

$$\left(\frac{n\nu}{m} - \frac{(m - n) \cdot \mu}{m} \right) \cdot s \pm kt \cdot (\nu + \mu).$$

k est de l'ordre $\sqrt{s}$, si m et n sont d'un ordre égal ou plus grand que s ; ainsi quelque petite que soit l'espérance mathématique, relative à chaque événement, le bénéfice réel devient à l'infini, certain et infiniment grand, lorsque le nombre des événemens passés, est supposé infini, comme celui des événemens futurs.

40. Nous allons maintenant déterminer les bénéfices des établissemens fondés sur les probabilités de la vie humaine. La manière la plus simple de calculer ces bénéfices, est de les réduire en capitaux actuels. Prenons pour exemple, les rentes viagères. Une personne de l'âge A veut constituer sur sa tête, une rente viagère h ; on demande le capital qu'elle doit pour cela, donner à la caisse de l'établissement qui lui fait cette rente.

Si l'on nomme y_0 le nombre des individus de l'âge A , dans la table de mortalité dont on fait usage, et y_x le nombre des individus de l'âge $A + x$; la probabilité de payer la rente à la fin de l'année $A + x$, sera $\frac{y_x}{y_0}$; par conséquent, la valeur du paiement sera $\frac{h \cdot y_x}{y_0}$. Mais si l'on désigne par r l'intérêt annuel de l'unité, ensorte que le capital 1 devienne $1 + r$ après un an; il deviendra $(1 + r)^x$ après x années; ainsi le paiement $(1 + r)^x$ fait à la fin de la $x^{\text{ième}}$ année, réduit en capital actuel, devient l'unité, ou ce même paiement divisé par $(1 + r)^x$; le paiement $\frac{h \cdot y_x}{y_0}$ réduit en capital actuel, est donc $\frac{h \cdot y_x}{y_0 \cdot (1 + r)^x}$. La somme de tous les paiemens faits pendant la durée de la vie de la personne qui constitue la rente, et multipliés par leur probabilité, équivaut donc à un capital actuel représenté par l'intégrale finie

$$\Sigma \cdot \frac{h \cdot y_x}{y_0 \cdot (1 + r)^x},$$

la caractéristique Σ devant embrasser toutes les valeurs de la fonction qu'elle affecte.

On peut déterminer cette intégrale en formant toutes ces valeurs d'après la table de mortalité, et en les ajoutant ensemble: on déduira ensuite les capitaux les uns des autres, en observant que si l'on nomme F le capital relatif à l'âge A , et F' le capital relatif à l'âge $A + 1$, on a

$$F = \frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{F' + h}{1 + r}.$$

Mais ce procédé se simplifie, lorsque la loi de mortalité est connue, et surtout lorsqu'elle est donnée par une fonction rationnelle et entière de x , ce qui est toujours possible, en considérant les

nombres de la table de mortalité, comme des ordonnées dont les âges correspondans sont les abscisses, et en faisant passer une courbe parabolique par les extrémités des deux ordonnées extrêmes, et de plusieurs ordonnées intermédiaires. Les différences qui existent entre les diverses tables de mortalité, permettent de regarder ce moyen, comme aussi exact que ces tables, et même de s'en tenir à un petit nombre d'ordonnées.

Faisons

$$\frac{1}{1+p} = p, \quad \frac{y_x}{y_0} = u;$$

reprenons la formule (16) du n° 11 du premier Livre, qui donne

$$\Sigma . p^x u = - \frac{p^x}{p \cdot c \frac{du}{dx} - 1} + f,$$

f étant une constante arbitraire. Il faut dans le développement du premier terme du second membre de cette équation, par rapport aux puissances de $\frac{du}{dx}$, changer une puissance quelconque $\left(\frac{du}{dx}\right)^i$ dans $\frac{d^i u}{dx^i}$, et multiplier par u , le premier terme qui est indépendant de $\frac{du}{dx}$. On a ainsi

$$\Sigma . p^x u = f - \frac{p^x \cdot u}{1-p} - \frac{p^{x+1} \cdot \frac{du}{dx}}{(1-p)^2} - \frac{(p+1) \cdot p^{x+1}}{1 \cdot 2 \cdot (1-p)^3} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \text{etc.}$$

Pour déterminer f , on observera que l'intégrale $\Sigma . p^x u$ est nulle, lorsque $x=1$, et qu'elle se termine, lorsque $x=n+1$, $A+n$ étant la limite de la vie; car alors elle embrasse les termes correspondans à tous les nombres 1, 2, 3, ..., n . Désignons donc par (u) , $\left(\frac{du}{dx}\right)$, etc.; u' , $\left(\frac{du'}{dx}\right)$, etc., les valeurs de u , $\frac{du}{dx}$, etc. correspondantes à $x=1$, et à $x=n+1$; on aura

$$\Sigma . \frac{h p^x \cdot y_x}{y_0} = h \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{p}{1-p} \cdot [(u) - p^n \cdot (u')] \\ & + \frac{p^2}{(1-p)^2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx}\right) - p^n \cdot \left(\frac{du'}{dx}\right) \right] \\ & + \frac{(p+1) \cdot p^3}{1 \cdot 2 \cdot (1-p)^3} \cdot \left[\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) - p^n \cdot \left(\frac{d^2 u'}{dx^2}\right) \right] \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\}. \quad (o)$$

Si u ou $\frac{y_x}{y_0}$ est constant et égal à l'unité, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$; alors la rente viagère doit être payée certainement pendant le nombre n d'années, et elle devient une annuité. Dans ce cas, $\frac{du}{dx}$ est nul, et la formule précédente donne $\frac{hp \cdot (1-p^n)}{1-p}$ pour le capital équivalent à l'annuité h .

Si $u = 1 - \frac{x}{n}$; alors la probabilité de la vie décroît en progression arithmétique, et la formule précédente donne

$$\frac{hp}{1-p} \cdot \left(1 - \frac{1-p^n}{n \cdot (1-p)}\right)$$

pour le capital équivalent à la rente viagère h , et ainsi de suite.

Supposons maintenant que l'on veuille constituer une rente viagère h , sur plusieurs individus des âges A , $A+a$, $A+a+a'$, etc., de sorte que la rente reste au survivant. Désignons par y_x , y_{x+a} , $y_{x+a+a'}$, etc., les nombres de la table de mortalité, correspondans aux âges A , $A+a$, $A+a+a'$, etc.; la probabilité qu'à le premier individu, de vivre à l'âge $A+x$, étant $\frac{y_x}{y_0}$; la probabilité qu'à cet âge, il aura cessé de vivre, est $1 - \frac{y_x}{y_0}$. Pareillement, la probabilité qu'à le second individu, de vivre à l'âge $A+a+x$, ou à la fin de la x^{ieme} année de la constitution de la rente, étant $\frac{y_{x+a}}{y_a}$; la probabilité qu'il aura cessé de vivre alors, est $1 - \frac{y_{x+a}}{y_a}$; la probabilité que le troisième individu aura cessé de vivre, à la même époque de la constitution de la rente, est $1 - \frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}$, et ainsi de suite. La probabilité qu'aucun de ces individus n'existera à cette époque, est donc

$$\left(1 - \frac{y_x}{y_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{y_{x+a}}{y_a}\right) \cdot \left(1 - \frac{y_{x+a+a'}}{y_{a+a'}}\right) \cdot \text{etc.}$$

En retranchant ce produit, de l'unité; la différence sera la probabilité qu'un de ces individus au moins, sera vivant à la fin de la x^{ieme} année de la constitution de la rente. Nommons u cette probabilité; $\Sigma \cdot hp^x u$ sera le capital actuel équivalent à la rente viagère h .

Mais on doit observer en prenant cette intégrale, que les quantités y_x, y_{x+a} , etc. sont nulles, lorsque leurs indices $x, x+a$, etc. surpassent le nombre n , $A+n$ étant la limite de la vie.

Si y_x est une fonction rationnelle et entière de x , et d'exponentielles, telles que q^x, r^x , etc.; on aura facilement, par les formules du premier Livre, l'intégrale $h \cdot \Sigma. p^x u$. Mais on peut dans tous les cas, former au moyen d'une table de mortalité, tous les termes de cette intégrale, en prendre la somme, et construire ainsi des tables de rentes viagères, sur une ou plusieurs têtes.

L'analyse précédente sert pareillement à déterminer la rente viagère que l'on doit faire à un établissement, pour assurer à ses héritiers un capital après sa mort. Le capital équivalent à la rente viagère h , faite à une personne de l'âge A , est par ce qui précède, $h \cdot S \cdot \frac{p^x \cdot y_x}{y_0}$, le signe S comprenant tous les termes inclusivement, depuis $x=1$ jusqu'à la limite de la vie de la personne. Nommons hq cette intégrale, et imaginons que l'établissement reçoive de cette personne la rente h , et lui donne en échange, le capital hq . Concevons ensuite que la même personne place ce capital à intérêt perpétuel sur l'établissement lui-même; l'intérêt annuel de l'unité étant r ou $\frac{1-p}{p}$. Il est clair que l'établissement doit rendre le capital hq , aux héritiers de la personne. Mais elle a fait pendant sa vie, la rente h à l'établissement, et elle en a reçu la rente $\frac{hq \cdot (1-p)}{p}$; la rente qu'elle a faite réellement est donc $h \cdot \left[1 - \frac{q \cdot (1-p)}{p} \right]$; c'est donc ce qu'elle doit donner annuellement à l'établissement, pour assurer à ses héritiers le capital hq .

Je n'insisterai pas davantage sur ces objets, ainsi que sur ceux qui sont relatifs aux établissemens d'assurance de tout genre, parce qu'ils ne présentent aucunes difficultés. J'observerai seulement que tous ces établissemens doivent, pour prospérer, se réserver un bénéfice, et multiplier considérablement leurs affaires; afin que leur bénéfice réel devenant presque certain, ils soient exposés le moins qu'il est possible, à de grandes pertes qui pourraient les décuire. En effet, si le nombre des affaires est s , et si l'avantage de

l'établissement dans chacune d'elles, est b ; alors il devient extrêmement probable que le bénéfice réel de l'établissement sera sb , s étant supposé un très-grand nombre.

Pour le faire voir, supposons que s personnes de l'âge A constituent, chacune sur sa tête, une rente viagère h ; et considérons une de ces personnes que nous désignerons par C . Si C meurt dans l'intervalle de la fin de l'année x écoulée depuis la constitution de sa rente, à la fin de l'année $x+1$; l'établissement lui aura payé la rente h pendant x années, et la somme de ces paiemens, réduite en capital actuel, sera $h.(p+p^x \dots + p^x)$ ou $\Sigma.hp^{x+1}$; or la probabilité que C mourra dans cet intervalle, est $\frac{y_x - y_{x+1}}{y_0}$, ou $-\frac{\Delta.y_x}{y_0}$; la valeur de la perte que l'établissement doit alors supporter, est donc $-\frac{\Delta.y_x}{y_0} \cdot \Sigma.hp^{x+1}$. La somme de toutes ces pertes est

$$-\Sigma.\left(\frac{\Delta.y_x}{y_0} \cdot \Sigma.hp^{x+1}\right); \quad (r)$$

c'est le capital que C doit verser à la caisse de l'établissement, pour en recevoir la rente viagère h . On peut observer ici que l'on a

$$-\Delta.y_x \cdot \Sigma.p^{x+1} = -y_{x+1} \cdot \Sigma.p^{x+1} + y_x \cdot \Sigma.p^x + y_x \cdot p^x;$$

en intégrant le second membre de cette équation, la fonction (r) se réduit à

$$-\frac{y_x}{y_0} \cdot \Sigma.hp^x + \frac{\Sigma.hy_x.p^x}{y_0} + \text{constante};$$

or $\Sigma.p^x$ se réduit à zéro, lorsque $x=0$; et lorsque $x=n+1$, y_x est nul par ce qui précède; la fonction (r) , ou le capital que C doit payer à l'établissement, est donc $\frac{\Sigma.hy_x.p^x}{y_0}$; ce qui est conforme à ce qui précède. Mais sous la forme de la fonction (r) , on peut appliquer au bénéfice de l'établissement, l'analyse du n° 39. En effet, on a dans ce cas, par le numéro cité,

$$av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} = -\Sigma.\left(\frac{\Delta.y_x}{y_0} \cdot \Sigma.hp^{x+1}\right);$$

ensuite a , a' , etc. étant les valeurs successives de $-\frac{\Delta.y_x}{y_0}$, on

aura

$$av^s + a'v'^s + \text{etc.} = \Sigma \left[-\frac{\Delta \cdot y_x}{y_0} \cdot (\Sigma \cdot hp^{x+1})^s \right],$$

ensorte que

$$2k^s = \Sigma \left[-\frac{\Delta \cdot y_x}{y_0} \cdot (\Sigma \cdot hp^{x+1})^s \right] - \left[\Sigma \left(\frac{\Delta \cdot y_x}{y_0} \cdot \Sigma \cdot hp^{x+1} \right)^s \right].$$

En supposant que chacune des s personnes qui constitue la rente h sur sa tête, verse à la caisse de l'établissement, outre le capital correspondant à cette rente, une somme b , pour subvenir aux frais de l'établissement ; on aura par le n° 39,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int dr' \cdot e^{-r'^2},$$

pour la probabilité que le bénéfice réel de l'établissement sera compris dans les limites

$$sb \pm 2kr' \cdot \sqrt{s}.$$

Ainsi dans le cas d'un nombre infini d'affaires, le bénéfice réel de l'établissement, devient certain et infini. Mais alors ceux qui traitent avec lui, ont un désavantage mathématique qui doit être compensé par un avantage moral, dont l'appréciation va être l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE X.

De l'espérance morale.

41. **O**N a vu dans le n° 2, la différence qui existe entre l'espérance mathématique et l'espérance morale. L'espérance mathématique résultante de l'attente probable d'un ou de plusieurs biens, étant le produit de ces biens, par la probabilité de les obtenir, elle peut être évaluée par l'analyse exposée dans ce qui précède. L'espérance morale se règle sur mille circonstances qu'il est presque impossible de bien évaluer. Mais nous avons donné dans le numéro cité, un principe qui s'appliquant aux cas les plus communs, conduit à des résultats souvent utiles, et dont nous allons développer les principaux.

D'après ce principe, x étant la fortune physique d'un individu, l'accroissement dx qu'elle reçoit, produit à l'individu un bien moral réciproque à cette fortune; l'accroissement de sa fortune morale peut donc être exprimé par $\frac{k \cdot dx}{x}$, k étant une constante. Ainsi en désignant par y la fortune morale correspondante à la fortune physique x , on aura

$$y = k \cdot \log x + \log h,$$

h étant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen d'une valeur de y correspondante à une valeur donnée de x . Sur cela, nous observerons que l'on ne peut jamais supposer x et y nuls ou négatifs, dans l'ordre naturel des choses; car l'homme qui ne possède rien regarde son existence, comme un bien moral qui peut être comparé à l'avantage que lui procurerait une fortune physique dont il est bien difficile d'assigner la valeur, mais que l'on ne peut fixer au-dessous de ce qui lui serait rigoureusement nécessaire

nécessaire pour exister ; car on conçoit qu'il ne consentirait point à recevoir une somme modique, telle que cent francs, avec la condition de ne prétendre à rien, lorsqu'il l'aurait dépensée.

Supposons maintenant que la fortune physique d'un individu soit a , et qu'il lui survienne l'expectative d'un des accroissemens α , ϵ , γ , etc., ces quantités pouvant être nulles ou même négatives, ce qui change les accroissemens en diminutions. Représentons par p , q , r , etc., les probabilités respectives de ces accroissemens, la somme de ces probabilités étant supposée égale à l'unité. Les fortunes morales correspondantes de l'individu, pourront être

$$k.\log(a+\alpha)+\log h, \quad k.\log(a+\epsilon)+\log h, \quad k.\log(a+\gamma)+\log h, \text{ etc.}$$

En multipliant ces fortunes respectivement par leurs probabilités p , q , r , etc. ; la somme de leurs produits sera la fortune morale de l'individu, en vertu de son expectative ; en nommant donc Y cette fortune, on aura

$$Y = kp.\log(a+\alpha) + kq.\log(a+\epsilon) + kr.\log(a+\gamma) + \text{etc.} + \log h.$$

Soit X la fortune physique qui correspond à cette fortune morale, on aura

$$Y = k.\log X + \log h.$$

La comparaison de ces deux valeurs de Y donne

$$X = (a+\alpha)^p.(a+\epsilon)^q.(a+\gamma)^r.\text{etc.}$$

Si l'on retranche la fortune primitive a , de cette valeur de X ; la différence sera l'accroissement de la fortune physique qui procurerait à l'individu, le même avantage moral qui résulte pour lui, de son expectative. Cette différence est donc l'expression de cet avantage, au lieu que l'avantage mathématique a pour expression

$$p\alpha + q\epsilon + r\gamma + \text{etc.}$$

De là résultent plusieurs conséquences importantes. L'une d'elles est que le jeu mathématiquement le plus égal, est toujours désavantageux. En effet, si l'on désigne par a la fortune physique du joueur avant de commencer le jeu ; par p , sa probabilité de gagner,

et par μ sa mise; celle de son adversaire doit être, pour l'égalité du jeu, $\frac{(1-p) \cdot \mu}{p}$; ainsi le joueur gagnant la partie, sa fortune physique devient $a + \frac{1-p}{p} \cdot \mu$, et la probabilité de cela est p . S'il perd la partie, sa fortune physique devient $a - \mu$, et la probabilité de cela est $1 - p$; en nommant donc X sa fortune physique, en vertu de son expectative, on aura par ce qui précède,

$$X = \left(a + \frac{1-p}{p} \cdot \mu \right)^p \cdot (a - \mu)^{1-p};$$

or cette quantité est plus petite que a , c'est-à-dire que l'on a

$$\left(1 + \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\mu}{a} \right)^p \cdot \left(1 - \frac{\mu}{a} \right)^{1-p} < 1,$$

ou en prenant les logarithmes hyperboliques,

$$p \cdot \log \left(1 + \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\mu}{a} \right) + (1-p) \cdot \log \left(1 - \frac{\mu}{a} \right) < 0.$$

Le premier membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$f(1-p) \cdot \frac{d\mu}{a} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\mu}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{\mu}{a}} \right),$$

quantité qui est évidemment négative.

Il résulte encore de l'analyse précédente, qu'il vaut mieux exposer sa fortune, par parties, à des dangers indépendans les uns des autres, que de l'exposer toute entière au même danger. Pour le faire voir, supposons qu'un négociant ayant à faire venir par mer, une somme ϵ , l'expose sur un seul vaisseau, et que l'observation ait fait connaître la probabilité p de l'arrivée d'un vaisseau du même genre, dans le port; l'avantage mathématique du négociant, résultant de son expectative, sera $p\epsilon$. Mais si l'on représente par l'unité sa fortune physique, indépendamment de son expectative; sa fortune morale sera par ce qui précède,

$$kp \cdot \log(1 + \epsilon) + \log h,$$

et son avantage moral sera, en vertu de son expectative,

$$(1 + \varepsilon)^p - 1,$$

quantité plus petite que $p\varepsilon$; car on a

$$(1 + \varepsilon)^p < 1 + p\varepsilon,$$

puisque $\log(1 + \varepsilon)^p$ ou $p \cdot \log(1 + \varepsilon)$ est moindre que $\log(1 + p\varepsilon)$, ce qui est évident, lorsqu'on met ces deux logarithmes sous les formes $\int \frac{pd\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, et $\int \frac{pd\varepsilon}{1 + p\varepsilon}$.

Supposons maintenant, que le négociant expose la somme ε par parties égales, sur r vaisseaux. Sa fortune physique deviendra $1 + \varepsilon$, si tous les vaisseaux arrivent, et la probabilité de cet événement est p^r . Si $r - 1$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1 + \frac{(r-1) \cdot \varepsilon}{r}$, et la probabilité de cet événement est $rp^{r-1} \cdot (1 - p)$. Si $r - 2$ vaisseaux arrivent, la fortune physique du négociant devient $1 + \frac{r-2}{r} \cdot \varepsilon$, et la probabilité de cet événement est $\frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} \cdot p^{r-2} \cdot (1-p)^2$, et ainsi de suite; la fortune morale du négociant est donc par ce qui précède

$$k \cdot \left\{ p^r \cdot \log(1 + \varepsilon) + r \cdot p^{r-1} \cdot (1-p) \cdot \log\left(1 + \frac{r-1}{r} \cdot \varepsilon\right) + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} \cdot p^{r-2} \cdot (1-p)^2 \cdot \log\left(1 + \frac{r-2}{r} \cdot \varepsilon\right) + \text{etc.} \right\} + \log h;$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme,

$$kp \cdot \int d\varepsilon \cdot \left[\frac{p^{r-1}}{1 + \varepsilon} + \frac{r-1 \cdot p^{r-2} \cdot (1-p)}{1 + \frac{r-1}{r} \cdot \varepsilon} + \frac{r-1 \cdot r-2 \cdot p^{r-3} \cdot (1-p)^2}{1 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{r-2}{r} \cdot \varepsilon\right)} + \text{etc.} \right] + \log h. (a)$$

Si l'on retranche de cette expression, celle de la fortune morale du négociant, lorsqu'il expose la somme ε sur un seul vaisseau, et que l'on obtient en faisant $r = 1$ dans la précédente, ce qui réduit celle-ci à $kp \int \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, qui est égal à

$$kp \cdot \int d\varepsilon \cdot \left\{ \frac{p^{r-1}}{1 + \varepsilon} + \frac{r-1 \cdot p^{r-2} \cdot (1-p)}{1 + \varepsilon} + \frac{r-1 \cdot r-2 \cdot p^{r-3} \cdot (1-p)^2}{1 \cdot 2 \cdot (1 + \varepsilon)} + \text{etc.} \right\}.$$

la différence sera

$$kp \cdot \frac{r-1}{r} \cdot \int \frac{\varepsilon d\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \left[\frac{p^{r-2}}{1 + \frac{(r-1)}{r} \cdot \varepsilon} + \frac{\overline{r-2} \cdot p^{r-3} \cdot (1-p)}{1 + \frac{(r-2)}{r} \cdot \varepsilon} + \text{etc.} \right];$$

cette différence étant positive, on voit qu'il y a moralement de l'avantage à partager la somme ε sur plusieurs vaisseaux. Cet avantage s'accroît à mesure que l'on augmente le nombre r des vaisseaux; et si ce nombre est très-grand, l'avantage moral devient à peu près égal à l'avantage mathématique.

Pour le faire voir, reprenons la formule (a), et donnons-lui cette forme,

$$kp \cdot \int dx \cdot d\varepsilon \cdot c^{-\left(1 + \frac{1}{r}\right) \cdot x} \cdot (p \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p)^{r-1} + \log h; \quad (a')$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Dans cet intervalle, le coefficient de dx sous les signes $\int$, n'a ni *maximum* ni *minimum*; car sa différentielle prise par rapport à x , est

$$-c^{\left(1 + \frac{1}{r}\right) \cdot x} \cdot dx \cdot (p \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p)^{r-2} \cdot \left[p \cdot (1 + \varepsilon) \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + (1 - p) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \right];$$

cette différentielle est constamment négative depuis $x = 0$ jusqu'à x infini; ainsi le coefficient lui-même diminue constamment dans cet intervalle. C'est donc ici le cas de faire usage de la formule (A) du n° 22 du premier Livre, pour avoir, par une approximation convergente, l'intégrale $\int y dx$, y étant égal à

$$c^{-\left(1 + \frac{1}{r}\right) \cdot x} \cdot (p \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p)^{r-1}.$$

La quantité que nous avons nommée v dans le numéro cité, devient alors

$$v = -\frac{y dx}{dy} = \frac{p \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p}{p \cdot (1 + \varepsilon) \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + (1 - p) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)};$$

ce qui donne

$$U = \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p) \cdot \frac{\varepsilon}{r}},$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{p \cdot (1-p) \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right)}{r \cdot \left[1 + p\varepsilon + (1-p) \cdot \frac{\varepsilon}{r}\right]^2};$$

etc. ;

U , $\frac{dU}{dx}$, etc. étant ce que deviennent v , $\frac{dv}{dx}$, etc., lorsque x est nul. Cela posé, la formule (A) citée, donnera

$$\int dx \cdot c^{-\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \cdot x} \cdot \left(p \cdot c^{-\frac{\varepsilon x}{r}} + 1 - p\right)^{r-1}$$

$$= \frac{1}{1 + p\varepsilon + (1-p) \cdot \frac{\varepsilon}{r}} \cdot \left\{ 1 + \frac{p \cdot (1-p) \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right)}{r \cdot \left[1 + p\varepsilon + (1-p) \cdot \frac{\varepsilon}{r}\right]} + \text{etc.} \right\}.$$

la formule (a') devient ainsi, à très-peu près, lorsque r est un grand nombre,

$$k \cdot \int \frac{pd\varepsilon}{1 + p\varepsilon} + \log h,$$

ou

$$k \log (1 + p\varepsilon) + \log h.$$

Maintenant soit X la fortune physique correspondante à cette fortune morale ; on a par ce qui précède,

$$k \cdot \log X + \log h,$$

pour la fortune morale correspondante à X ; en comparant donc ces deux expressions, on aura

$$X = 1 + p\varepsilon.$$

Dans ce cas, l'avantage moral est $p\varepsilon$; il est donc égal à l'avantage mathématique.

Souvent l'avantage moral des individus est augmenté par le moyen des caisses d'assurance, en même tems que ces caisses produisent aux assureurs un bénéfice certain. Supposons, par

exemple, qu'un négociant ait une partie ϵ de sa fortune sur un vaisseau dont la probabilité de l'arrivée est p ; et qu'il assure cette partie, en donnant une somme à la compagnie d'assurance. Pour l'égalité parfaite entre les sorts mathématiques de la compagnie et du négociant, celui-ci doit donner $(1 - p) \cdot \epsilon$ pour prix de l'assurance. En représentant par l'unité, la fortune du négociant, indépendamment de son expectative ϵ , sa fortune morale sera par ce qui précède,

$$kp \cdot \log(1 + \epsilon) + \log h,$$

dans le cas où il n'assure pas; et dans le cas où il assure, elle sera

$$k \cdot \log(1 + p\epsilon) + \log h;$$

or on a

$$\log(1 + p\epsilon) > p \cdot \log(1 + \epsilon),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{pd\epsilon}{1 + p\epsilon} > \int \frac{pd\epsilon}{1 + \epsilon},$$

p étant moindre que l'unité; la fortune morale du négociant est donc augmentée, au moyen de son assurance. Il peut ainsi faire à la compagnie d'assurance, un sacrifice propre à subvenir aux frais de l'établissement et au bénéfice qu'elle doit faire. Si l'on nomme α ce sacrifice, c'est-à-dire, si l'on suppose que le négociant donne à la compagnie, pour prix de son assurance, la somme $(1 - p) \cdot \epsilon + \alpha$, on aura dans le cas de l'égalité des fortunes morales, lorsque le négociant assure, et lorsqu'il n'assure point,

$$\log(1 - \alpha + p\epsilon) = p \cdot \log(1 + \epsilon);$$

ce qui donne

$$\alpha = 1 + p\epsilon - (1 + \epsilon)^p.$$

c'est tout ce que le négociant peut donner à la compagnie, sans désavantage moral; il aura donc un avantage moral, en faisant un sacrifice moindre que cette valeur de α , et en même tems, la compagnie aura un bénéfice qui, comme on l'a vu, devient certain, quand ses relations sont très-nombreuses. On voit par là, comment des établissemens de ce genre, bien conçus et sagement

administrés, peuvent s'assurer un bénéfice réel, en procurant des avantages aux personnes qui traitent avec eux : c'est en général le but de tous les échanges ; mais ici, par une combinaison particulière, l'échange a lieu entre deux objets de même nature, dont l'un n'est que probable, tandis que l'autre est certain.

42. Le principe dont nous venons de faire usage pour calculer l'espérance morale, a été proposé par Daniel Bernoulli, pour expliquer la différence entre le résultat du calcul des probabilités et l'indication du sens commun, dans le problème suivant. Deux joueurs A et B jouent à *croix* et *pile*, avec la condition que A paie à B , deux francs, si *croix* arrive au premier coup ; quatre francs, s'il arrive au second coup ; huit francs, s'il arrive au troisième coup, et ainsi de suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$ coup. On demande ce que B doit donner à A , en commençant le jeu.

Il est visible que l'avantage de B , relatif au premier coup, est un franc ; car il a $\frac{1}{2}$ de probabilité de gagner deux francs à ce coup. Son avantage relatif au second coup, est pareillement un franc ; car il a $\frac{1}{4}$ de probabilité de gagner quatre francs à ce coup, et ainsi de suite ; ensorte que la somme de tous ses avantages relatifs aux n coups, est n francs. Il doit donc pour l'égalité mathématique du jeu, donner à A , cette somme qui devient infinie, si l'on suppose que le jeu continue à l'infini.

Cependant personne, à ce jeu, ne risquera avec prudence, une somme même assez modique, telle que cent francs. Pour peu que l'on réfléchisse à cette espèce de contradiction entre le calcul, et ce qu'indique le sens commun ; on voit facilement qu'elle tient à ce que si l'on suppose, par exemple, $n = 50$, ce qui donne 2^{50} pour la somme que B peut espérer au cinquantième coup, cette somme immense ne produit point à B , un avantage moral proportionnel à sa grandeur ; de manière qu'il y a pour lui un désavantage moral à exposer un franc pour l'obtenir avec la probabilité excessivement petite $\frac{1}{2^{50}}$ de réussir. Mais l'avantage moral que peut procurer une somme espérée, dépend d'une infinité de circonstances propres à chaque individu, et qu'il est impossible d'évaluer. La seule considération générale que l'on puisse employer à

cet égard, est que plus on est riche, moins une somme très-petite peut être avantageuse, toutes choses égales d'ailleurs. Ainsi la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire, est celle d'un avantage moral réciproque, au bien de la personne intéressée. C'est à cela que se réduit le principe de Daniel Bernoulli, principe qui, comme on vient de le voir, fait coïncider les résultats du calcul avec les indications du sens commun, et qui donne le moyen d'apprécier avec quelque exactitude, ces indications toujours vagues. Son application au problème dont on vient de parler, va nous en fournir un nouvel exemple.

Nommons a la fortune de B avant le jeu, et x ce qu'il donne au joueur A . Sa fortune devient $a - x + 2$, si *croix* arrive au premier coup; elle devient $a - x + 2^2$, si *croix* arrive au second coup, et ainsi de suite jusqu'au coup n , où elle devient $a - x + 2^n$, si *croix* n'arrive qu'au coup $n^{ième}$. La fortune de B devient $a - x$, si *croix* n'arrive point dans les n coups, après lesquels la partie est supposée finir; mais la probabilité de ce dernier événement est $\frac{1}{2^n}$. En multipliant les logarithmes de ces diverses fortunes par leurs probabilités respectives et par k , on aura par ce qui précède, la fortune morale de B en vertu des conditions du jeu, égale à

$$\frac{1}{2}.k.\log(a-x+2) + \frac{1}{2^2}.k.\log(a-x+2^2) \dots \\ \dots + \frac{1}{2^n}.k.\log(a-x+2^n) + \frac{1}{2^n}.k.\log(a-x) + \log h.$$

Mais avant le jeu, sa fortune morale était $k.\log a + \log h$; en égalant donc ces deux fortunes, pour que B conserve toujours la même fortune morale, et repassant des logarithmes aux nombres, on aura, $a - x$ étant supposé égal à a' , et faisant $\frac{1}{a'} = \alpha$,

$$1 + \alpha x = (1 + 2.\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + 2^2.\alpha)^{\frac{1}{2^2}} \dots (1 + 2^n.\alpha)^{\frac{1}{2^n}}; \quad (o)$$

les facteurs $(1 + 2.\alpha)^{\frac{1}{2}}$, $(1 + 2^2.\alpha)^{\frac{1}{2^2}}$ vont en diminuant sans cesse,
 et

et leur limite est l'unité ; car on a

$$(1 + 2^i \cdot \alpha)^{\frac{1}{2^i}} > (1 + 2^{i+1} \cdot \alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}.$$

En effet, si l'on élève à la puissance 2^{i+1} , les deux membres de cette inégalité, elle devient

$$1 + 2^{i+1} \cdot \alpha + 2^{2i} \cdot \alpha^2 > 1 + 2^{i+1} \cdot \alpha;$$

et sous cette forme, l'inégalité devient évidente. De plus, le loga-

rithme de $(1 + 2^i \cdot \alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ est égal à $\frac{i \cdot \log 2}{2^i} + \frac{1}{2^i} \cdot \log \left(\alpha + \frac{1}{2^i} \right)$; et il est visible que cette fonction est nulle dans le cas de i infini, ce qui

exige que dans ce cas, $(1 + 2^i \cdot \alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ soit l'unité.

Si l'on suppose n infini dans l'équation (o), on a le cas où la partie peut se prolonger à l'infini, ce qui est le cas le plus avantageux à B . α' et par conséquent α étant supposés connus; on prendra la somme des logarithmes tabulaires d'un assez grand nombre $i-1$, des premiers facteurs du second membre, pour que $2^i \alpha$ soit au moins égal à dix. La somme des logarithmes tabulaires des facteurs suivans, jusqu'à l'infini, sera à très-peu près égale à

$$\frac{\log \alpha}{2^{i-1}} + \frac{(i+1) \cdot \log 2}{2^{i-1}} + \frac{0,4342945}{\alpha \cdot 2^{2i-1}}.$$

L'addition de ces deux sommes donnera le logarithme tabulaire de $\alpha' + x$ ou de α . Ainsi l'on aura pour une fortune physique α , supposée à B avant le jeu, la valeur de x qu'il doit donner à A au commencement du jeu, pour conserver la même fortune morale. En supposant, par exemple, α' égal à cent, on trouve $\alpha = 107^f, 89$; d'où il suit que la fortune physique de B étant primitivement $107^f, 89$, il ne doit alors risquer prudemment à ce jeu, que $7^f, 89$, au lieu de la somme infinie que le résultat du calcul indique, lorsqu'on fait abstraction de toutes considérations morales. Ayant ainsi la valeur de α relative à $\alpha' = 100$, il est facile d'en conclure de la manière suivante, sa valeur relative à $\alpha' = 200$; en effet on a, dans

ce dernier cas,

$$a = (200+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (200+2^2)^{\frac{1}{4}} \cdot \text{etc.} = 2 \cdot (100+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (100+2)^{\frac{1}{4}} \cdot (100+4)^{\frac{1}{8}} \cdot \text{etc.}$$

Mais on vient de trouver

$$(100+2)^{\frac{1}{4}} \cdot (100+4)^{\frac{1}{8}} \cdot \text{etc.} = (107,89)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$a = 2 \cdot \sqrt{101 \cdot 107,89} = 208,78.$$

Ainsi la fortune physique de B étant primitivement 208^f,78, il ne peut risquer prudemment à ce jeu, au-delà de 8^f,78.

43. Nous allons maintenant étendre le principe exposé ci-dessus, aux choses dont l'existence est éloignée et incertaine. Pour cela, considérons deux personnes A et B , qui veulent placer chacune, en voyage, un capital q . Elles peuvent le faire séparément : elles peuvent s'associer et constituer une rente viagère sur leurs têtes, de manière que la rente soit reversible à celle qui survit à l'autre. Examinons quel est le parti le plus avantageux.

Supposons les deux personnes du même âge, et ayant la même fortune annuelle que nous représenterons par l'unité, indépendamment du capital qu'elles veulent placer. Soit $\mathcal{E}$ la rente viagère que ce capital leur produirait à chacune, si elles plaçaient leurs capitaux séparément, ensorte que leur fortune annuelle devienne $1 + \mathcal{E}$. Nous exprimerons, conformément au principe dont il s'agit, leur fortune morale annuelle correspondante, par $k \cdot \log(1 + \mathcal{E}) + \log h$. Mais cette fortune n'aura lieu que probablement, à la $x^{i\text{ème}}$ année ; ainsi en désignant par y_x la probabilité que A vivra à la fin de la $x^{i\text{ème}}$ année, on doit multiplier sa fortune morale annuelle relative à cette année, par y_x ; en ajoutant donc tous ces produits, leur somme que nous désignerons par $[k \cdot \log(1 + \mathcal{E}) + \log h] \cdot \sum y_x$, sera ce que je nomme ici, *fortune morale viagère*.

Supposons maintenant que A et B placent la somme $2q$ de leurs capitaux, sur leurs têtes, et que cela produise une rente viagère $\mathcal{E}'$, reversible au survivant. Tant que A et B vivront, chacun d'eux ne touchera que $\frac{1}{2} \mathcal{E}'$ de rente viagère, et leur fortune morale annuelle sera $k \cdot \log(1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}') + \log h$. En la multipliant par la proba-

bilité qu'ils vivront tous deux à la fin de l'année x , probabilité égale à $(y_x)^2$; la somme de ces produits pour toutes les valeurs de x , sera la fortune morale viagère de A , relative à la supposition de leur existence simultanée; cette fortune est donc

$$\left[k \cdot \log \left(1 + \frac{\mathcal{C}'}{2} \right) + \log h \right] \cdot \Sigma \cdot (y_x)^2.$$

La probabilité que A existera seul à la fin de la $x^{i\text{ème}}$ année, est $y_x - (y_x)^2$; sa fortune morale viagère relative à son existence après la mort de B , qui rend sa fortune morale annuelle égale à $1 + \mathcal{C}'$, est donc

$$[k \cdot \log (1 + \mathcal{C}') + \log h] \cdot \Sigma \cdot [y_x - (y_x)^2].$$

La somme de ces deux fonctions,

$$k \cdot \log \left(1 + \frac{\mathcal{C}'}{2} \right) \cdot \Sigma \cdot (y_x)^2 + k \cdot \log (1 + \mathcal{C}') \cdot [\Sigma \cdot y_x - \Sigma \cdot (y_x)^2] + \log h \cdot \Sigma \cdot y_x,$$

sera la fortune morale viagère de A dans l'hypothèse où A et B placent conjointement leurs capitaux.

Si l'on compare cette fortune à celle que nous venons de trouver dans le cas où ils placent séparément leurs capitaux; on voit qu'il y aura pour A de l'avantage ou du désavantage à placer conjointement, suivant que

$$\log \left(1 + \frac{\mathcal{C}'}{2} \right) \cdot \Sigma \cdot (y_x)^2 + \log (1 + \mathcal{C}') \cdot [\Sigma \cdot y_x - \Sigma \cdot (y_x)^2]$$

sera plus grand ou moindre que $\log (1 + \mathcal{C}) \cdot \Sigma \cdot y_x$. Pour le savoir, il faut déterminer le rapport de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$; or on a par le n° 40,

$$q = \mathcal{C} \cdot \Sigma \cdot p^x y_x,$$

$\frac{1-p}{p}$ étant l'intérêt annuel de l'argent: on a ensuite par le même numéro,

$$2q = \mathcal{C}' \cdot \Sigma \cdot p^x \cdot [2y_x - (y_x)^2];$$

on a donc

$$\mathcal{C}' = \frac{2\mathcal{C} \cdot \Sigma \cdot p^x y_x}{\Sigma \cdot p^x \cdot [2y_x - (y_x)^2]}.$$

Les tables de mortalité donneront les valeurs de $\Sigma \cdot y_x$, $\Sigma \cdot (y_x)^2$,

$\Sigma.p^x y_x$, $\Sigma.p^x (y_x)^2$; on pourra ainsi juger lequel des deux placements dont il s'agit, est le plus avantageux.

Supposons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de très-petites fractions; la quantité $\log(1+\mathcal{E}).\Sigma.y_x$ devient à très-peu près $\mathcal{E}.\Sigma.y_x$. La quantité

$$\log\left(1 + \frac{\mathcal{E}'}{2}\right).\Sigma.(y_x)^2 + \log(1+\mathcal{E}').[\Sigma.y_x - \Sigma.(y_x)^2]$$

devient

$$\frac{\mathcal{E}'}{2} \cdot [2.\Sigma.y_x - \Sigma.(y_x)^2],$$

et en substituant pour $\mathcal{E}'$ sa valeur précédente, elle devient

$$\mathcal{E} \cdot \frac{[2\Sigma.y_x - \Sigma.(y_x)^2] \cdot \Sigma.p^x y_x}{2\Sigma.p^x y_x - \Sigma.p^x (y_x)^2};$$

il y a donc de l'avantage à placer conjointement, si

$$[2\Sigma.y_x - \Sigma.(y_x)^2] \cdot \Sigma.p^x y_x$$

l'emporte sur

$$[2\Sigma.p^x y_x - \Sigma.p^x (y_x)^2] \cdot \Sigma.y_x,$$

ou si l'on a

$$\frac{\Sigma.p^x (y_x)^2}{\Sigma.p^x y_x} > \frac{\Sigma.(y_x)^2}{\Sigma.y_x};$$

c'est en effet ce qui a lieu généralement, p étant plus petit que l'unité.

L'avantage de placer conjointement les capitaux, s'accroît par la considération que l'augmentation $\frac{\mathcal{E}'}{2}$ de revenu arrive au survivant, à un âge ordinairement avancé dans lequel de plus grands besoins qui se font sentir, la rendent beaucoup plus utile. Cet avantage s'accroît encore de toutes les affections qui peuvent attacher les deux individus l'un à l'autre, et qui leur font desirer le bien-être de celui qui doit survivre. Les établissemens dans lesquels on peut ainsi placer ses capitaux, et par un léger sacrifice de son revenu, assurer l'existence de sa famille pour un tems où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins, sont donc très-avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchans de la nature. Ils n'offrent point l'inconvénient que nous avons remarqué dans les jeux même les plus équitables, celui de rendre la

perte plus sensible que le gain ; puisqu'au contraire , ils offrent les moyens d'échanger le superflu , contre des ressources assurées dans l'avenir. Le Gouvernement doit donc encourager ces établissemens , et les respecter dans ses vicissitudes ; car les espérances qu'ils présentent , portant sur un avenir éloigné , ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PLAN DE L'OUVRAGE.

IL est divisé en deux Livres : le premier a pour objet, le Calcul des Fonctions génératrices, qui sert de base à la Théorie des Probabilités, exposée dans cet Ouvrage. Ce calcul se partage en deux branches dont l'une est la théorie même des fonctions génératrices, et dont l'autre est l'extension de cette théorie aux approximations des formules fonctions de grands nombres. L'exposition des principes de la théorie des probabilités, et l'application de ces principes et de l'analyse exposée dans le premier Livre, aux questions les plus difficiles et les plus importantes des probabilités, sont l'objet du second Livre..... page 1

LIVRE PREMIER.

CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

Considérations générales sur les équations aux différences à un ou plusieurs indices variables, sur le passage du fini à l'infiniment petit, et sur la métaphysique du calcul différentiel... n° 1, page 4

CHAP. I. Des fonctions génératrices à une variable..... page 9

u étant une fonction quelconque d'une variable t , et y_x étant le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction ; u est fonction génératrice de y_x .

Si l'on multiplie u , par une fonction quelconque s de $\frac{1}{t}$, on aura une nouvelle fonction génératrice qui sera celle d'une fonction de y_x, y_{x+1} , etc. En désignant par $\nabla.y_x$ cette dernière fonction ; $u.s^t$ sera la fonction génératrice de $\nabla^t.y_x$, ensorte que l'exposant de s , dans la fonction génératrice, devient celui de la caractéristique ∇ , dans la fonction engendrée..... n° 2, page 9

De l'interpolation des suites à une variable, et de l'intégration des équations différentielles linéaires..... page 13

L'interpolation se réduit à déterminer le coefficient y_{x+i} de t^x dans le développe-

- ment de $\frac{u}{i^i}$. On peut donner à $\frac{1}{i}$, une infinité de formes différentes : en l'élevant à la puissance i sous ces formes, et repassant ensuite des fonctions génératrices aux coefficients, on a sous une infinité de formes correspondantes, l'expression de y_{x+i} . Application de cette méthode aux suites dont les différences successives des termes vont en décroissant..... n° 3, page 13
- Formules pour interpoler entre un nombre impair ou pair de quantités équidistantes..... n° 4, page 15
- Formule générale d'interpolation des suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite dont le terme général est donné par une équation linéaire aux différences, à coefficients constans..... n° 5, page 19
- La formule s'arrête, lorsque la raison des termes est celle d'une suite semblable, et alors elle donne l'intégrale des équations linéaires aux différences finies, dont les coefficients sont constans. Intégration générale de ces équations, dans le cas même où elles ont un dernier terme fonction de l'indice..... n° 6, page 26
- Formule d'interpolation des mêmes suites, ordonnée par rapport aux différences successives de la variable principale..... n° 7, page 31
- Passage de cette formule, du fini à l'infiniment petit. Interpolation des suites dont la dernière raison des termes est celle d'une équation aux différences infiniment petites linéaires, à coefficients constans. Intégration de ce genre d'équations, lors même qu'elles ont un dernier terme..... n° 8, page 34
- De la transformation des suites*..... n° 9, page 36
- Théorèmes sur le développement des fonctions et de leurs différences, en séries..... page 39
- On déduit du calcul des fonctions génératrices, les formules

$$' \Delta^n . y_x = [(1 + \Delta . y_x)^i - 1]^n, \quad ' \Sigma^n . y_x = [(1 + \Delta . y_x)^i - 1]^n,$$

Δ et Σ se rapportant au cas où x varie de l'unité, et $' \Delta$ et $' \Sigma$ se rapportant au cas où x varie de i . On tire de ces formules, les suivantes,

$$' \Delta^n . y_x = \left(c^{\frac{a}{c} \cdot \frac{dy_x}{dx} - 1} \right)^n, \quad ' \Sigma^n . y_x = \left(c^{\frac{a}{c} \cdot \frac{dy_x}{dx} - 1} \right)^{-n},$$

dans lesquelles c désigne le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et $' \Delta$ et $' \Sigma$ se rapportent à la variation a , de x . On transforme l'expression de $' \Delta^n . y_x$ dans celle-ci,

$$\left(\frac{c^{\frac{a}{2} \cdot dy_{x+\frac{na}{2}}}}{c^{\frac{a}{2} \cdot dy_{x+\frac{na}{2}}}} - c \right)^n.$$

On parvient à ces formules,

$$\frac{d^n . y_x}{dx^n} = [\log (1 + \Delta . y_x)]^n,$$

$$f^n y_x . dx^n = [\log (1 + \Delta . y_x)]^{-n}.$$

Analogie entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales, fondée sur ce que les exposans des puissances, dans les fonctions génératrices, se transportent aux caractéristiques correspondantes de la variable y_x . Généralisation des résultats précédens. n° 10, page 40
 Théorèmes analogues aux précédens, sur les produits de plusieurs fonctions d'une même variable, et spécialement sur le produit $p^x y_x$ n° 11, page 45

CHAP. II. Des fonctions génératrices à deux variables. . . page 50

u étant une fonction de deux variables t et t' , et $y_{x,x'}$ étant le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de cette fonction; u est fonction génératrice de $y_{x,x'}$.

Si l'on multiplie u par une fonction s de $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t'}$, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de ce produit, sera une fonction $y_{x,x'}, y_{x+1,x'}, y_{x,x'+1}$, etc.; en la désignant par $\nabla \cdot y_{x,x'}$, us^i sera la fonction génératrice de $\nabla^i \cdot y_{x,x'}$.
 n° 12, page 50

De l'interpolation des suites à deux variables, et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles. page 52

Formule générale de l'interpolation des suites dont la dernière raison des termes est celle d'une série dont le terme général est donné par une équation linéaire aux différences partielles, à coefficients constans. n° 13, page 52

La formule s'arrête, lorsque la raison des termes est celle d'une série semblable, et alors elle donne l'intégrale des équations linéaires aux différences finies partielles, dont les coefficients sont constans. Cette intégrale suppose que l'on connaît, ou que l'on peut déduire des conditions du problème, n valeurs arbitraires de $y_{x,x'}$, en donnant, par exemple à x , les n valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$, x' étant d'ailleurs quelconque. Expression très-simple de $y_{x,x'}$, lorsque ces fonctions arbitraires en x' sont données par des équations linéaires aux différences, à coefficients constans. n° 14, page 56

Expression générale de $y_{x,x'}$ sous la forme d'intégrale définie; remarque importante sur le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale des équations à différences partielles. n° 15, page 58

Examen de quelques cas qui échappent à la formule générale d'intégration, donnée dans ce qui précède; dans ce cas, les caractéristiques des différences finies, que renferment les intégrales, ont pour exposans, les indices variables des équations aux différences partielles. n° 16, page 62

Intégration de l'équation

$$0 = \Delta^n \cdot y_{x,x'} + \frac{a}{\alpha} \cdot \Delta^{n-1} \cdot \Delta \cdot y_{x,x'} + \frac{b}{\alpha^2} \cdot \Delta^{n-2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x,x'} + \text{etc.},$$

Δ se rapportant à la variabilité de x dont l'unité est la différence, et Δ se rapportant à la variabilité de x' dont α est la différence. On en déduit l'intégrale de l'équation aux différences partielles infiniment petites et finies, que l'on

TABLE DES MATIÈRES.

449

On obtient en changeant dans la précédente, α en dx' , et la caractéristique Δ en d	n° 17, page 65
<i>Théorèmes sur le développement en séries, des fonctions de plusieurs variables</i>	page 67
Ces théorèmes sont analogues à ceux qui ont été donnés précédemment, sur les fonctions à une seule variable, et l'on y retrouve l'analogie observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales.....	n° 18, page 67
<i>Considérations sur les passages du fini à l'infiniment petit</i>	page 70
La considération de ces passages est très-propre à éclaircir les points les plus délicats du calcul infinitésimal. Elle montre avec évidence, que les quantités négligées dans ce calcul, n'ôtent rien à sa rigueur. En l'appliquant au problème des cordes vibrantes, elle prouve la possibilité d'introduire des fonctions arbitraires discontinues dans les intégrales des équations aux différences partielles finies et infiniment petites, et elle donne les conditions de cette discontinuité.....	n° 19, page 70
<i>Considérations générales sur les fonctions génératrices</i>	page 80
Trouver la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation linéaire aux différences finies, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de l'indice.....	n° 20, page 80
Expressions des intégrales de ces équations, en intégrales définies. Les fonctions sous le signe intégral $\int$, sont de la même nature que les fonctions génératrices des quantités données par ces équations. Ainsi tous les théorèmes déduits précédemment de l'analogie des puissances et des différences, s'appliquent à ces intégrales. Leur principal avantage est de fournir une approximation aussi commode que convergente, de ces quantités, lorsque leur indice est un très-grand nombre. Cette méthode d'approximation acquiert une grande extension par les passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, passages dont j'ai donné les premières traces dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1782. Il paraît par les ouvrages posthumes d'Euler, que vers le même tems, ce grand géomètre s'occupait du même objet.....	n° 21, page 83

SECONDE PARTIE.

<i>Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de grands nombres</i>	page 88
---	---------

CHAP. I. De l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances....	page 88
---	---------

Expression en série convergente, de leur intégrale prise entre deux limites données :

la série cesse d'être convergente près du *maximum* de la fonction sous le signe intégral..... n° 22, page 88
 Expression en série convergente, de l'intégrale dans ce dernier cas, n° 23, page 91
 Ce que devient cette série, lorsque l'intégrale est prise entre deux limites qui rendent nulle la fonction sous le signe intégral. Sa valeur dépend alors d'intégrales de la forme $\int t^r dt \cdot c^{-t^n}$, et prises depuis t nul jusqu'à t infini. On établit ce théorème

$$n^2 \int t^{n-2} dt \cdot c^{-t^n} \cdot \int t^{n-r} dt \cdot c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right)} \cdot \pi,$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. On en déduit ce résultat remarquable,

$$\int dt \cdot c^{-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \dots\dots\dots \text{n° 24, page 91}$$

Ce dernier résultat donne par le passage du réel à l'imaginaire,

$$\int dx \cdot \cos rx \cdot c^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot c^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Méthode directe qui conduit à cette équation, et de laquelle on tire la valeur de l'intégrale, lorsque la quantité sous le signe $\int$ est multipliée par x^{2n} : valeur de l'intégrale $\int x^{2n \pm 1} dx \cdot \sin rx \cdot c^{-a^2 x^2} \dots\dots\dots \text{n° 25, page 96}$
 On parvient aux formules

$$\int \frac{dx \cdot \cos rx}{1+x^2} = \int \frac{xdx \cdot \sin rx}{1+x^2} = \pi \cdot c^{-r},$$

les intégrales étant prises depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$; et l'on en déduit les intégrales $\int \frac{M}{N} \cdot dx \cdot \frac{\cos}{\sin} rx$, prises dans les mêmes limites, N étant une fonction rationnelle et entière de x , d'un degré supérieur à M , et n'ayant pas de facteur réel du premier degré..... n° 26, page 98
 Expression de l'intégrale $\int dt \cdot c^{-t^2}$ prise entre des limites données, soit en séries, soit en fraction continue..... n° 27, page 101
 Approximation des doubles, triples, etc. intégrales des différentielles multipliées par des facteurs élevés à de hautes puissances. Formules en séries convergentes, pour intégrer dans des limites données, la double intégrale $\iint y dx dx'$, y étant une fonction de x et de x' . Examen du cas où l'intégrale est prise très-près du *maximum* de y . Expression de l'intégrale en séries convergentes..... n° 28, page 104

CHAP. II. De l'intégration par approximation, des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites..... page 110

Intégration de l'équation aux différences finies

$$S = A.y_s + B.\Delta.y_s + C.\Delta^2.y_s + \text{etc.},$$

A, B, C , etc. étant des fonctions rationnelles et entières de s . Si la variable y_s est exprimée par l'intégrale définie $\int x^s \phi dx$, ou par celle-ci $\int e^{-ix} \phi dx$, ϕ étant fonction de x ; on a par les formules du chapitre précédent, la valeur de y_s en séries très-convergentes, lorsque l'indice s est un grand nombre. Pour déterminer ϕ , on substitue pour y_s son expression en intégrale définie, dans l'équation aux différences en y_s , qui se partage en deux autres, dont l'une est une équation différentielle en ϕ , qui sert à déterminer cette inconnue; l'autre équation donne les limites de l'intégrale définie..... n° 29, page 110

Intégration d'un nombre quelconque d'équations linéaires à un seul indice, et ayant un dernier terme; les coefficients de ces équations étant des fonctions rationnelles et entières de cet indice. Cette méthode peut être étendue aux équations linéaires à différences ou infiniment petites, ou en partie finies, et en partie infiniment petites..... n° 30, page 116

La principale difficulté de cette analyse, consiste à intégrer l'équation différentielle en ϕ , qui n'est intégrable généralement, que dans le cas où l'indice s n'est qu'à la première puissance dans l'équation aux différences en y_s , qui alors est de la forme $0 = V + s.T$, V et T étant des fonctions linéaires de y_s , et de ses différences soit finies, soit infiniment petites. Intégrale de cette dernière équation, par une série très-convergente, lorsque s est un grand nombre. Remarque importante sur l'étendue de cette série, qui est indépendante des limites de l'intégrale définie par laquelle y_s est exprimé, et qui subsiste dans le cas même où l'équation aux limites n'a que des racines imaginaires. Lorsque dans l'équation en y_s , s surpasse le premier degré; on peut quelquefois la décomposer en plusieurs équations qui ne renferment que la première puissance de s . On peut encore dans plusieurs cas, intégrer par une approximation très-convergente, l'équation différentielle en ϕ n° 31, page 120

Intégration de l'équation

$$0 = V + s.T + s'.R,$$

V, T, R étant des fonctions quelconques linéaires de $y_{s,v}$, et de ses différences ordinaires et partielles, finies et infiniment petites..... n° 32, page 123

CHAP. III. Application des méthodes précédentes, à l'approximation de diverses fonctions de très-grands nombres.... page 126

De l'approximation des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et des termes des polynomes élevés à de grandes puissances..... page 126

L'intégrale de l'équation $0 = (s+1).y_s - y_{s-1}$, approchée par les méthodes du chapitre précédent, et comparée à son intégrale finie, donne par une série très-convergente, le produit $(\mu+1).(\mu+2) \dots s$. En faisant s négatif, et passant du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire; on parvient à cette équation remarquable,

$$\frac{2\pi.(-1)^{\frac{1}{2}-\mu}}{\int x^{\mu-1} dx . c^{-x}} = \int \frac{dx . c^{-x}}{x^{\mu}};$$

la première intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et la dernière intégrale étant prise entre les limites imaginaires de x , qui rendent nulle la

fonction $\frac{c^{-x}}{x^{\mu}}$; ce qui donne un moyen facile d'avoir l'intégrale $\int \frac{dx \cos x}{x^{\mu}}$;

prise depuis x nul jusqu'à x infini. Cette équation donne encore la valeur des intégrales $\int \frac{d\varpi \cos \varpi}{1+\varpi^2}$, $\int \frac{\varpi . d\varpi \sin \varpi}{1+\varpi^2}$, prises depuis ϖ nul jusqu'à ϖ infini. On

trouve $\frac{\pi}{2c}$ pour ces intégrales; leur accord avec les résultats du n° 26, prouve

la justesse de ces passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire: ces divers résultats ont été donnés dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, pour l'année 1782..... n° 33, page 126

Intégrale approchée de l'équation $0 = (a' + b's).y_{s+1} - (a + bs).y_s$, d'où l'on tire par une série simple et très-convergente, le terme moyen ou indépendant de a , du binôme $(a + \frac{1}{a})^{2s}$ n° 34, page 135

Méthode générale pour avoir par une série convergente, le terme moyen ou indépendant de a , dans le développement du polynome $a^{-n} + a^{-n+1} + a^{-n+2} \dots + a^{-1} + a^n$ élevé à une très-haute puissance..... n° 35, page 138

Expressions en série convergente, du coefficient de $a^{\pm l}$, dans le développement de cette puissance, et de la somme de ces coefficients, depuis celui de a^{-l} jusqu'à celui de a^l n° 36, page 146

Intégration par approximation, de l'équation aux différences $p' = s.y_s + (s-i)y_{s+1}$. On en déduit l'expression de la somme des termes de la puissance très-élevée d'un binôme, en arrêtant son développement à un terme quelconque fort éloigné du premier..... n° 37, page 149

De l'approximation des différences infiniment petites et finies très-élevées des fonctions...... page 151

Approximation des différences infiniment petites très-élevées des puissances d'un

- polynome. Expression très-approchée de la différentielle très-élevée d'un angle , prise par rapport à son sinus..... n° 38 , page 151
- Expressions en intégrales définies , des différences finies et infiniment petites , de y , lorsqu'on est parvenu à lui donner l'une ou l'autre des formes $\int x^i \varphi dx$, $\int e^{-ix} \varphi dx$ n° 39 , page 156
- Approximation en séries très-convergentes de $\Delta^n \cdot \frac{1}{s^i}$, n étant un grand nombre. On en déduit , au moyen des passages du positif au négatif , et du réel à l'imaginaire , l'approximation de $\Delta^n \cdot s^i$. La convergence de la série exige que i surpasse n , et que la différence $i - n$ ne soit pas fort petite par rapport à $s + \frac{n}{2}$.
- Expression en série de $\Delta^n \cdot s^i$, dans ce dernier cas..... n° 40 , page 157
- Expression de la différence $\Delta^n \cdot s^i$, lorsque i est plus petit que n ... n° 41 , page 162
- Expression de la somme des termes de $\Delta^n \cdot s^i$, en arrêtant son développement au terme dans lequel la quantité élevée à la puissance i , commence à devenir négative. Approximation en série très-convergente , de la fonction
- $$(n+r\sqrt{-n})^{n\pm l} - n \cdot (n+r\sqrt{-n-2})^{n\pm l} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+r\sqrt{-n-4})^{n\pm l} - \text{etc.},$$
- dans laquelle on rejette les termes où la quantité élevée à la puissance $n \pm l$, est négative , l étant un nombre entier peu considérable par rapport à n .
..... n° 42 , page 165
- Extension des méthodes précédentes aux différences finies très-élevées de la forme $\Delta^n \cdot (s+p)^i \cdot (s+p')^{i'} \cdot (s+p'')^{i''}$.etc..... n° 43 , page 171
- Remarque sur la convergence des séries..... n° 44 , page 174

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

CHAP. I. Principes généraux de cette théorie..... page 177

Définition de la probabilité. Sa mesure est le rapport du nombre des cas favorables , à celui de tous les cas possibles.

I^{er} PRINCIPE. La probabilité d'un événement composé de deux évènements simples , est le produit de la probabilité d'un de ces évènements , par la probabilité que cet événement étant arrivé , l'autre événement aura lieu.

II^e PRINCIPE. La probabilité d'un événement futur , tirée d'un événement observé , est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux évènements , et déterminée *a priori* , par la probabilité de l'événement observé , déterminée pareillement *a priori*.

III^e PRINCIPE. Si un événement observé peut résulter de n causes différentes ,

leurs probabilités sont respectivement, comme les probabilités de l'événement, tirées de leur existence; et la probabilité de chacune d'elles, est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement dans l'hypothèse de l'existence de la cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes.

IV^e PRINCIPE. La probabilité d'un événement futur, est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'événement futur aura lieu.

De l'influence que doit avoir sur les résultats du calcul des probabilités, la différence inconnue qui peut exister entre des événemens simples que l'on suppose également possibles. Cette différence augmente la probabilité des événemens composés de la répétition d'un même événement..... n° 1, page 177

Des espérances *mathématique* et *morale*. La première est le produit du bien espéré par la probabilité de l'obtenir : la seconde dépend de la valeur relative du bien espéré. La règle la plus naturelle et la plus simple, pour apprécier cette valeur, consiste à supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite, en raison directe de sa valeur absolue, et en raison inverse du bien total de la personne intéressée..... n° 2, page 187

CHAP. II. De la probabilité des événemens composés d'événemens simples dont les possibilités respectives sont données.... page 189

Expression du nombre des combinaisons de n lettres prises r à r , lorsqu'on a égard ou non, à leur situation respective. Application aux loteries.... n° 3, page 189

Une loterie étant composée de n numéros dont r sortent à chaque tirage, on demande la probabilité qu'après i tirages, tous les numéros seront sortis. Solution générale du problème. Expression très-simple et très-approchée de la probabilité, lorsque n et i sont de grands nombres. Application au cas où $n = 10000$, et $r = 1$. Il y a dans ce cas, un peu moins d'un contre un à parier que tous les numéros sortiront dans 95767 tirages, et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95768 tirages. Dans le cas de la loterie de France où $n = 90$ et $r = 5$, il y a un peu moins d'un contre un à parier, que tous les numéros sortiront dans 85 tirages, et un peu plus à parier qu'ils sortiront dans 86 tirages..... n° 4, page 191

Une urne étant supposée renfermer le nombre x de boules, on en tire une partie, ou la totalité; et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair. Solution du problème. Il y a de l'avantage à parier pour un nombre impair..... n° 5, page 201

Expression de la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires, x'' boules rouges, etc., en tirant une boule de chacune des urnes dont le nombre est $x + x' + x'' + \text{etc.}$, et qui renferment chacune p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, etc..... n° 6, page 203

Déterminer la probabilité de tirer ainsi des urnes précédentes, x boules blanches,

avant d'amener soit x' boules noires , soit x'' boules rouges , soit etc. Solution du problème par la méthode des combinaisons. Identité de ce problème avec celui qui consiste à déterminer les sorts d'un nombre n de joueurs dont les adresses respectives sont connues, lorsqu'il manque pour gagner la partie, x coups au premier, x' au second, x'' au troisième, etc. n° 7, page 205

Solution générale du problème précédent, par l'analyse des fonctions génératrices. Dans le cas de deux joueurs A et B dont les adresses respectives sont égales, le problème est celui que Pascal proposa à Fermat, et que ces deux grands géomètres résolurent. Il revient à imaginer une urne qui renferme deux boules, l'une blanche et l'autre noire, portant chacune le n° 1; la boule blanche étant pour le joueur A , la boule noire pour le joueur B . On tire de l'urne, une boule que l'on y remet ensuite, pour procéder à un nouveau tirage, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que la somme des numéros sortis, favorables à l'un des joueurs, atteigne un nombre donné. Après un certain nombre de tirages, il manque encore au joueur A , le nombre x , et au joueur B , le nombre x' . Les deux joueurs conviennent alors de se retirer du jeu, en partageant l'enjeu qu'ils ont mis en commençant: il s'agit de connaître comment doit se faire ce partage. Ce qui revient aux joueurs, doit être évidemment proportionnel à leurs probabilités respectives de gagner la partie. Généralisation et solution de ce problème, 1° en supposant dans l'urne, une boule blanche favorable à A , et portant le n° 1, et deux boules noires favorables à B , et portant l'une, le n° 1, et l'autre, le n° 2; chaque boule diminuant de son numéro, le nombre des points qui manquent au joueur auquel elle est favorable; 2° en supposant dans l'urne, deux boules blanches portant les n°s 1 et 2, et deux boules noires, portant les mêmes numéros. n° 8, page 207

Concevant dans une urne, r boules marquées du n° 1, r boules marquées du n° 2, et ainsi de suite jusqu'au n° n ; ces boules étant bien mêlées dans l'urne, et tirées toutes successivement, on demande la probabilité qu'il sortira au moins s boules au rang indiqué par leur numéro. Solution générale du problème, et de celui dans lequel, ayant i urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes, et que l'on tire toutes successivement de chaque urne, en complétant le tirage d'une urne, avant de passer à une autre urne; on demande la probabilité qu'une ou plusieurs boules de la même couleur, sortiront au même rang dans les tirages complets des urnes. n° 9, page 217

Deux joueurs A et B dont les adresses respectives sont p et q , et dont le premier a le nombre a de jetons, et le second le nombre b , jouent à cette condition, que celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsque l'un des joueurs aura perdu tous ses jetons; on demande la probabilité que l'un des joueurs gagnera la partie avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup. Fonction génératrice de cette probabilité, d'où l'on tire l'expression générale de la probabilité. Expression de la probabilité que la partie finira avant ou au $n^{\text{ième}}$ coup. Ce qu'elle devient, lorsqu'on suppose a infini. Valeur très-appro-

chée de la même expression, lorsque l'on suppose de plus p et q égaux, et lorsque b est un nombre considérable. Si $b = 100$, il y a du désavantage à parier un contre un, que A gagnera la partie dans 23780 coups; mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups.... n° 10, page 225

Un nombre $n+1$ de joueurs jouent ensemble aux conditions suivantes. Deux d'entre eux jouent d'abord, et celui qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour n'y rentrer qu'après que tous les autres joueurs ont joué; ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui perdent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux premiers joueurs qui a gagné, joue avec le troisième, et s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier cas, la partie est finie. Mais si le joueur gagnant au premier coup, est vaincu par l'un des autres joueurs; le vainqueur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jusqu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné de suite tous les joueurs. Le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'un des joueurs gagne de suite tous les autres, ce qui finit la partie; et alors le joueur qui la gagne, emporte tout ce qui a été mis au jeu. Cela posé, on demande, 1° la probabilité que le jeu finira avant ou au nombre x de coups; 2° la probabilité que l'un quelconque des joueurs gagnera la partie dans ce nombre de coups; 3° son avantage. Solution générale du problème. Fonctions génératrices de ces trois quantités, d'où l'on tire leurs valeurs. Expressions fort simples de ces quantités, lorsque x est infini, ou lorsque le jeu est continué indéfiniment..... n° 11, page 238

q étant la probabilité d'un événement simple à chaque coup, on demande la probabilité de l'amener i fois de suite, dans le nombre x de coups. Solution du problème. Fonction génératrice de cette probabilité, d'où l'on tire l'expression de la probabilité.

Deux joueurs A et B, dont les adresses respectives sont q et $1-q$, jouent à cette condition, que celui des deux qui aura le premier vaincu i fois de suite son adversaire, gagnera la partie; on demande les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie, avant ou au coup x . Solution du problème, au moyen des fonctions génératrices. Expressions de ces probabilités dans le cas de x infini. Sorts respectifs des joueurs, en supposant qu'à chaque coup qu'ils perdent, ils déposent un franc au jeu..... n° 12, page 247

Une urne étant supposée contenir $n+1$ boules, distinguées par les nos 0, 1, 2, 3, ... n; on en tire une boule que l'on remet dans l'urne, après le tirage; on demande la probabilité qu'après i tirages, la somme des nombres amenés sera égale à s . Solution du problème, fondée sur un artifice singulier qui consiste dans l'emploi d'une caractéristique propre à faire connaître la diminution successive qu'il faut faire subir à la variable, dans chaque terme du résultat final des intégrations successives, lorsqu'elles sont discontinues. Application de la solution au problème qui consiste à déterminer la probabilité d'amener un nombre donné,

en

- en projetant i dés chacun, d'un nombre $n + 1$ de faces; et au problème où l'on cherche la probabilité que la somme des inclinaisons à l'écliptique, d'un nombre s d'orbites, sera comprise dans des limites données, en supposant toutes les inclinaisons depuis zéro jusqu'à l'angle droit, également possibles. On fait voir que l'existence d'une cause commune qui a dirigé les mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites, dans le sens de la rotation du soleil, est indiquée avec une probabilité excessivement approchante de la certitude, et bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques, sur lesquels on ne se permet aucun doute. La même solution appliquée au mouvement et aux orbites des cent comètes observées jusqu'à ce jour, prouve que rien n'indique dans ces astres, une cause primitive qui ait tendu à les faire mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre, ou sous une inclinaison plutôt que sous une autre, au plan de l'écliptique.... n° 13, page 253
- Solution du problème exposé au commencement du numéro précédent, dans le cas où le nombre des boules qui portent le même numéro, n'est pas égal à l'unité, et varie suivant une loi quelconque..... n° 14, page 261
- Application de l'artifice exposé dans le n° 13, à la solution de ce problème. Soient i quantités variables dont la somme est s , et dont les lois de possibilité sont connues, et peuvent être discontinues; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction quelconque donnée de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur. Application de cette solution à la recherche de la probabilité que l'erreur du résultat d'un nombre quelconque d'observations dont les lois de facilité des erreurs, sont exprimées par des fonctions rationnelles et entières de ces erreurs, sera comprise dans des limites données.
- Application de la même solution à la recherche d'une règle propre à faire connaître le résultat le plus probable des opinions émises par les divers membres d'un tribunal: cette règle n'est point applicable aux choix des assemblées électorales. Règle relative à ces choix, lorsqu'on fait abstraction des passions des électeurs, et des considérations étrangères au mérite, qui peuvent les déterminer. Ces diverses causes rendent cette règle sujette à de graves inconvéniens qui l'ont fait abandonner.
- Recherche de la loi de probabilité des erreurs des observations, moyenne entre toutes celles qui satisfont aux conditions que les erreurs positives soient les mêmes que les erreurs négatives, et que leur probabilité diminue quand elles augmentent..... n° 15, page 262
- CHAP. III. Des lois de la probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens..... page 275
- p étant la probabilité de l'arrivée d'un événement simple à chaque coup, et $1-p$, telle de sa non-arrivée; déterminer la probabilité que sur un très-grand nombre n de coups, le nombre de fois que l'événement aura lieu, sera compris dans

des limites données. Solution du problème. Le nombre de fois le plus probable, est np . Expression de la probabilité que ce nombre de fois sera compris dans les limites $np \pm l$. Les limites $\pm l$ restant les mêmes, cette probabilité augmente avec le nombre n de coups : la probabilité restant la même, le rapport de l'intervalle $2l$ des limites au nombre n , se resserre quand n augmente ; et dans le cas de n infini, ce rapport devient nul, et la probabilité se change en certitude. La solution du problème précédent sert encore à déterminer la probabilité que la valeur de p supposée inconnue, est comprise dans des limites données, lorsque sur un très-grand nombre n de coups, on connaît le nombre i des événemens correspondans à p qui sont arrivés. p est alors à très-peu près $\frac{i}{n}$; et généralement, lorsque dans un coup, il doit arriver l'un quelconque de plusieurs événemens simples, les probabilités respectives de ces événemens sont à très-peu près proportionnelles au nombre de fois qu'ils arriveront dans un très-grand nombre n de coups. P étant la probabilité de l'arrivée d'un événement composé de deux événemens simples dont p et $1 - p$ sont les possibilités respectives, et $1 - P$ étant la probabilité de la non-arrivée de cet événement composé ; si sur un très-grand nombre n d'arrivées et de non-arrivées du même événement, on connaît le nombre i de ses arrivées ; on a la probabilité que la valeur de P sera comprise dans des limites données ; et comme P est une fonction connue de p , on en conclut la probabilité que la valeur de p sera comprise dans des limites données..... n° 16, page 275

Une urne A renfermant un très-grand nombre n de boules blanches et noires ; à chaque tirage, on en extrait une que l'on remplace par une boule noire ; on demande la probabilité qu'après r tirages, le nombre des boules blanches sera x .

La solution du problème dépend d'une équation linéaire aux différences finies partielles du premier ordre, à coefficients variables. Réduction de cette équation à une équation aux différences partielles infiniment petites. Intégration de cette dernière équation. Application de la solution, au cas où l'urne est remplie primitivement, de cette manière : on projette un prisme droit dont la base étant un polygone régulier de $p + q$ côtés, est assez étroite pour que le prisme ne retombe jamais sur elle : sur les $p + q$ faces latérales, p sont blanches et q sont noires, et l'on met dans l'urne A , à chaque projection, une boule de la couleur de la face sur laquelle le prisme retombe.

Deux urnes A et B renferment chacune un très-grand nombre n de boules blanches et noires, le nombre des blanches étant égal à celui des noires, dans la totalité $2n$ des boules ; on tire en même tems une boule de chaque urne, et l'on remet dans une urne, la boule extraite de l'autre. En répétant un nombre quelconque r de fois cette opération, on demande la probabilité qu'il y aura x boules blanches dans l'urne A.

Le problème dépend d'une équation linéaire aux différences finies partielles du

second ordre, à coefficients variables. Réduction de cette équation, à une équation aux différences partielles infiniment petites du second ordre. Intégration de cette dernière équation, au moyen d'une intégrale définie. Développement de cette intégrale, en séries. Détermination des constantes de la série, au moyen de sa valeur initiale. Théorèmes analytiques relatifs à cet objet. Application de la solution, au cas où l'urne A est primitivement remplie, comme dans le problème précédent. Valeur moyenne des boules blanches de chaque urne, après r tirages. Expression générale de cette valeur, dans le cas où l'on a un nombre e d'urnes disposées circulairement, et renfermant chacune un grand nombre n de boules, les unes blanches et les autres noires; chaque tirage consistant à extraire en même tems, une boule de chaque urne, et à la remettre dans la suivante, en partant de l'une d'elles, dans un sens déterminé..... n° 17, page 284

CHAP. IV. De la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et des résultats moyens les plus avantageux..... page 304

Déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un grand nombre d'observations, sera comprise dans des limites données, en supposant que la loi de possibilité des erreurs est connue, et la même pour chaque observation, et que les erreurs négatives sont aussi possibles que les erreurs positives correspondantes. Expression générale de cette probabilité..... n° 18, page 304

Déterminer dans les suppositions précédentes, la probabilité que la somme des erreurs d'un grand nombre d'observations, ou la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., sera comprise dans des limites données, abstraction faite du signe. Expression générale de cette probabilité, et de la somme la plus probable..... n° 19, page 309

*Un élément étant connu à fort peu près, déterminer sa correction par l'ensemble d'un grand nombre d'observations. Formation des équations de condition. En les disposant de manière que dans chacune d'elles, le coefficient de la correction de l'élément ait le même signe, et les ajoutant, on forme une équation finale qui donne une correction moyenne. Expression de la probabilité que l'erreur de cette correction moyenne est comprise dans des limites données. La manière la plus générale de former l'équation finale, est de multiplier chaque équation de condition, par un facteur indéterminé, et d'ajouter tous ces produits. Expression de la probabilité que l'erreur de la correction donnée par cette équation finale, est comprise dans des limites données. Expression de l'erreur moyenne que l'on peut craindre en plus ou en moins. Détermination du système de facteurs, qui rend cette erreur un *minimum*. On est conduit alors au résultat que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Erreur moyenne de son résultat. Son expression dépend de la*

- loi de facilité des erreurs des observations. Moyen de l'en rendre indépendant..... n° 20, page 312
- Corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, plusieurs élémens déjà connus à fort peu près.* Formation des équations de condition. En les multipliant chacune par un facteur indéterminé, et ajoutant les produits, on forme une première équation finale : un second système de facteurs, donne une seconde équation finale, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales, qu'il y a d'éléments à corriger. Expressions des erreurs moyennes que l'on peut craindre sur chaque élément corrigé par ces équations finales. Détermination des systèmes de facteurs, par la condition que ces erreurs moyennes soient des *minima*. On retombe alors dans la méthode des moindres carrés des erreurs des observations; d'où il suit que cette méthode est celle que le calcul des probabilités indique comme étant la plus avantageuse. Expressions des erreurs moyennes qu'elle laisse encore à craindre en plus ou en moins, sur chaque élément. Ces expressions sont indépendantes de la loi de facilité des erreurs de chaque observation, et ne renferment que des données des observations. Moyen simple de comparer entre elles, du côté de la précision, diverses tables astronomiques d'un même astre..... n° 21 page 322
- Examen du cas où la possibilité des erreurs négatives, n'est pas la même que celle des erreurs positives. Résultat moyen vers lequel converge la somme des produits des erreurs d'un grand nombre d'observations, par des facteurs quelconques; probabilité de cette convergence..... n° 22, page 329
- Examen du cas où l'on considère les observations déjà faites. Alors l'erreur de la première, donne les erreurs de toutes les autres. La probabilité de cette erreur, prise *à posteriori*, ou d'après les observations déjà faites, est le produit des probabilités respectives, *à priori*, des erreurs de chaque observation. En concevant donc une courbe dont l'abscisse soit l'erreur de la première observation, et dont ce produit soit l'ordonnée; cette courbe sera celle des probabilités, *à posteriori*, des erreurs de la première observation. L'erreur qu'il faut lui supposer est l'abscisse correspondante à l'ordonnée qui divise l'aire de la courbe, en deux parties égales. La valeur de cette abscisse dépend de la loi inconnue des probabilités, *à priori*, des erreurs des observations; et dans cette ignorance, il convient de s'en tenir au résultat le plus avantageux, déterminé *à priori*, par les articles précédens. Recherche de la loi des probabilités, *à priori*, des erreurs, qui donne constamment la somme des erreurs, nulle pour le résultat qu'il faut choisir *à posteriori*. Cette loi donne généralement la règle du *minimum* des carrés des erreurs des observations. Cette dernière règle devient nécessaire, lorsque l'on doit choisir un résultat moyen entre plusieurs résultats donnés chacun, par un grand nombre d'observations de divers genres..... n° 23, page 333
- Recherche du système de corrections de plusieurs élémens, par un grand nombre d'observations, qui rend un *minimum*, abstraction faite du signe, la plus grande des erreurs qu'il leur suppose. Ce système est celui qui rend un *minimum*,

la somme des puissances semblables, très-élevées et paires de chaque erreur. Il diffère peu du système donné par la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Notice historique sur les méthodes de correction des élémens, par les observations..... n° 24, page 343

CHAP. V. Application du Calcul des Probabilités, à la recherche des phénomènes et de leurs causes..... page 349

On peut par l'analyse des chapitres précédens, appliquée à un grand nombre d'observations, déterminer la probabilité de l'existence des phénomènes dont l'étendue est assez petite pour être comprise dans les limites des erreurs de chaque observation. Formules qui expriment que les probabilités de l'existence du phénomène et de son étendue, sont comprises dans des limites données. Application à la variation diurne du baromètre, et à la rotation de la terre, déduite des expériences sur la chute des corps. La même analyse est applicable aux questions les plus délicates de l'astronomie, de l'économie politique, de la médecine, etc., et à la solution des problèmes sur les hasards, trop compliqués, pour être résolus directement par l'analyse. *Un plancher étant divisé en petits carreaux rectangles, par des lignes parallèles et perpendiculaires entre elles; déterminer la probabilité qu'en projetant au hasard, une aiguille, elle retombera sur un joint de ces carreaux.....* n° 25, page 349

CHAP. VI. De la probabilité des causes et des événemens futurs, tirée des événemens observés..... page 363

Un événement observé étant composé d'événemens simples du même genre, et dont la possibilité est inconnue; déterminer la probabilité que cette possibilité est comprise dans des limites données. Expression de cette probabilité. Formule pour la déterminer par une série très-convergente, lorsque l'événement observé est composé d'un grand nombre de ces événemens simples. Extension de cette formule, au cas où l'événement observé est composé de plusieurs genres différens d'événemens simples..... n° 26, page 363

Application de ces formules aux problèmes suivans. *Deux joueurs A et B jouent ensemble à cette condition, que celui qui sur trois coups en aura gagné deux, gagnera la partie, le troisième coup n'étant pas joué comme inutile, si le même joueur gagne les deux premiers coups. Sur un grand nombre n de parties gagnées, A en a gagné le nombre i; on demande la probabilité que son adresse, respectivement au joueur B, est comprise dans des limites données.*

On demande la probabilité que le nombre des coups joués est compris dans des limites déterminées. Enfin, ce dernier nombre étant supposé connu, on demande la probabilité que le nombre des parties est compris dans des limites données.

Solutions de ces divers problèmes..... n° 27, page 369

- Application des formules du n° 26 , aux naissances observées dans les principaux lieux de l'Europe. Partout le nombre des naissances des garçons est supérieur à celui des naissances des filles. *Déterminer la probabilité qu'il existe une cause constante de cette supériorité, d'après les naissances observées dans un lieu donné.* Solution du problème. Cette probabilité pour Paris , diffère excessivement peu de la certitude..... n° 28 , page 377
- A Paris , le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles , est $\frac{25}{24}$, tandis qu'à Londres, ce rapport est $\frac{19}{18}$. *Déterminer la probabilité qu'il existe une cause constante de cette différence.* Solution du problème. Cette probabilité est très-grande. Conjecture vraisemblable sur cette cause.... n° 29 , page 381
- Recherche de la probabilité des résultats fondés sur les tables de mortalité ou d'assurance, construites sur un grand nombre d'observations.
- Supposant que sur un grand nombre p d'individus de l'âge A , on ait observé qu'il en existe q à l'âge $A + a$, r à l'âge $A + a + a'$, etc., déterminer la probabilité que sur un grand nombre p' d'individus du même âge A , il en existera $\frac{p'q}{p} \pm z$ à l'âge $A + a$, $\frac{p'r}{p} \pm z'$ à l'âge $A + a'$, etc.* Solution du problème. Il en résulte qu'en augmentant le nombre p , on approche sans cesse de la vraie loi de mortalité, avec laquelle les résultats des observations coïncideraient, si p était infini..... n° 30, page 384
- Evaluer au moyen des naissances annuelles, la population d'un vaste empire.* Solution du problème. Application à la France. Probabilité que l'erreur de cette évaluation sera comprise dans des limites données..... n° 31, page 391
- Expression de la probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé. Lorsque l'événement futur est composé d'un nombre d'événemens simples, beaucoup plus petit que celui des événemens simples qui entrent dans l'événement observé; on peut sans erreur sensible, déterminer la possibilité de l'événement futur, en supposant à chaque événement simple, la possibilité qui rend l'événement observé, le plus probable..... n° 32, page 394
- Depuis l'époque où l'on a distingué à Paris, sur les registres, les naissances de chaque sexe, on a observé que le nombre des naissances masculines l'emporte sur celui des naissances féminines; déterminer la probabilité que cette supériorité annuelle se maintiendra dans un intervalle de tems donné, par exemple, dans l'espace d'un siècle.....* n° 33, page 397
- CHAP. VII. De l'influence des inégalités inconnues qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose parfaitement égales, page 402
- Examen des cas dans lesquels cette influence est favorable ou contraire. Elle est contraire à celui qui, au jeu de *croix et pile*, parie d'amener *croix* un

TABLE DES MATIÈRES.

465

nombre impair de fois , dans un nombre pair de coups. Moyen de corriger cette influence n° 34 , page 402

CHAP. VIII. Des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques..... page 408

Expression de la probabilité que la durée moyenne de la vie d'un grand nombre n d'enfans , sera comprise dans ces limites , vraie durée moyenne de la vie , plus ou moins une quantité donnée très-petite. Il en résulte que cette probabilité croît sans cesse à mesure que le nombre des enfans augmente , et que dans le cas d'un nombre infini , cette probabilité se confond avec la certitude , l'intervalle des limites devenant infiniment petit ou nul. Expression de l'erreur moyenne que l'on peut craindre en prenant pour durée moyenne de la vie , celle d'un grand nombre d'enfans. Règle pour conclure des tables de mortalité , la durée moyenne de ce qui reste à vivre , à une personne d'un âge donné..... n° 35 , page 408

Expression de la durée moyenne de la vie , si l'une des causes de mortalité vient à s'éteindre. Expression particulière au cas où l'on parvient à détruire une maladie qu'on ne peut contracter qu'une fois dans la vie. L'extinction de la petite vérole , au moyen de la vaccine , accroîtrait de plus de trois années , la durée moyenne de la vie , si l'accroissement de population qui en résulterait , n'était point arrêté par le défaut de subsistances..... n° 36 , page 412

De la durée moyenne des mariages. Expression de leur durée moyenne la plus probable ; et de la probabilité que l'erreur de cette expression est comprise dans des limites données. De la durée moyenne des associations formées d'un nombre quelconque d'individus..... n° 37 , page 415

CHAP. IX. Des bénéfices dépendans de la probabilité des événemens futurs..... page 419

Si l'on attend un nombre quelconque d'événemens simples dont les probabilités soient connues , et dont l'arrivée procure un avantage , leur non-arrivée causant une perte ; déterminer le bénéfice mathématique résultant de leur attente. Expression de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites données , quand le nombre des événemens attendus est très-grand. Quelque peu d'avantage que produise chaque événement attendu ; le bénéfice devient infiniment grand et certain , quand le nombre des événemens est supposé infini..... n° 38 , page 419

Si les diverses chances d'un événement attendu , produisent des avantages et des pertes dont les probabilités respectives soient données ; déterminer le bénéfice mathématique résultant de l'attente d'un nombre quelconque d'événemens semblables. Expression de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites données , lorsque ce nombre est très-grand... n° 39 , page 423

Des bénéfices des établissemens fondés sur les probabilités de la vie. Expression du capital qu'il faut donner pour constituer une rente viagère sur une ou plusieurs têtes. Expression de la rente qu'un individu doit donner à un établissement, pour assurer à ses héritiers un capital payable à sa mort. Expression de la probabilité que le bénéfice réel de l'établissement sera compris dans des limites données, en supposant qu'un grand nombre d'individus, en constituant chacun une rente sur sa tête, versent chacun une somme déterminée dans la caisse de l'établissement, pour subvenir à ses frais. n° 40, page 426.

CHAP. X. De l'espérance morale..... page 432

Expression de la fortune morale, en partant de ce principe, que le bien moral procuré à un individu, par une somme infiniment petite, est proportionnel à cette somme divisée par la fortune physique de cet individu. Expression de la fortune morale résultante de l'expectative d'un nombre quelconque d'événemens qui procurent des bénéfices dont les probabilités respectives sont connues. Expression de fortune physique correspondante à cette fortune morale. L'accroissement de cette fortune physique, résultant des événemens attendus, est ce que je nomme *avantage moral relatif à ces événemens*. Conséquences qui résultent de ces expressions. Le jeu mathématiquement le plus égal, est toujours désavantageux. Il vaut mieux exposer sa fortune par parties, à des dangers indépendans les uns des autres, que de l'exposer toute entière au même danger. En divisant ainsi sa fortune, l'avantage moral se rapproche sans cesse de l'avantage mathématique et finit par coïncider avec lui, lorsque la division est supposée infinie. L'avantage moral peut être augmenté au moyen des caisses d'assurance, en même tems que ces caisses produisent aux assureurs un bénéfice certain..... n° 41, page 432

Explication, au moyen de la théorie précédente, d'un paradoxe que présente le calcul des probabilités..... n° 42, page 439

Comparaison de l'avantage moral du placement d'un même capital, sur une tête, avec celui du placement sur deux têtes. On peut à la fois, par de semblables placements, accroître son propre avantage, et assurer dans l'avenir le sort des personnes qui nous intéressent..... n° 43, page 442

E R R A T A.

Page 2, ligne 5, à compter du bas, *supprimez* le mot *électorales*.

13, 4 en remont., aux coefficients de t_{x+i} , lisez au coefficient de t^{x+i} .

41, 14, substituez entre les crochets $-c \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{x' + \frac{na}{2}}{2}$ à.....

$$-c \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{x' + \frac{na}{2}}{2}$$

109, 1, $f^{n'} \cdot t^{n'} \dots$, lisez $f^n \cdot t^{n'} \dots$.

129, 4, $Ax f^{\mu} dx \cdot c^{-x}$, lisez $Af x^{\mu} \cdot dx \cdot c^{-x}$.

160, 1, $-\frac{nc^2}{c^a-1}$, lisez $-\frac{nc^a}{c^a-1}$.

161 et 162, ligne dernière, n° 32, lisez n° 33.

203, 1, n° 32, lisez n° 33.

249, 19, au lieu de $x-i$, lisez $x+i$.

412, 11, au lieu de 39, lisez 36.

